第26卷第3期 数学研究与评论 Vol.26, No.3
2006年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)03-0553-04 **文献标识码**: **A**

解析 Dirichlet 级数的准确零 (R) 级

牛 英 春
(西北工业大学应用数学系，陕西 西安 710072)
(E-mail: bill0523@sina.com)

摘 要: 本文研究了右半平面内解析 Dilrichlet 级数的准确零 (R) 级，减弱了已有结果的条件，得到了更强的结论并简化了原证明.

关键词: Dirichlet 级数；准确零 (R) 级；增长性.
MSC(2000): 30B50
中图分类: O174.52

1 主要结果

考虑 Dirichlet 级数

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{-\lambda_ns}, \tag{1.1}$$

其中 $\{a_n\}$ 是复数列， $s=\sigma+it(\sigma,t$ 是实变量), $0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n\uparrow+\infty$.

本文恒假定

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\lambda_n}=0,\quad \limsup_{n\to\infty}\frac{\log|a_n|}{\lambda_n}=0. \tag{1.2}$$

这时, 级数 (1.1) 的收敛横坐标及绝对收敛横坐标都是零, 于是和函数 $f(s)$ 在右半平面内解析. 记

$$M(\sigma)=\sup_{-\infty<t<+\infty}|f(\sigma+it)|,\quad m(\sigma)=\max_n|a_n|e^{-\lambda_n\sigma},\quad \sigma>0.$$

若

$$\limsup_{\sigma\to0^+}\frac{\log^+\log^+M(\sigma)}{\log\frac{1}{\sigma}}=\rho,$$

则称级数 (1.1) 为 ρ 级 Dirichlet 级数 [1].

余久曼 [2] 在条件 $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\log U(\lambda_n)}<+\infty$ 即

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{\log\lambda_n}<+\infty,$$

其中 $U(r)=r^{\rho(r)}(r>0,\rho(r)$ 是正增且可导函数并具有下列性质:

$$\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho,\quad \lim_{r\to\infty}\rho'(r)r\log r=0.$$

收稿日期: 2004-03-31; **接受日期**: 2004-12-23

下面研究了函数 $f(s)$ 的准确零 (R) 级，得到的结论是

$$\limsup_{\sigma\to 0^+}\frac{\log^+ M(\sigma)}{\log U(\frac{1}{\sigma})}=c\Longleftrightarrow \limsup_{n\to\infty}\frac{\log^+|a_n|}{\log U(\lambda_n)}=c\quad(0<c<\infty).$$

本文把条件 (1.3) 减弱为

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log n\cdot\overbrace{\log\cdots\log n}^{m\text{个}}}{\log\lambda_n}=0,\tag{1.4}$$

其中 $m\in N_+$ 且 $m\geq 2$, 得到结果如下:

定理 1 设 Dirichlet 级数 (1.1) 满足条件 (1.2),(1.4), 则

$$\limsup_{\sigma\to 0^+}\frac{\log^+ M(\sigma)}{\log\frac{1}{\sigma}}=c\Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty}\frac{\log^+|a_n|}{\log\lambda_n}=c\quad(0<c<\infty).$$

定理 2 设 Dirichlet 级数 (1.1) 满足条件 (1.2),(1.4), 则 $\lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\log^+ M(\sigma)}{\log\frac{1}{\sigma}}=c\Leftrightarrow$

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{\log^+|a_n|}{\log\lambda_n}=c$;

(ii) 存在递增的正整数序列 $\{n_v\}$ 使得

$$\lim_{v\to\infty}\frac{\log\lambda_{n_{v+1}}}{\log\lambda_{n_v}}=1,\quad \lim_{v\to\infty}\frac{\log^+|a_{n_v}|}{\log\lambda_{n_v}}=c\quad(0<c<\infty).$$

2 定理 1 的证明

引理 设 Dirichlet 级数 (1.1) 满足条件 (1.2),(1.4), 则

$$\limsup_{\sigma\to 0^+}\frac{\log M(\sigma)}{\log\frac{1}{\sigma}}=A\Leftrightarrow \limsup_{\sigma\to 0^+}\frac{\log m(\sigma)}{\log\frac{1}{\sigma}}=A,\tag{2.1}$$

这里 A 为正数.

证明 先证充分性. 由 $m(\sigma)\leq M(\sigma)$ 可知,

$$\limsup_{\sigma\to 0^+}\frac{\log M(\sigma)}{\log\frac{1}{\sigma}}\geq A.$$

另一方面，由 (2.1) 式的右边得

$$m(\sigma)\leq[\frac{1}{\sigma}]^{A+o(1)}.$$

在条件 (1.4) 中无妨设 $m=2$(m 为其他自然数时同理可证), 则得：任取 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in N_+$, 使得 $n\geq N^*=\max\{N,3\}$ 时有

$$-\lambda_n\leq -e^{\frac{\log n\cdot\log\log n}{\varepsilon}}.$$

因此

$$M(2\sigma)\leq\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|e^{-2\lambda_n\sigma}\leq m(\sigma)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda_n\sigma}\leq m(\sigma)[K_1+\sum_{n=N^*+1}^{\infty}e^{-\sigma e^{\frac{\log n\cdot\log\log n}{\varepsilon}}}],$$

其中 K_1 是正常数. 为使 $\sigma e^{\frac{\log n\cdot\log\log n}{\varepsilon}}/\log n>2$, 可取

$$T=\varphi^{-1}(\frac{2}{\sigma}),$$

这里 $\varphi(x)=\frac{e^{\frac{\log x\cdot\log\log x}{\varepsilon}}}{\log x}(x>e)$ 是连续且单调增的函数，这样

$$\begin{aligned}M(2\sigma)&\le m(\sigma)(K_1+\sum_{n=N^*+1}^{T}e^{-\sigma\log n}+\sum_{n=T+1}^{\infty}e^{-2\log n})\\&=m(\sigma)(K_1+\sum_{n=N^*+1}^{T}\frac{1}{n^{\sigma}}+\sum_{n=T+1}^{\infty}\frac{1}{n^2})\\&\le m(\sigma)(K_2+\int_{N^*}^{T}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\sigma}})\le m(\sigma)(K_2+\frac{1}{1-\sigma}T^{1-\sigma}),\end{aligned}$$

其中 K_1,K_2 都是正常数. 所以

$$\log M(2\sigma)\le(A+o(1))\log\frac{1}{\sigma}+\log K_2+(1-\sigma)\log T.$$

由前面所设知道

$$\frac{2}{\sigma}=\varphi(T)=\frac{e^{\frac{\log T\cdot\log\log T}{\varepsilon}}}{\log T}\quad(\sigma\to0^+),$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to0^+}\frac{\log T}{\log\frac{1}{\sigma}}&=\lim_{\sigma\to0^+}\frac{\sigma e^{\frac{\log T\cdot\log\log T}{\varepsilon}}}{2\log\frac{1}{\sigma}}=\lim_{\sigma\to0^+}\frac{e^{\frac{\log T\cdot\log\log T}{\varepsilon}}}{\varphi(T)\cdot\log\frac{\varphi(T)}{2}}\\&=\lim_{\sigma\to0^+}\frac{\log T}{\log T\cdot\log\log T-\log\log T}=0.\end{aligned}$$

故 $\log M(2\sigma)\le(A+o(1))\log\frac{1}{2\sigma}$, 于是

$$\limsup_{\sigma\to0^+}\frac{\log M(\sigma)}{\log\frac{1}{\sigma}}\le A.$$

充分性得证. 必要性的证明由充分性容易推出.

下面证明定理 1. 先证必要性. 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\sigma_0>0$, 对任何 $\sigma\in(0,\sigma_0)$ 有

$$M(\sigma)<(\frac{1}{\sigma})^{c+\varepsilon}.$$

由于对每一 $\sigma>0$ 和任意的正整数 n 有 $|a_n|<M(\sigma)e^{\lambda_n\sigma}$, 取

$$\sigma=\frac{1}{\lambda_n}(c+\varepsilon)\quad(n\to\infty),$$

由上两式得

$$\log^+|a_n|<(c+\varepsilon)\log\frac{\lambda_n}{c+\varepsilon}+c+\varepsilon,$$

由此得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log^+|a_n|}{\log\lambda_n}\le c.$$

若 $\limsup_{n\to\infty}\frac{\log^+|a_n|}{\log\lambda_n}\le c'<c\ \ (c'\in(0,c))$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大时有

$$\log^+|a_n|\le(c'+\varepsilon)\log\lambda_n,$$

于是

$$\log^+|a_n|-\lambda_n\sigma\le(c'+\varepsilon)\log\lambda_n-\lambda_n\sigma\le\sup_{y>0}\{(c'+\varepsilon)\log y-y\sigma\}.$$

取 $y=\frac{1}{\sigma}(c'+\varepsilon)(y\to+\infty)$, 由上不等式得

$$\log|a_n|e^{-\lambda_n\sigma}\le(c^{'}+\varepsilon)[\log\frac{1}{\sigma}+\log(c'+\varepsilon)-1].$$

再由引理就得到

$$\limsup_{\sigma\to0^+}\frac{\log^+M(\sigma)}{\log\frac{1}{\sigma}}\le c'<c.$$

这与题设矛盾. 故必要性得证. 充分性由以上证明不难推出.

定理 1 很好地刻画了函数 $f(s)$ 在较弱的条件 (1.4) 下的增长性, 关于正规增长性 (定理 2), 仿照 [2] 中定理 2 的证法并利用引理就可得到.

参考文献:

[1] 余家荣. 狄里克莱级数与随机狄里克莱级数 [M]. 北京: 科学出版社, 1997, 51–52.
YU Jia-rong. *Dirichlet Series and Random Dirichlet Series* [M]. Beijing: Science Press, 1997, 51–52. (in Chinese)

[2] 余久曼. 右半平面内解析函数的准确零 (R) 级 [J]. 数学研究与评论, 1983, **3**: 37–40.
YU Jiu-man. *The proximate zero order(R) of Dirichlet series in the right-half plane* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1983, **3**: 37–40. (in Chinese)

[3] 孙道椿. 半平面上的随机 Dirichlet 级数 [J]. 数学物理学报, 1999, **19**: 107–112.
SUN Dao-chun. *Random Dirichlet Series on the right-Half plane* [J]. Acta Math. Sci., 1999, **19**: 107–112. (in Chinese)

[4] 庄圻泰. 亚纯函数的奇异方向 [M]. 北京: 科学出版社, 1982, 136–138.
ZHUANG Qi-tai. *The Singular Direction of Meromorphic Functions* [M]. Beijing: Science Press, 1982, 136–138. (in Chinese)

The Proximate Zero Order (R) of Analytic Dirichlet Series

NIU Ying-chun
(Dept. of Appl. Math., Northwestern Polytechincal University, Xi'an 710072, China)

Abstract: This paper deals with the proximate zero order (R) of Dirichlet series in the right-half plane, weakens the condition of some known results, obtains stronger results and simplifies the original proof.

Key words: analytic functions; proximate zero order (R); growth.