第26卷第3期 数学研究与评论 Vol.26, No.3
2006年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)03-0598-07 **文献标识码**: A

粘合运算对图的控制参数的影响

陈仪朝 [1], 刘育兴 [2], 苏健基 [3]
(1. 北京交通大学数学系, 北京 100044; 2. 赣南师范学院数计系, 江西 赣州 341000;
3. 广西师范大学数学与计算机科学学院, 桂林 541004)
(E-mail: chengraph@163.com)

摘 要: 简单图 G 的粘合运算 G_{uv} 指的是重合 G 的两个顶点 $\{u,v\}$ 并且去掉重边和环所得到简单图的运算. 本文考虑了粘合运算对图的 4 个控制参数 $\gamma(G)$, $\Gamma(G)$, $\beta(G)$, $i(G)$ 的影响. 刻画了图 G_{uv} 与图 G 的控制参数 $\gamma(G)$, $\Gamma(G)$, $\beta(G)$, $i(G)$ 之间的关系. 及给出 $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)-1$ 和 $\beta(G_{uv})=\beta(G)-1$ 的充要条件.

关键词: 粘合运算; 控制数; 上控制数; 独立控制数; 独立数.
MSC(2000): 05C15
中图分类: O157.5

1 引 言

图的临界性质是图论的一个有近半个世纪研究历史的课题. 用以揭示图的一些较深入的性质. 由于图是由顶点和边组成的一种组合拓扑结构, 通常用删除顶点, 添加顶点, 删除边, 添加边, 收缩顶点和边, 劈开顶点和边等考察一些结构在图上的遗传性. 例如在图的连通性中, C.Thomassen[3] 在 1980 年利用阶大于 5 的 3 连通图有可缩边用归纳法给出了平面图 3 个著名定理的简单证明. 而在这之前, 3 个定理的证明是比较长的. 另外在图的染色, 图的控制数等中体现的尤为明显. 在文 [1,2,4–9] 中研究了对一个图进加边, 去边, 去点后图的控制参数 $\gamma(G)$, $\Gamma(G)$, $\beta(G)$, $i(G)$, $ir(G)$, $IR(G)$ 的变化情况. 本文对图的控制数利用粘合运算考察图的控制数, 上控制数, 独立控制数和独立数. 得到了一些新结果.

2 基本概念

$G=(V,E)$ 其中 V 为顶点集, E 为边集, 且本文所考虑的图均是无向简单图. 设 $u,v\in V(G)$, 图 G 粘合 $\{u,v\}$ 指的是在 G 中重合 $\{u,v\}$ 两个顶点并且去掉重边和环所得到的简单图. 记为 G_{uv}. 对 $e\in E(G)$. 我们称图 G 收缩 e 指的是重合该边的两个顶点并且去掉重边和环所得到的简单图. 记为 G/e. 从定义不难看出如果顶点 $\{u,v\}$ 之间有边关联, 图 G 的粘合 $\{u,v\}$ 的运算相当于图 G 收缩边 uv. 记 x_{uv} 表示 G 粘合 $\{u,v\}$ 后对应 u,v 的 G_{uv} 的顶点. 设 $v\in V(G)$, 令 $N(v)=\{u\in V(G)|uv\in E(G)\}$, $N[v]=N(v)\cup\{v\}$, 分别称为 v 的开邻域和闭邻域. 设 $v\in V(G)$, $A\subseteq V(G)$. 令 $d_A(v)=|\{u\in A|uv\in E(G)\}|$,$N(A)=\bigcup_{v\in A}N(v)$, $N[A]=A\cup N(A)$. 符号 $|A|$ 表示集合 A 中含有元素的数目, 即集合 A 的范数.

收稿日期: 2004-01-05
基金项目: 国家自然科学基金 (10171022)

设 $u,\ v\in V(G)$, 若 $v\in N[u]$, 则称 u 控制 v. 设 $v\in V(G)$, $D\subseteq V(G)$, 若 $v\in N[D]$, 则称 D 控制点 v. 如果 D 控制 G 中的所有点，即 $N[D]=V(G)$, 则称 D 为 G 的一个控制集. 若 D 是 G 的控制集，但 D 的任何真子集不是 G 的控制集，则称 D 为 G 的一个极小控制集. G 的控制数 $\gamma(G)$ 定义为 G 的所有极小控制集的最小范数. 上控制数 $\Gamma(G)$ 定义为 G 的所有极小控制集的最大范数. 类似地 G 的独立控制数 $i(G)$ 和独立数 $\beta(G)$ 分别定义为 G 的所有极大独立集的最小范数和最大范数. 如果控制集 D 的范数为 γ. 则称 D 为 G 的一 $\gamma-$ 控制集. 类似地，控制集 D 的范数为 Γ. 则称 D 为 G 的一 $\Gamma-$ 控制集. S 为一极大独立集，若 S 的范数等于 $\beta(G)$ 则称 S 为 G 的 $\beta-$ 集 . 设 $x\in S\subseteq V(G)$, 我们称 x 相应于 S 的私人邻域指的是 $N_G[x]-N_G[S-x]$. 通常我们记为 $pn_G(x,S)$. 若点 $v\in V(G)$ 不是 S 中任何点的私人邻域，则我们称它为 S 的公共邻域. 集合 S 称为无赘集，如果 $\forall\ x\in S$, 有 $pn_G(x,S)\neq\emptyset$. 我们称无赘集 S 称为极大的，若 S 为无赘集且不为任一无赘集的真子集. G 的所有极大无赘集的最大范数称为 G 的上无赘数，记为 $IR(G)$. G 的所有极大无赘集的最小范数称为 G 的无赘数，用 $ir(G)$ 表示. 另外在本文中除非特别指出否则在 G 中的导出子图为顶点导出子图. 文中不另行定义的图的术语与记号参看 [4] 或 [7].

3 主要结果

齐登记与苏健基在文 [10] 中刻画了 G 在粘合运算下的无赘数和上无赘数，得出如下结果：

定理 1 对图 $G, \forall\ x,y\in V(G)$, 有 $ir(G_{uv})\geq ir(G)/2$, 且这个不等式是严格的.

定理 2 对图 $G, \forall\ x,y\in V(G)$, 有

1). $IR(G)\geq IR(G_{uv})\geq IR(G)-2$. 2). 又若 $xy\in E(G)$, 则 $IR(G/xy)\geq IR(G)-1$.

上述结果刻画了图 G 的无赘数和上无赘数与图 G_{uv} 的无赘数和上无赘数之间的关系. 从中可以看出， u,v 之间有边关联与无边关联是不同的. 但对于图的控制数我们有：

性质 3 对图 G,$\forall\ u,v\in V(G)$ 有

(1) $\gamma(G_{uv})\leq\gamma(G)$. (2) $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)$ 或 $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)-1$.

证明 (1) 设 D 为 G 的某一 γ- 控制集.

情形 1 $u,v\in D$, 令 $D_1=D-\{u,v\}\cup x_{uv}$. 则 D_1 为 G_{uv} 的一控制集. 并且 $|D|=|D_1|+1$. 此时 $\gamma(G_{uv})\leq|D_1|=|D|-1=\gamma(G)-1$.

情形 2 $u\in D,v\in V-D$. 令 $D_1=\{D-u\}\cup x_{uv}$. 则 D_1 为 G_{uv} 的一控制集. 并且 $|D|=|D_1|$, 此时 $\gamma(G_{uv})\leq|D_1|=|D|=\gamma(G)$

情形 3 $v\in D,u\in V-D$. 由对称性及情形 2 知此时有 $\gamma(G_{uv})\leq\gamma(G)$.

情形 4 $u,v\in V-D$. 则 D 仍为 G_{uv} 的一控制集. 此时 $\gamma(G_{uv})\leq|D|=\gamma(G)$.

由上面的讨论知 (1) 成立.

(2) 由 (1) 知 $\gamma(G_{uv})\leq\gamma(G)$, 因此，或有 $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)$, 或有 $\gamma(G_{uv})\leq\gamma(G)-1$. 若 $\gamma(G_{uv})\neq\gamma(G)$. 下面证明 $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)-1$, 否则则有 $\gamma(G_{uv})\leq\gamma(G)-2$. 设 D_1 为 G_{uv} 的 $\gamma-$ 控制集. 则有 $x_{uv}\in D_1$ 或者 $x_{uv}\in V(G_{uv})-D_1$, 下面分情况讨论.

情形 1 $x_{uv}\in D_1$. 则 $D=\{D_1-x_{uv}\}\cup\{u,v\}$ 为 G 的一控制集. 并且 $|D|=|D_1|+1$ 因此 $\gamma(G)\leq|D|=\gamma(G_{uv})+1\leq\gamma(G)-2+1=\gamma(G)-1$. 矛盾.

情形 2 $x_{uv}\in V(G_{uv})-D_1$. 则 $D_1\cup\{u\}$,$D_1\cup\{v\}$, 或 D_1 三者有一为 G 的一控制集. 若为前两者令 $D=D_1\cup\{u\}$, 或 $D=D_1\cup\{v\}$. 则 $\gamma(G)\leq|D|=|D_1|+1=\gamma(G_{uv})+1\leq\gamma(G)-2+1=$

$\gamma(G)-1$. 矛盾. 若为后者则令 $D=D_1$, 这时 $\gamma(G)\le|D|=|D_1|=\gamma(G_{uv})\le\gamma(G)-2$. 又是一个矛盾.

综上所述，命题成立.

定理 4 对任意图 G,$u,v\in V(G)$. 则 $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)-1\Longleftrightarrow$ 存在 G 的某一 γ- 控制集 D 或有 $u,v\in D$, 或有 $|\{u,v\}\cap D|=|\{u,v\}\cap(V-D)|=1$, 且 $pn_G(\{u,v\}\cap D,D)=\{u,v\}\cap D$.

证明 *必要性*. $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)-1$. 令 D_1 为 G_{uv} 的一 γ- 控制集. 则有 $|D_1|=\gamma(G)-1$. 易知 $x_{uv}\in D_1$ 或者 $x_{uv}\in V(G_{uv})-D_1$, 下面分情况讨论.

情形 1 $x_{uv}\in D_1$. 则 $D=D_1-\{x_{uv}\}\cup\{u,v\}$ 为 G 的一控制集. 由性质 3 $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)-1$ 及 $|D|=|D_1|+1$. 因此 D 为 G 的一 γ- 控制集. 这时有 $u,v\in D$.

情形 2 $x_{uv}\in V(G_{uv})-D_1$. 这时 $D_1\cup\{u\}$ 或 $D_1\cup\{v\}$ 有一为 G 的一控制集. 不妨设为 $D=D_1\cup\{u\}$. 由性质 3 $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)-1$ 及 $|D|=|D_1|+1$, 因此 D 为 G 的一 γ- 控制集. 这时 $|\{u,v\}\cap D|=|\{u\}|=|\{u,v\}\cap(V-D)|=|\{v\}|=1$, 且 $pn_G(\{u,v\}\cap D,D)=pn_G(u,D)=\{u\}=\{u,v\}\cap D$.

充分性 设 D 为 G 的一 γ- 控制集.

1). 若 $u,v\in D$, 则 $D_1=\{D-\{u,v\}\}\cup\{x_{uv}\}$ 为 G_{uv} 的一控制集. 这时 $|D_1|=|D|-1$, 因此 $\gamma(G_{uv})\le|D_1|=|D|-1=\gamma(G)-1$. 由性质 3 $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)-1$.

2). 若 $|\{u,v\}\cap D|=|\{u,v\}\cap(V-D)|=1$, 且 $pn_G(\{u,v\}\cap D,D)=\{u,v\}\cap D$. 不妨设 $u\in D,v\in V-D$. 令 $D_1=D-\{u\}$. 则 D_1 为 G_{uv} 的一控制集. 且 $|D_1|=|D|-1$. 因此 $\gamma(G_{uv})\le|D_1|=|D|-1=\gamma(G)-1$. 由性质 3 $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)-1$.

综上所述，命题成立.

由性质 3 有如下定义：

定义 1 图 G 称为收缩临界控制图. 若 $\forall\ u,v\in V(G)$ 有 $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)-1$.

图 G 称为收缩控制图. 若 $\forall\ u,v\in V(G)$ 有 $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)$.

因此由定理 4 可以得出下述结论.

定理 5 图 G 为收缩临界控制图 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall\ u,v\in V(G)$ 均存在 G 的某一 γ- 控制集 D 或有 $u,v\in D$ 或有 $|\{u,v\}\cap D|=|\{u,v\}\cap(V-D)|=1$, 且 $pn_G(\{u,v\}\cap D,D)=\{u,v\}\cap D$.

例如路 p_4 为收缩临界控制图. 而星 $K_{1,n}(n>0)$ 为收缩控制图. 若 G 为平凡图. 则我们认为是收缩控制图的情况. 进而下一步自然地就想刻画一般情况下 $\gamma(G)=n(n>0)$ 的收缩临界控制图，收缩控制图的结构问题.

定理 6 若 G 为收缩控制图 $\Longleftrightarrow\gamma(G)=1$.

证明 *充分性*. 若 G 为平凡的情况，则命题显然成立，因此不妨设 G 不为平凡的情况.

设 x 为 G 的某一 γ- 控制集. 设 $u,v\in V(G)$. 若 u,v 无一为 x, 则 x 仍为 G_{uv} 的某一 γ- 控制集. 若 u,v 有一为 x, 则新顶点 x_{uv} 为 G_{uv} 的控制集. 因此 $\gamma(G)=\gamma(G_{uv})=1$. 故 G 为收缩控制图.

必要性. 若 $\gamma(G)\ne1$, 可设 $\gamma(G)\ge2$, 令 D 为 G 的某一 γ- 控制集. 由 $|D|\ge2$, 可取 $u,v\in D$, 令 $D_1=D-\{u,v\}\cup x_{uv}$, 则 D_1 为 G_{uv} 的控制集. 但是 $\gamma(G_{uv})\le|D_1|=|D|-1=\gamma(G)-1$ 与 G 为收缩控制图矛盾，因此 $\gamma(G)=1$

由上面的结论知只要一个图的控制数大于 1, 则它有粘合的顶点对使得控制数减少 1. 为此收缩临界控制图的控制数大于 1. 下面给出图 G 的控制数为 2 的二部图的收缩临界控制图结构.

定理 7 设 G 的控制数为 2 的二部图，若 G 为收缩临界控制图 $\Longleftrightarrow G\in\{2K_1,P_4,C_4\}$.

证明 充分性显然成立. 下证必要性.

令 $D=\{u,v\}$ 为 G 的某一 γ- 控制集.

情形 1 $uv\in E(G)$. 由 G 为二部图，因此 $N(x)\cap N(y)=\emptyset$. 这时设 $pn_G(u,D)=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$, $pn_G(v,D)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, 其中 $m\ge 1,n\ge 1$. 这时我们断言 $m=1,n=1$. 否则由对称性不妨设 $m\ge 2$. 由 x_{uu_1} 在 G_{uu_1} 中不控制 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 中任何一点. v 在 $G_{u_1u_2}$ 中不控制 $\{u_2,\cdots,u_m\}$ 中任何一点. 反过来也成立. 所以 $\gamma(G_{uu_1})=2$. 与 $\gamma(G_{uu_1})=1$ 矛盾. 故 $m=1,n=1$. 若 $u_1v_1\in E(G)$ 则 G 为圈 C_4, 否则 G 为路 P_4.

情形 2 $uv\notin E(G)$. 这时设 $pn_G(u,D)=\{u,u_1,\cdots,u_m\}$, $pn_G(v,D)=\{v,v_1,\cdots,v_n\}$, $N(x)\cap N(y)=\{w_1,w_2,\cdots,w_k\}$ 其中 $m\ge 0,n\ge 0,k\ge 0$. 由 G 为二部图, 因此 $\{u_1,u_2,\cdots,u_m,w_1,w_2,\cdots,w_k\}$ 及 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n,w_1,w_2,\cdots,w_k\}$ 在 G 中独立. 这时必有 $m\le 1,n\le 1,k\le 1$. 首先证明 $m\le 1,n\le 1$, 由对称性不妨设 $m\ge 2$. 又由 $\gamma(G_{uu_1})=1$. 因此有 $x\in V(G_{uu_1})$ 控制 G_{uu_1} 的所有点. 由 w_i 在 G_{uu_1} 中不控制 $\{u_2,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_n\}$ 中任何一点. 反过来也成立. 所以点 $x\in\{x_{uu_1},v\}$. 这样 $uv\in E(G)$ 或 $vu_1\in E(G)$ 矛盾. 若 $k\ge 2$, 由 $\gamma(G_{w_1w_2})=1$ 与前面类似地可推出 $\{x_{w_1w_2}\}$ 为 $G_{w_iw_j}$ 的控制集. 及 w_1 或 w_2 与 $\{u_1,u_2,\cdots,u_m,v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 相邻接. 矛盾. 若 $k=0$, 由 G 为收缩临界控制图，则 m,n 取 $\{0,1\}$ 可得 G 为 $2K_1$. 若 $k=1$, 由 G 为收缩临界控制图， m,n 不可能同时取 0, 和 1. 这样 G 为 P_4.

引理 8[8] 图 G 的控制集 D 为极小控制集 $\Longleftrightarrow\forall x\in D,pn_G(x,D)\neq\emptyset$.

对于图 G 的上控制数 $\Gamma(G)$ 我们有:

性质 9 对图 G,$\forall\ u,v\in V(G)$ 有

(1) $\Gamma(G_{uv})\le\Gamma(G)$.

(2) $\Gamma(G_{uv})=\Gamma(G)-1$. 或 $\Gamma(G_{uv})=\Gamma(G)$.

证明 (1) 设 D 为 G_{uv} 的一 Γ- 控制集, 则 D 为极小的. 由引理 8 有 $\forall x\in D,pn_{G_{uv}}(x,D)\neq\emptyset$,

情形 1 $x_{uv}\in D$. 则 $D_1=D-\{x_{uv}\}\cup\{u,v\}$ 为 G 的一控制集.

子情形 1 $pn_G(u,D_1)=\emptyset$,$pn_G(v,D_1)=\emptyset$. 这时 D_1-v 为 G 的一控制集并且 $pn_G(u,D_1-v)=\{v\}$. 又 $\forall x\in D,pn_{G_{uv}}(x,D)\neq\emptyset$, 则 $\forall x\in D_1-\{u,v\},pn_G(x,D_1-v)\neq\emptyset$. 由引理 $8D_1-v$ 为 G 的极小控制集.

子情形 2 $pn_G(u,D_1)=\emptyset$,$pn_G(v,D_1)\neq\emptyset$. 这时 D_1-u 为 G 的控制集. 由 $pn_G(v,D_1)\neq\emptyset$ 知 $pn_G(v,D_1-u)\neq\emptyset$. 又 $\forall x\in D,pn_{G_{uv}}(x,D)\neq\emptyset$, 则 $\forall x\in D_1-\{u,v\},pn_G(x,D_1-u)\neq\emptyset$. 由引理 $8D_1-u$ 为 G 的极小控制集.

子情形 3 $pn_G(u,D_1)\neq\emptyset$,$pn_G(v,D_1)=\emptyset$. 由对称性及子情形 2 知 D_1-v 为 G 的极小控制集.

子情形 4 $pn_G(u,D_1)\neq\emptyset$,$pn_G(v,D_1)\neq\emptyset$. 由 $\forall x\in D,pn_{G_{uv}}(x,D)\neq\emptyset$, 则 $\forall x\in D_1-\{u,v\},pn_G(x,D_1)\neq\emptyset$ 由引理 $8D_1$ 为 G 的极小控制集.

对于前三种情况 $\Gamma(G)\ge|D_1|-1=|D|=\Gamma(G_{uv})$, 后一种情况 $\Gamma(G)\ge|D_1|=|D|+1=\Gamma(G_{uv})+1$.

情形 2 $x_{uv}\in V-D$. 则 D,$D\cup\{u\},D\cup\{v\}$ 有一为 G 的一控制集. 若为 D, 则 $\forall x\in D,pn_{G_{uv}}(x,D)\neq\emptyset$, 知 $pn_G(x,D)\neq\emptyset$ 由引理 $8D$ 为 G 的极小控制集. 否则 u,v 有一不被 D 中的点控制，不妨设为 u. 则 $D\cup\{u\}$ 为 G 的一控制集，且 $pn_G(u,D\cup\{u\})=\{u\}$. 又因为

$\forall x \in D, pn_{G_{uv}}(x,D) \neq \emptyset$, 知 $pn_G(x, D\cup\{u\}) \neq \emptyset$ 由引理 $8D\cup\{u\}$ 为 G 的极小控制集. 所以 $\Gamma(G) \geq |D| = \Gamma(G_{uv})$ 或 $\Gamma(G) \geq |D\cup\{u\}| = \Gamma(G_{uv})+1$.

(2) 设 S 为 G 的一 Γ- 控制集.

情形 1　$u, v \in S$. 这时 $S' = S-\{u,v\}\cup x_{uv}$ 为 G_{uv} 的一控制集. 由 $\forall x \in S, pn_G(x,S) \neq \emptyset$, 则 $\forall x \in S', pn_{G_{uv}}(x,S') \neq \emptyset$. 因此 S' 为 G_{uv} 的极小控制集.

情形 2　$u \in S, v \in V-S$.

子情形 1　$v \in pn_G(u,S)$. 这时若 $|pn_G(u,S)| = 1$. 令 $S' = S-\{u\}$ 由 $\forall x \in S, pn_G(x,S) \neq \emptyset$. 则 $\forall x \in S', pn_{G_{uv}}(x,S') \neq \emptyset$. S' 为 G_{uv} 的极小控制集. 否则 $|pn_G(u,S)| \geq 2$, 令 $S' = S-\{u\}\cup\{x_{uv}\}$ 则 $pn_{G_{uv}}(x_{uv},S') \neq \emptyset$. 又由 $\forall x \in S, pn_G(x,S) \neq \emptyset$. 则 $\forall x \in S-\{u\}, pn_{G_{uv}}(x,S') \neq \emptyset$. S' 为 G_{uv} 的极小控制集.

子情形 2　$v \notin pn_G(u,S)$. 这时若 $|pn_G(u,S)| = 1$, 则或有 $pn_G(u,S) = \{u\}$ 或有 $pn_G(u,S) = \{x\}(x \in V-S)$, 若为前者令 $S' = S-\{u\}$, 与子情形 1 一样验证 S' 为 G_{uv} 的极小控制集. 若为后者则令 $S' = S-\{u\}\cup\{x\}$, 同理 S' 为 G_{uv} 的极小控制集. 若 $|pn_G(u,S)| \geq 2$, 令 $pn_G(u,S)\cap(V-S)$ 在 G 中的生成子图为 H, 则 $i(H) = 1$. 否则若 $i(H) \geq 2$, 可设 $|T| = i(H)$. 则 $|S-u\cup T| = |S|+1$, 故 $S-u\cup T$ 为 G 的一比 S 更大的控制集, 与子情形 1 一样易验证 $S-u\cup T$ 为 G 的极小控制集. 这与 S 为最大的极小控制集相矛盾. 设 $T = \{x\}$, 令 $S' = S-\{u\}\cup\{x\}$. 同理 S' 为 G_{uv} 的极小控制集.

情形 3　$v \in S, u \in V-S$. 与前面类似讨论.

情形 4　$u, v \in V-S$.

子情形 1　u, v 均为 S 中某一个点的私人邻域. 这时 S 仍为 G_{uv} 的极小控制集.

子情形 2　u, v 均为 S 中点的公共邻域. 这时 S 也仍为 G_{uv} 的极小控制集.

子情形 3　u 为 S 中某一点 x 的私人邻域.　v 为 S 中另外一点 y 的私人邻域. 若 x, y 的私人邻域的范数均大于 2. 则 S 仍为 G_{uv} 的极小控制集. 若 x, y 的私人邻域的范数有一为 1 而另一点的范数大于 2. 不妨设 x 的私人邻域的范数为 1. 则 $S-\{x\}$ 为 G_{uv} 的极小控制集.

子情形 4　v 为 S 中某一点 x 的私人邻域.　u 为 S 中另外一点 y 的私人邻域. 由对称性及子情形 $3S-\{x\}$ 为 G_{uv} 的极小控制集或 S 为 G_{uv} 的极小控制集.

子情形 5　u 为 S 中某一点 x 的私人邻域, v 为 S 中另外一些点的公共邻域. 若 x 的私人邻域的范数为 1. 则 $S-\{x\}$ 为 G_{uv} 的极小控制集. 否则若 x 的私人邻域的范数大于 1 则 S 仍为 G_{uv} 的极小控制集.

子情形 6　v 为 S 中某一点 x 的私人邻域, u 为 S 中另外一些点的公共邻域. 由对称性及子情形 $5S-\{x\}$ 为 G_{uv} 的极小控制集或 S 为 G_{uv} 的极小控制集.

由上面的证明有 $\Gamma(G_{uv}) \geq |S| = \Gamma(G)$. 或 $\Gamma(G_{uv}) \geq |S|-1 = \Gamma(G)-1$ 由 (1) $\Gamma(G_{uv}) \leq \Gamma(G)$. 因此 $\Gamma(G_{uv}) = \Gamma(G)-1$. 或 $\Gamma(G_{uv}) = \Gamma(G)$. 命题得证.

对于图 G 的独立控制数 $i(G)$,G 粘合一对顶点没有像性质 3 那样的结论. 对于 $i(G_{uv})$, 它有可能大于 $i(G)$, 也有可能小于 $i(G)$, 同时也有可能行等于 $i(G)$. 并且对于 $i(G_{uv}) < i(G)$, 不一定有 $i(G_{uv}) = i(G)-1$, 对任意的自然数 n, 均存在图 G 使得 $i(G_{uv}) < i(G)-n$. 同理对于 $i(G_{uv}) > i(G)$, 不一定有 $i(G_{uv}) = i(G)+1$, 对任意的自然数 n, 也存在图 G 使得 $i(G_{uv}) > i(G)+n$. 举例如下:

设 G 为星 $K_{1,n}$ 和星 $K_{1,m}$ 的并, 其中 $V(K_{1,n}) = \{u, u_1, \cdots, u_n\}$ $E(K_{1,n}) = \{uu_1, \cdots uu_n\}$. $V(K_{1,m}) = \{v, v_1, \cdots, v_m\}$ $E(K_{1,m}) = \{vv_1, vv_2, \cdots vv_m\}$, 其中 $m > n \geq 2$. 易知 $i(G) =$

$|\{u,v\}| = 2$. 现考虑 G 粘合顶点对 u, v_1. 记 G 粘合 u, v_1 后的新顶点为 x. $V(G_{uv_1}) = \{x, u_1, u_2, \cdots, u_n, v, v_2, \cdots, v_m\}$. $E(G_{uv_1}) = \{xu_1, \cdots, xu_n, vx, vv_2, \cdots, vv_m\}$, 易知 $i(G_{uv_1}) = n+1$. 这时 G_{uv_1} 的独立控制数比 G 的独立控制数增加了 $n-1$. 又令 $G' = G_{uv_1}$, 则 G'_{xv} 为一星. 因此 $i(G'_{xv}) = 1$. 这时 G'_{xv} 的独立控制数比 G' 的独立控制数减少了 n.

然而对于独立数 $\beta(G)$ 却有类似于性质 3 的性质.

性质 10 对图 G,$\forall\, u, v \in V(G)$ 有

(1) $\beta(G_{uv}) \le \beta(G)$.

(2) $\beta(G_{uv}) = \beta(G)$ 或 $\beta(G_{uv}) = \beta(G) - 1$.

证明 (1) 设 S 为 G_{uv} 的 $\beta-$ 集. 则或有 $x_{uv} \in V(G_{uv}) - S$ 或有 $x_{uv} \in S$. 下面分情况讨论.

1). $x_{uv} \in V(G_{uv}) - S$. 则 S 仍然为 G 的一独立集. 此时 $\beta(G_{uv}) = |S| \le \beta(G)$.

2). $x_{uv} \in S$. 若 $|pn(x_{uv}, S)| = 1$, 则 $S - \{x_{uv}\} \cup \{u\}$ 或 $S - \{x_{uv}\} \cup \{v\}$ 为 G 的独立集. 不妨设为 $S - \{x_{uv}\} \cup \{u\}$, 此时 $\beta(G_{uv}) = |S - \{x_{uv}\} \cup \{u\}| \le \beta(G)$.

若 $|pn(x_{uv}, S)| \ge 2$. 由 S 为 G_{uv} 的最大独立集，则 $pn(x_{uv}, S) - \{x_{uv}\}$ 在 G 中的生成子图 H 的独立控制数为 1. 即 $i(H) = 1$. 否则，若 $i(H) \ge 2$, 可设 $|T| = i(H)$, 其中 $T \subset H$, 则 $|S - x_{uv} \cup T| \ge |S| + 1$, 因此 $S - x_{uv} \cup T$ 为 G_{uv} 的一比 S 更大的独立集，矛盾. 于是不妨设 x 为 H 的独立控制集. 则 $S - \{x_{uv}\} \cup \{x\}$, $S - \{x_{uv}\} \cup \{x, u\}$,$S - \{x_{uv}\} \cup \{x, v\}$ 三者至少有一 G 的独立集. 若为前者，则 $\beta(G) \ge |S - \{x_{uv}\} \cup \{x\}| = |S| = \beta(G_{uv})$; 若为后两者，则 $\beta(G) \ge |S - \{x_{uv}\} \cup \{x, u\}| = |S| + 1 = \beta(G_{uv}) + 1 > \beta(G_{uv})$ 或 $\beta(G) \ge |S - \{x_{uv}\} \cup \{x, v\}| = |S| + 1 = \beta(G_{uv}) + 1 > \beta(G_{uv})$.

(2) 不妨设 $\beta(G_{uv}) \ne \beta(G)$. 由 **(1)** 知 $\beta(G_{uv}) \le \beta(G) - 1$. 取 G 的 β- 集 S. 这时不可能有 $u, v \in V - S$, 否则 S 仍为 G_{uv} 的一独立集，这样 $\beta(G_{uv}) \ge= |S| = \beta(G)$. 矛盾

情形 1 $u, v \in S$, 令 $S' = S - \{u, v\} \cup x_{uv}$, 则 S' 为 G_{uv} 的一独立集.

情形 2 $u \in S, v \in V - S$, 令 $S' = S - \{u\}$, 则 S' 为 G_{uv} 的一独立集.

情形 3 $v \in S, u \in V - S$, 令 $S' = S - \{v\}$, 则 S' 为 G_{uv} 的一独立集.

由上面有 $\beta(G_{uv}) \ge |S'| = \beta(G) - 1$. 又因 $\beta(G_{uv}) \le \beta(G) - 1$. 因此 $\beta(G_{uv}) = \beta(G) - 1$. 命题成立.

定理 11 对图 G,$u, v \in V(G)$, 则 $\beta(G_{uv}) = \beta(G) - 1 \Longleftrightarrow \forall\, \beta-$ 集 S 有 $u, v \in S$ 或 $|\{u,v\} \cap S| = |\{u,v\} \cap (V - S)| = 1$, 且 $|pn(\{u,v\} \cap S, S)| = 1$.

证明 充分性. 若 $\forall\, \beta-$ 集 S 有 $u, v \in S$ 或 $|\{u,v\} \cap S| = |\{u,v\} \cap (V - S)| = 1$, 且 $|pn(\{u,v\} \cap S, S)| = 1$, 但 $\beta(G_{uv}) = \beta(G)$, 所以存在 $T \subset V(G_{uv})$ 为 G_{uv} 的 β- 集使得 $|T| = \beta(G_{uv}) = \beta(G)$. 则有 $x_{uv} \in T$ 或 $x_{uv} \in V(G_{uv}) - T$. 下面讨论这两种情况.

1). $x_{uv} \in T$. 若 $uv \notin E(G)$ 令 $S = T - \{x_{uv}\} \cup \{u, v\}$, 则 S 为 G 的一独立集. 因此 $\beta(G) \ge |S| = |T| + 1 = \beta(G_{uv}) + 1$ 与我们假设 $\beta(G_{uv}) = \beta(G)$ 矛盾. 若 $uv \in E(G)$, 令 $S = T - \{x_{uv}\} \cup \{u\}$, 则 S 独立，$|S| = |T|$. 由假设则 S 为 G 的 β- 集. 但这时有 $\{u, v\} \subseteq pn(u, S)$, 所以 $|pn(u, S)| \ge 2$. 这与 $|pn(\{u,v\} \cap S, S)| = |pn(u, S)| = 1$ 矛盾.

2). $x_{uv} \in V(G_{uv}) - T$, 则 $u, v \in V(G) - T$. 由假设这时 T 仍然为 G 的 β- 集, 这与 $u, v \in T$ 或 $|\{u,v\} \cap T| = |\{u,v\} \cap V - T| = 1$ 相矛盾.

因此 $\beta(G_{uv}) = \beta(G) - 1$.

必要性. 若 $\beta(G_{uv})=\beta(G)-1$. 设 S 为 G 的一 β- 集. 如果 $u,v\in S$, 则命题成立. 若不是, 有 $|\{u,v\}\cap S|=|\{u,v\}\cap(V-S)|=1$. 否则有 $u,v\in V(G)-S$. 这时 S 仍然为 G_{uv} 的独立集. 这样 $\beta(G_{uv})\geq|S|=\beta(G)$. 与 $\beta(G_{uv})=\beta(G)-1$ 矛盾. 因此不妨设 $u\in S,v\in V-S$, 这时有 $|pn(u,S)|=|\{u\}|=1$. 若其不然, 则 $|pn(u,S)|\geq 2$. 取 $x\in pn(u,S)$, 但 $x\neq u$. 若 $x\neq v$, 这时 $S-\{u\}\cup\{x\}$ 为 G_{uv} 的独立集. 所以 $\beta(G_{uv})\geq|S-\{u\}\cup\{x\}|=|S|=\beta(G)$, 矛盾. 若 $x=v$, 这时 $S-\{u\}\cup\{x_{uv}\}$ 为 G_{uv} 的独立集. 所以 $\beta(G_{uv})\geq|S-\{u\}\cup\{x_{uv}\}|=|S|=\beta(G)$ 又矛盾. 因此必要性成立.

综上所述命题成立.

定义 2 图 G 称为独立收缩临界控制图. 若 $\forall\ u,v\in V(G)$, 有 $\beta(G_{uv})=\beta(G)-1$.

定理 12 图 G 为独立收缩临界控制图. $\iff$ 对任意点对 $u,v\in V(G)$ 使得对 $\forall$ β- 集 S 或有 $u,v\in S$ 或 $|\{u,v\}\cap S|=|\{u,v\}\cap(V-S)|=1$, 且 $|pn(\{u,v\}\cap S,S)|=1$.

致谢 感谢齐登记的有益研讨, 也感谢北京交通大学理学院博士生创新基金的资助.

参考文献:

[1] BAUER D, HARARY F, NIEMINEN J. et al. *Domination altertion sets in graphs* [J]. Discrete Math., 1983, **47**: 153–161.
[2] BRIGHAM R C, CHINN P Z, DUTTON R D. *Vertex domination-critical graphs* [J]. Networks, 1988, **18**: 173–179.
[3] THOMASSEN C. *Nonseparating cycles in k-connected graphs* [J]. J. Graph Theory, 1981, **5**: 351–354.
[4] CHARTRAND G, LESNIAK L. *Graphs and Digraphs* [M]. California, Production: Greg Hubit Bookworks, 1979.
[5] GROBLER J P, MYNHARDT C Mt. *Domination parameters and edge-removal-critical graphs* [J]. Discrete Math., 2001, **231**: 221–239.
[6] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, SLATER P J. *Domination in Graphs: Advanced Topics* [M]. Marcel Dekker, New York, 1998.
[7] HEDETNIEMI S T, SLATER P J. *Fundamentals of Domination in Graphs* [M], Marcel Dekker, New York, 1998.
[8] ORE O. *Theory of Graphs* [M]. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 38 (Amer. Math. Soc, Providence, RI), 1962.
[9] SUMNER D P. *Domination critical graphs* [J]. J. Combin Thoery, Ser. B, 1983, **34**: 65–76.
[10] 齐登记. 图的控制 [D]. 广西师范大学硕士论文, 2003.
QI Deng-ji. *Domination of graphs* [D]. Master Thesis of Guangxi Normal University, 2003. (in Chinese)

Domination Parameters and Vertex-Contraction-Critical Graphs

CHEN Yi-chao[1], *LIU Yu-xing*[2], *SU Jian-ji*[3]
(1. Dept. of Math., Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;
2. Dept. of Math., Gannan Normal University, Ganzhou 341000, China;
3. Dept. of Math., Guangxi Normal University, Guilin 541004, China)

Abstract: Let G be a simple graph and $u,v\in V(G)$. The graph G_{uv} is called the vertex-contraction of G, if we identify the vertices u and v and remove all resulting loops and duplicate edges. This paper deals with the relationship of domination parameters between G_{uv} and G, and gets $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)$ or $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)-1$, $\Gamma(G_{uv})=\Gamma(G)$ or $\Gamma(G_{uv})=\Gamma(G)-1$, $\beta(G_{uv})=\beta(G)$ or $\beta(G_{uv})=\beta(G)-1$. The sufficient and necessary conditions for $\gamma(G_{uv})=\gamma(G)-1$ and $\beta(G_{uv})=\beta(G)-1$ are also obtained.

Key words: vertex-contraction; domination number; upper domination number; independent domination number; independence number.