文章编号: 1000-341X(2006)03-0613-04 **文献标识码**: **A**

一个失误的反例

岑燕明
(贵州民族学院数学系，贵州 贵阳 550025)
(E-mail: ymcen@hotmail.com)

摘 要: 文 [1] 的作者对于文 [2] 中的定理 2 举了一个粗心的反例 $W_t(x,y)=xy(x-y)(x-ty)$. 为此，我们不得不与文 [1] 的作者商榷某些主要问题.

关键词: Whitney 族； k- 开； k- 饱和； k- 有限决定.
MSC(2000): 58K40
中图分类: O186.33

(1) 两个不同的问题

记号： E_n- 在 $O\in R^n$ 的 C^∞ 函数芽环， M-E_n 中的唯一的极大理想. M^k-M 的 k 次幂. j^kf- 芽 f 的 k 次 Taylor 多项式. P_n^k-n 元 k 次齐次多项式芽构成的实向量空间. $J(f)$- 芽 f 的雅可比理想.

为了充分说明问题，我们引述文 [1] 和 [2] 有关的核心内容和概念.

定义 1[2] 设 $f\in M^4\subset E_{x,y}(E_2)$, 如果 $j^4f=0$ 能确定四条不同的实直线，称 f 的四阶 Hessain 是非退化的 (注：在 $f\in M^4$ 的条件下， f 的四阶 Hessain 刚好为 j^4f).

在此定义下，文 [2] 有结论

定理[2] 设 $f\in M^4\subset E_{x,y}$, 如果 f 的四阶 Hessain 是非退化的，则 f 同构于它的四阶 Hessain.

其证明的依据为：

引理 1[2] 设 $f=xy(x-\alpha y)(x+y)$ (其中 $\alpha\neq 0,1$), 则 $M^2J(f)=M^5$.

引理 2[2] 设 $f=A_1x^4+A_2x^3y+A_3x^2y^2+A_4xy^3+A_5y^4$, $A_i\in R(i=1,2,3,4,5)$, 若 $f=0$ 确定四条不同的实直线，则 f 经线性同胚，同构于 $xy(x-\alpha y)(x+y)(\alpha\neq 0,-1)$.

引理 3[3] 如果 $f\in E_n$ 且 $M^{k+1}\subset M^2J(f)$, 则 g 同构于 f, 只要 $g-f\in M^{k+1}$. 等价地，如果 $f\in E_n$ 且 $M^{k+1}\subset M^2J(f)$, 则 g 同构于 f, 只要 $j^kg-j^kf=0$. 由此推知，如果 $f\in E_n$ 且 $M^{k+1}\subset M^2J(f)$, 则 f 是 k- 决定的.

文 [2] 虽然没有给出具体的证明过程 (因与该文定理 1 类似), 但经反复核实，我们的结论是：文 [2] 的定理 2 是正确的. 其提出的证明思路也是可行的. 为了节省篇幅，不再重复.

定义 2[4] $f\in E_n$ 称为是有限 k- 决定的 (Sufficient) 是指：每一个与 f 有相同的 k-jet 的芽 g 是右等价于 f 的 (注：右等价、同构指的都是 C^∞ 右等价).

由上可知：文 [2] 中定理 2 的准确含义应该是：如果 $f\in M^4\subset E_{x,y}$, 且 $j^4f=0$ 能确定四条不同的实直线，则 fC^∞ 右等价于 j^4f.

收稿日期: 2004-05-08; **接受日期**: 2005-07-17
基金项目: 国家自然科学基金 (10261002), 贵州省科学技术基金 (20013060).

而文 [1] 针对文 [2] 定理 2 提出的 "反例" 是 Whitney 族 [1], $W_t(x,y)=xy(x-y)(x-ty)$, $(x,y,t)\in R^3$ 其结论是 (原文照译):

如果限制参数 t 到区间 $(1,+\infty)$, 则 W_t 对每一 t 是非退化的 (这里 "非退化" 是与文 [2] 不同的含义). 特别, $W_t=0$ 由四条不同的直线组成. 直觉上, W_t 和 $W_{t'}$ 是十分相似的, 但确实不存在一个 C^1- 微分同胚 h 使得 $W_{t'}\circ h=W_t$ (这能使用简单的线性代数来对 dh 证明). 另外, 已知 $N_t=xy(x-ty)$, $\quad W_t=xy(x-y)(x-ty)$. 对于 N_t, 由定理 2(注: 这里的定理 2 是文 [1] 中的定理 2, 即 [5, P.189] Arnold 的一个定理, 而不是文 [2] 的定理 2), 对于任何的 $t,t'\in(1,+\infty)$, N_t 和 $N_{t'}$ 是 C^∞- 等价的. 但是, 对于 W_t, 情况就不相同. 从 [3](注: 这里的 [3] 是文 [1] 中所引用的 T.C.Kuo 的一篇参考文献, 即本文的文献 [6]) 知道 W_t 和 $W_{t'}$ 是 C^0- 等价的.

只从文 [1] 的这些结论来看, 读者稍不留意, 便会立即首肯. 因为这些结论都是从奇点理论权威的文章中照搬过来的. 但思考后会发现: 文 [1] 作者所叙述的上述结论和文 [2] 定理 2 所叙述的结论是有重大区别的: 就以文 [1] 作者所指派的 "反例" 来说, 文 [1] 作者的结论是对于任何给定的 t_0 和 $t_1\in(1,+\infty)$ 且 $t_0\neq t_1$, 则 W_{t_0} 和 W_{t_1} 不可能 C^∞ 右等价, 而只能是 C^0 等价. 而文 [2] 的定理 2 的结论却是: 对于每一给定的 $t_0\in(1,+\infty)$, $W_{t_0}(x,y)+r(x,y)$ 是与 $W_{t_0}(x,y)C^\infty$ 右等价的, 其中 $r\in M^5$. 因为按文 [2] 的定理 2, 置 $f=W_{t_0}+r$, 则 $f\in M^4$, 而 f 的四阶 Hessain 刚好为 W_{t_0}, 又 $W_{t_0}(x,y)=0$ 确定了四条不同的实直线, 按文 [2] 的定义 2(本文的定义 1),f 的四阶 Hessain W_{t_0} 是非退化的, 故 $f=W_{t_0}+r$ 同构 (C^∞ 右等价) 于它的四阶 Hessain W_{t_0}.

显然, 这是两个性质有重大区别的问题. 遗憾的是文 [1] 的作者忽视这两类问题的区别, 而将 Whitney 族 $W_t(x,y)$, $t\in(1,+\infty)$ 中的任何两个不同元素不可能 C^∞ 右等价作为文 [2] 定理 2 不成立的 "反例 " 来加以举出, 这是不正确的.

(2) "反例" 不反

在弄清了上述两个性质不同问题的基础上, 可容易地判定这两篇文章所涉及的主要问题最基本的是非.

事实上, 对任何给定的 t_0 和 $t_1\in(1,+\infty)$ 且 $t_0\neq t_1$, 得到 W_{t_0} 和 W_{t_1} 且 $W_{t_0}\neq W_{t_1}$, 然而 W_{t_0} 和 W_{t_1} 的四阶 Hessain 显然分别为 W_{t_0} 和 W_{t_1}, 这就是说 W_{t_0} 的四阶 Hessain 是 W_{t_0}, 而不是 W_{t_1}; 同样, W_{t_1} 的四阶 Hessain 是 W_{t_1}, 而不是 W_{t_0}. 由此, W_{t_0} 和 W_{t_1} 之间的关系不是一个微分芽与它的四阶 Hessain 之间的关系. 因此, 不能把其中之一, 譬如说把 W_{t_0} 视为 W_{t_1} 的四阶 Hessain 而延用文 [2] 的定理 2. 也就是说, W_{t_0} 和 W_{t_1} 是否 C^∞ 右等价不是文 [2] 定理 2 所要追求的结论.

另一方面, 对于每一给定的 $t_0\in(1,+\infty)$, $W_{t_0}(x,y)=xy(x-y)(x-t_0y)=0$ 确定了四条不同的实直线, 视 W_{t_0} 为 M^4 中某些芽的四阶 Hessain, 则按定义 1([2, P.288, 定义 2]), 这些芽的四阶 Hessain 是非退化的. 而 M^4 中以 W_{t_0} 为四阶 Hessain 的芽的全体为 $\{W_{t_0}+r|_{\forall r\in M^5}\}$. 可再一次验证 W_{t_0} 满足 $M^2J(W_{t_0})=M^5$. 于是, 由引理 3([2, P.287 命题 1 的后半部分]), 则 W_{t_0} 是 4- 决定的 (sufficient). 而对于每一给定的 $r\in M^5$, $f=W_{t_0}+r$, 则 $j^4f=j^4W_{t_0}=W_{t_0}$. 由有限 4- 决定的定义, f 同构于 W_{t_0}. 即 f 同构于它的四阶 Hessain. 这正是对于属于 M^4 且以 W_{t_0} 为其四阶 Hessain 的每一芽 f, 文 [2] 定理 2 所要叙述的结论.

(3) $W_{t_0}(x,y)$ 和 $N_{t_0}(x,y)$ 的轨道

对于每一给定的 $t_0\in(1,+\infty)$, 引入以下概念来研究 $W_{t_0}(x,y)$ 和 $N_{t_0}(x,y)$ 的轨道特点有益于理解上述所论证的内容.

设 $f\in E_n$, 用 Γf 表示 f 在局部微分同胚群 L_n 作用下的轨道, 用 $\Gamma^k f$ 表示 $j^kf\in J_n^k$ 在

李群 L_n^k 作用下的轨道. $L_n^k=\{j^kh|h\in L_n\}$.

L_n^k 中的群运算 [3]: $\forall P,Q\in L_n^k$, 则 $P\cdot Q$ 是复合多项式映射 P 和 Q 而得到一个次数 $\le k^2$ 的多项式映射 $P\circ Q$, 然后再进行 k 阶截断 (即截掉次数 $>k$ 的项).

L_n^k 在 J_n^k 上的作用 [3]: 设 $f\in J_n^k,\varphi\in L_n^k$, 则 $f\circ\varphi$ 是指 f 和 φ 复合后再进行 k 阶截断.

今考虑典则投影 $\pi: J_n^k\to J_n^{k-1}, f\longmapsto j^{k-1}f(\forall f\in J_n^k)$.

定义 3[3] 轨道 Γ^kf 称为 k- 开的，如果 Γ^kf 在 $\pi^{-1}(\Gamma^{k-1}f)$ 中开.

Γ^kf 是 k- 开的充要条件是：每一使得 $\pi g=\pi j^kf$ 且 $g-j^kf\in P_n^k$ 是充分小的 $g\in J_n^k$, 经由 L_n^k 是同构于 j^kf 的.

基本定理 [3] 对 $f\in E_n$, 如下条件是等价的： a) Γ^kf 是 k— 开的. $b)MJ(f)\supset M^k$. 在前面的任一条件下，在 E_n 中的轨道 Γf 是 J_n^k 中的 Γ^kf 通过典则投影： $j^k:E_n\to J_n^k$ 的逆像.

命题 1[3] 若 $MJ(f)\supset M^k$, 则 g 同构于 f, 只要 $g-f\in M^k$ 且 $j^kg-j^kf\in P_n^k$ 充分小.

定义 4[3] 轨道 Γ^kf 称为 k- 饱和的，如果 $\Gamma^kf=\pi^{-1}(\Gamma^{k-1}f)$.

Γ^kf 是 k- 饱和的充要条件是：每一使得 $\pi g=\pi j^kf$ 的 $g\in J_n^k$, 经由 L_n^k 是同构于 j^kf 的.

使用以上概念和基本定理容易验证：

结论 1 由对任何给定的 t_0 和 $t_1\in(1,+\infty)$, 只要 $t_0\ne t_1, W_{t_0}(x,y)$ 不可能 C^∞ 右等价于 $W_{t_1}(x,y)$ 必可推出：对每一给定的 $t_0\in(1,+\infty),\Gamma^4W_{t_0}(x,y)$ 不是 4- 开的.

证明 反证: 若对某 $t_0\in(1,+\infty),\Gamma^4W_{t_0}(x,y)$ 是 4- 开的, 由基本定理, 这等价于 $MJ(W_{t_0})\supset M^4$. 今取 $t_1\in(1,+\infty)$ 使 $t_0\ne t_1$ 且 t_1 充分接近 t_0, 便可保证： $W_{t_1}-W_{t_0}=xy^2(x-y)(t_0-t_1)\in M^4$ 且 $j^4W_{t_1}-j^4W_{t_0}=W_{t_1}-W_{t_0}=xy^2(x-y)(t_0-t_1)$ 充分小. 于是，由命题 1 可推出 W_{t_1} 同构于 W_{t_0}, 此与对任何给定的 t_0 和 $t_1\in(1,+\infty)$ 且 $t_0\ne t_1, W_{t_1}$ 不可能 C^∞ 右等价于 W_{t_0} 的结论矛盾.

结论 2 对每一 $t_0\in(1,+\infty), W_{t_0}(x,y)$ 不满足 $MJ(W_{t_0})\supseteq M^4$. 故 $\Gamma^4W_{t_0}(x,y)$ 不是 4- 开的.

证明 直接计算 $MJ(W_{t_0})=[3x^3y-2(t_0+1)x^2y^2+t_0xy^3, x^4-2(t_0+1)x^3y+3t_0x^2y^2, 3x^2y^2-2(t_0+1)xy^3+t_0y^4, x^3y-2(t_0+1)x^2y^2+3t_0xy^3]$. 有 $MJ(W_{t_0})\subset M^4=[x^4,x^3y,x^2y^2,xy^3,y^4]$ 且 $MJ(W_{t_0})\ne M^4$. 反证: 若 $MJ(W_{t_0})=M^4$ 则 $MJ(W_{t_0})/M^5\cong M^4/M^5$, 即 $R\{3x^3y-2(t_0+1)x^2y^2+t_0xy^3, x^4-2(t_0+1)x^3y+3t_0x^2y^2, 3x^2y^2-2(t_0+1)xy^3+t_0y^4, x^3y-2(t_0+1)x^2y^2+3t_0xy^3\}\cong R\{x^4,x^3y,x^2y^2,xy^3,y^4\}$. 左端至多是 P_2^4 的四维真子空间, 而右端是 P_2^4-5 维实向量空间, 矛盾.

结论 3 对每一 $t_0\in(1,+\infty),\Gamma^5W_{t_0}(x,y)$ 是 5- 饱和的.

证明 对每一给定的 $t_0\in(1,+\infty)$, 类似于 [2] 引理 4 可验证 $M^2J(W_{t_0}(x,y))=M^5$, 再由引理 3[3], 只要 $g(x,y)-W_{t_0}(x,y)\in M^5$, 则 $g(x,y)$ 同构于 $W_{t_0}(x,y)$. 特别，如果 $g\in J_2^5$ 且 $g(x,y)-W_{t_0}(x,y)\in M^5$, 则 $g(x,y)$ 同构于 $W_{t_0}(x,y)$. 即存在局部微分同胚 $h\in L_2$ 使得 $g=W_{t_0}\circ h$. 今取 $j^5h\in L_2^5$, 并注意到 (i) 由于 $g\in J_2^5$ 且 $g-W_{t_0}\in M^5$, 所以 $g=W_{t_0}+r$, 其中 $r\in P_2^5$. 故 $\pi g=\pi j^5W_{t_0}=W_{t_0}$. (ii) 由于 $g=W_{t_0}\circ h(h\in L_2)$ 可推出 $g\equiv W_{t_0}\circ j^5h$ (modulo M^6)- 即 W_{t_0} 和 j^5h 复合后的 5 阶截断等于 g. 再注意 $j^5W_{t_0}(x,y)=W_{t_0}(x,y)$ 和 L_n^k 在 J_n^k 上作用的定义以及定义 4 给出的 Γ^kf 是 k- 饱和的充要条件知 $\Gamma^5W_{t_0}(x,y)$ 是 5- 饱和的.

一般地，对于给定的 $f\in E_n$, 如果 Γ^kf 是 k— 开的. 由基本定理有 $\Gamma f=(j^k)^{-1}\Gamma^kf$. 若 Γ^kf 虽然不是 k- 开的. 但却满足关系 $M^2J(f)\supset M^{k+1}$ 则仍有 $\Gamma f=(j^k)^{-1}\Gamma^kf$[3].

于是我们得到如下关系：

$\Gamma^k f$ 是 k- 开的 $\Leftrightarrow MJ(f) \supset M^k \Rightarrow M^2J(f) \supset M^{k+1} \Rightarrow \Gamma f = (j^k)^{-1}\Gamma^k f \Rightarrow f$ 是 k-决定的 (注：由 $MJ(f) \supset M^k$ 必有 $M^2J(f) \supset M^{k+1}$. 但是，如果 $M^2J(f) \supset M^{k+1}$, 未必有 $MJ(f) \supset M^k, f = W_{t_0}$ 就是这样的一个例子).

结论 4 对每一给定的 $r \in M^5, f = W_{t_0} + r$ 同构于 W_{t_0} 此论断等价于 W_{t_0} 是 4- 决定的.

证明 只需注意一切与 W_{t_0} 具有相同的 4-jet 的芽的全体为 $\{W_{t_0} + r|_{\forall r \in M^5}\}$, 再利用有限 4- 决定的定义可直接推出.

由结论 1 和结论 2 知： $\forall t_0$ 和 $t_1 \in (1, +\infty)$ 且 $t_0 \neq t_1, W_{t_0}$ 和 W_{t_1} 不 C^∞ 右等价是 $\forall t_0 \in (1, +\infty)$, $\Gamma^4 W_{t_0}$ 不 4- 开的充分条件，且 $\Gamma^4 W_{t_0}$ 确实不是 4- 开的. 而由结论 3 和结论 4 知：$\forall t_0 \in (1, +\infty), \Gamma^4 W_{t_0}$ 虽然不是 4- 开的, 但 $\forall t_0 \in (1, +\infty), W_{t_0}$ 满足 $M^2J(W_{t_0}) = M^5, \Gamma^5 W_{t_0}$ 是 5- 饱和的. 因此，W_{t_0} 是 4- 决定的且 $\forall t_0 \in (1, +\infty), W_{t_0}$ 有限 4- 决定等价于文 [2] 定理 2 对于 M^4 中一切以 W_{t_0} 为其四阶 Hessain 的芽 $W_{t_0} + r(\forall r \in M^5)$ 所要叙述的结论： $\forall r \in M^5, W_{t_0} + r$ 总是同构于它的四阶 Hessain W_{t_0} 的.

综上所述，文 [1] 的 “反例” 能且只能用来否定 “$\forall t_0 \in (1, +\infty), \Gamma^4 W_{t_0}$ 是 4- 开” 这一结论，而不能也不可能用来否定 “$\forall t_0 \in (1, +\infty), W_{t_0}$ 是 4- 决定” 的结论. 这就是文 [1] 作者对文 [2] 定理 2 所举 “反例” 失效的症结所在.

用同样的方法细致考察文 [1] 中提及的 $N_t(x, y) = xy(x - ty), t \in (1, +\infty)$, 不难验证：对每一给定的 $t_0 \in (1, +\infty)$, 有 $MJ(N_{t_0}) = M^3$, 即 $\Gamma^3 N_{t_0}(x, y)$ 是 3- 开的. 显然， $N_{t_1} - N_{t_0} = xy^2(t_0 - t_1) \in M^3$, 所以，对于任何给定的 t_0 和 $t_1 \in (1, +\infty)$ 且 $t_0 \neq t_1$, 只要 t_1 和 t_0 充分接近，便可保证 $j^3 N_{t_1}(x, y) - j^3 N_{t_0}(x, y) = N_{t_1}(x, y) - N_{t_0}(x, y) = xy^2(t_0 - t_1)$ 充分小. 于是由命题 1, 便可得到 $N_{t_1}(x, y)$ 和 $N_{t_0}(x, y) C^\infty$ 右等价. 由此易推出 (过程略): 对任何给定的 t_0 和 $t_1 \in (1, +\infty)$ 且 $t_0 \neq t_1, N_{t_1}(x, y)$ 是 C^∞ 右等价于 $N_{t_0}(x, y)$ 的.

参考文献：

[1] CAO Yi. *On The generalization of morse lemma* [J]. J. Math. Res. Exposition, 2003, **23**(3): 456–458.

[2] 岑燕斌. Morse 引理的一个推广 [J]. 数学研究与评论, 2000, **20**(2): 287–290.
CEN Yan-bin. *A generalization of Morse lemma* [J]. J. Math. Res. Exposition, 2000, **20**(2): 287–290. (In Chinese)

[3] MARTINET J. *Singularities of Smooth Functions and Maps* [M]. London Mathematical Society Lecture Note Series 58, Cambridge University Press, 1982.

[4] BRÖCKER T H. *Differentiable Germs and Catastrophes* [M]. London Mathematical Society Lecture Note Series 17, Cambridge Press, 1975.

[5] ARNOLD V I. GUSEIN-ZADE S M, VARCHENKO A N. *Singularities of Differentiable Maps* [M]. Birkhauser, Boston, Inc, 1985.

[6] KUO T C. *A natural equivalence relation on singularities* [J]. Inventions Math., 1980, **57**: 219–226.

A Faulty Counter Example

CEN Yan-ming
(Dept. of Math., Guizhou University for Ethnic Minorities, Guiyang 550025, China)

Abstract: The author of [1] gives a careless counter example $W_t(x, y) = xy(x - y)(x - ty)$ for Theorem 2 in [2]. For this reason, we have to discuss some main problems with the author of [1].

Key words: Whitney's families; k-open; k-saturated; k-finitely determined.