第27卷第1期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.27, No.1
2007年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)01-0113-10　　**文献标识码**: **A**

关于极大 S^2NS 阵的一个注记

尤利华 [1]， 邵嘉裕 [2]

(1. 华南师范大学数学科学学院，广东 广州 510631; 2. 同济大学应用数学系，上海 200092)

(E-mail: ylhua@scnu.edu.cn)

摘　要: 一个实方阵 A 称为是 S^2NS 阵，若所有与 A 有相同符号模式的矩阵均可逆，且它们的逆矩阵的符号模式都相同. 若 A 是 S^2NS 阵且 A 中任意一个零元换为任意非零元后所得的矩阵都不是 S^2NS 阵，则称 A 是极大 S^2NS 阵. 设所有 n 阶极大 S^2NS 阵的非零元个数所成之集合为 $\mathcal{S}(n)$, $Z_4(n)=\{\frac{1}{2}n(n-1)+4,\cdots,\frac{1}{2}n(n+1)-1\}$, 除了 $2n+1$ 到 $3n-4$ 间的一段和 $Z_4(n)$ 外， $\mathcal{S}(n)$ 得到了完全确定. 本文将用图论方法证明 $Z_4(n)\cap\mathcal{S}(n)=\phi$.

关键词: 符号；极大； S^2NS; 矩阵；有向图.

MSC(2000): 15A09; 15A48; 05C50

中图分类: O151.21

1 引 言

一个实数 a 的符号 sgn$a$ 定义为 $1,-1$ 或 0, 视 $a>0$, $a<0$ 或 $a=0$ 而定.

一个符号矩阵是指以 $1,-1,0$ 为元素的矩阵. 一个实矩阵 A 的符号模式是将 A 的所有元素都换成它的符号后所得的符号矩阵，记作 sgn$A$. 所有与 A 有相同符号模式的矩阵构成的集合称为是 A 的定性矩阵类，记作 $Q(A)$.

一个实方阵 A, 若 $Q(A)$ 中的每个矩阵都是非奇异的 (即可逆的), 则称 A 是符号非异矩阵，简记为 SNS 阵；若 A 是 SNS 阵，且 $Q(A)$ 中所有矩阵的逆矩阵都有相同的符号模式，则称 A 是强符号非异矩阵，简记为 S^2NS 阵；若 A 是 S^2NS 阵且 A 中任意一个零元换为任意非零元后所得的矩阵都不是 S^2NS 阵，则称 A 是极大 S^2NS 阵.

矩阵 A 的行 (列) 变号是指对 A 的某些行 (列) 乘上 -1 的变换. 两个 $m\times n$ 实矩阵 A,B 称为是置换等价的，若 A 可经适当的行列置换变为 B. 又称 A,B 是符号置换等价的，若 A 可经适当的行列置换和行列变号变为 B.

矩阵 A 中两两不共线 (既不同行也不同列) 的非零元的最大个数称为 A 的项秩，记作 $\rho(A)$. 称 n 阶方阵 A 是满项秩的，若 $\rho(A)=n$.

称方阵 A 是部分可分的，若 A 置换等价于下列形式：

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix},$$

这里 A_1 与 A_2 都是非空方阵. 否则称方阵 A 是完全不可分的.

收稿日期: 2005-11-02; **接受日期**: 2006-01-20
基金项目: 国家自然科学基金 (10331020); 数学天元基金 (10526019); 广东省博士科研启动基金 (5300084).

众所周知 [2], 若 A 是满项秩的方阵，则 A 可置换等价于如下的 “完全不可分标准型 ”:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{21} & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & A_k \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

这里对任意的 $i \in \{1, \cdots, k\}$, 对角块 A_i 是完全不可分的方阵. 若 A 置换等价于形如 (1.1) 的完全不可分标准型，则称 A 恰有 k 个完全不可分分支 (简称为分支). 容易证明，分支数 k 是由矩阵 A 唯一确定的.

设 A 是恰有 k 个完全不可分分支的 n 阶符号矩阵，显然 $1 \le k \le n$. 以 $N(A)$ 表 A 中所有非零元的个数. 在文献 [3] 中， R.A. Brualdi, K.L. Chavey 和 B.L. Shader 得到了如下的结论： $k = 1$ 时的 n 阶极大 S^2NS 阵存在，且所有这样的 n 阶极大 S^2NS 阵 A 的非零元个数均为 $N(A) = 3n-2$. 当 $n \ge 4$ 时，文献 [4] 中给出了 $k = n$ 时的 n 阶极大 S^2NS 阵的例子 (即 §2 中的 T_n, 此时 $N(T_n) = \frac{1}{2}n(n+1)$). 进而文献 [1] 给出了存在恰有 $k(1 \le k \le n)$ 个完全不可分分支的 n 阶极大 S^2NS 阵的充要条件： 1) 当 $n \ge 5$ 时， $k \ne 2$; 2) 当 $n \le 4$ 时， $k \notin \{2, 3\}$.

对于 S^2NS 阵的非零元个数，文献 [5] 证明了当 $n \ge 4$ 时，介于 n 和 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 之间的任一自然数 k, 都是某个 n 阶 S^2NS 阵的非零元个数. 一个自然的问题是：对于 n 阶极大 S^2NS 阵，相应的非零元个数又可能是哪些数？令 $\mathcal{S}(n)$ 为所有 n 阶极大 S^2NS 阵的非零元个数所成之集合. 显然，当 $n \ge 4$ 时，由上面所述的一些已知结果可知 $\mathcal{S}(n) \subseteq \{n, \cdots, \frac{1}{2}n(n+1)\}$, 且 $3n-2 \in \mathcal{S}(n)$, $\frac{1}{2}n(n+1) \in \mathcal{S}(n)$. 文献 [1] 研究了集合 $\mathcal{S}(n)$, 并试图确定当 $n \ge 5$ 时， n 到 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 间的每一个正整数是否在集合 $\mathcal{S}(n)$ 中. 为此，文献 [1] 将集合 $\{n, \cdots, \frac{1}{2}n(n+1)\}$ 分成如下五个两两不交的子集合 $Z_1(n), \cdots, Z_5(n)$:

$$\begin{aligned} &Z_1(n) = \{n, \cdots, 2n\}; \\ &Z_2(n) = \{2n+1, \cdots, 3n-4\}; \\ &Z_3(n) = \{3n-3, \cdots, \frac{1}{2}n(n-1)+3\}; \\ &Z_4(n) = \{\frac{1}{2}n(n-1)+4, \cdots, \frac{1}{2}n(n+1)-1\}; \\ &Z_5(n) = \{\frac{1}{2}n(n+1)\}. \end{aligned}$$

显然， $Z_5(n) \subseteq \mathcal{S}(n)$(见 (2.1) 式. 文献 [1] 证明了：当 $n \ge 5$ 时， $Z_1(n) \cap \mathcal{S}(n) = \phi$; $Z_3(n) \subseteq \mathcal{S}(n)$. 在本文中，我们将应用图论的技巧证明 $Z_4(n) \cap \mathcal{S}(n) = \phi$, 即证明 $Z_4(n)$ 中的任一数都不在 $\mathcal{S}(n)$ 中.

2 定义、记号与预备定理

为了得到本文的主要结论，我们要用到一些图论的概念和技巧.

设 S 是一个有向图，若在 S 的每条弧上都赋以一个符号 1 或 -1, 则称 S 是一个带号有向图. 带号有向图 S 中任一途径 W 的符号定义为 W 中所有弧的符号的乘积 (重复出现的弧的符号重复计). 在本文中，如不作特别声明，所有的有向图均指带号有向图.

称一个带号有向图 S 为 S^2NS 带号有向图，若 S 满足以下两条件:

1) S 的每个圈的符号为负；

2) S 的每对同始同终路都同号.

一个 n 阶实方阵 $A=(a_{ij})$ 的伴随有向图 $D(A)$ 定义为以 $V=\{1,\cdots,n\}$ 为点集合，以 $E=\{(i,j)|a_{ij}\neq 0,\text{且}i\neq j\}$ 为弧集合的有向图 (注意，此地 $D(A)$ 中不含环，即无始点和终点重合的弧). A 的带号伴随有向图 $S(A)$ 则定义为是将 $D(A)$ 中的每一条弧 (i,j) 赋以符号 $\mathrm{sgn}a_{ij}$ 后所得的带号有向图.

众所周知，若 A 是对角元全非零的方阵，则 A 是完全不可分的当且仅当它的伴随有向图 $D(A)$ 是强连通的.

在本文中, 由于我们主要讨论 S^2NS 阵 A 为极大 S^2NS 阵的条件, 故不妨设 A 已是满项秩的方阵. 又矩阵的 S^2NS 性与极大 S^2NS 性都在符号置换等价下保持不变，因此为便于讨论，不妨假设矩阵 A 的所有对角元全为负且已经是 (1.1) 型的完全不可分标准型.

下面的引理 2.1 给出的是 S^2NS 阵的一个著名的图论刻画.

引理 2.1[4,6] 设 A 是对角元全负的实方阵，则 A 是 S^2NS 阵当且仅当 $S(A)$ 是 S^2NS 带号有向图.

设 D_3 为由 3 个点 x,y,z 和 4 条弧 $(x,y),(y,x),(x,z),(y,z)$ 所构成的有向图. 容易看到 [7], 任意 S^2NS 带号有向图不含 D_3 和 $\mathrm{Rev}(D_3)$ 的弧剖分图为其子图. 这里 $\mathrm{Rev}(D_3)$ 是将 D_3 中所有弧反向后所得的有向图. 由此可以得到如下的引理：

引理 2.2[5] 设 S 是 S^2NS 带号有向图，且 S_1,S_2 是 S 的两个强连通分支，则 S_1 与 S_2 之间至多有一条弧.

引理 2.2 的矩阵形式可叙述为：

引理 2.3[5] 设 A 是 S^2NS 阵且 A 是形如 (1.1) 的完全不可分标准型，则每个块 $B_{ij}(1\leq j<i\leq k)$ 至多含有一个非零元.

定义 2.1[1] 称一个 S^2NS 带号有向图 S 为极大 S^2NS 带号有向图，若 S 添上任意一条赋以任意符号的两端都在 S 中的新弧后所得的新带号有向图都不是 S^2NS 带号有向图.

引理 2.4[1] 设 A 是对角元全负的方阵，则 A 是极大 S^2NS 阵当且仅当 $S(A)$ 是极大 S^2NS 带号有向图.

有了引理 2.4 之后，研究 n 阶极大 S^2NS 阵的非零元个数问题可等价于研究相应的 n 阶极大 S^2NS 带号有向图的弧数. 因此在以下的讨论中，我们将主要从其等价的图论问题着手来进行研究.

文献 [3],[5],[7] 研究了 n 阶 S^2NS 阵的非零元个数的问题，得到的如下一些结论 (定理 2.1 和定理 2.2) 将在本文的证明中用到.

定理 2.1[3,7] (1) 设 A 是 n 阶完全不可分 S^2NS 阵，则

$$N(A)\leq 3n-2,$$

等号成立当且仅当 A 是 n 阶完全不可分极大 S^2NS 阵.

(2) 设

$$T_n=\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}_{n\times n}, \tag{2.1}$$

则当 $n \geq 4$ 时， T_n 是 n 阶极大 S^2NS 阵，且 $N(T_n)=\frac{1}{2}n(n+1)$.

定理 2.2[5] 设 A 是 n 阶 S^2NS 符号矩阵，则

$$N(A) \leq \begin{cases} \frac{1}{2}n(n+1), & 若 n=1 或 n\geq 4; \\ 3n-2, & 若 n=2 或 3. \end{cases} \tag{2.2}$$

等号成立当且仅当 A 满足以下两条件之一：

1) $n \neq 2,3$ 且 A 符号置换等价于 T_n;

2) $n=2,3,4$ 且 A 是完全不可分极大 S^2NS 阵.

如果未加说明，本文中出现的术语均出自文献 [4] 和文献 [8] 中.

3 主要结论的证明

以 $\mathcal{S}(n)$ 表示所有 n 阶极大 S^2NS 阵的非零元个数所成之集合．由定理 2.2 易得当 $n \geq 4$ 时， $\mathcal{S}(n) \subseteq \{n,\cdots,\frac{1}{2}n(n+1)\}$.

当 $n\geq 5$ 时，若将集合 $\{n,\cdots,\frac{1}{2}n(n+1)\}$ 分成如下五个子集合 $Z_1(n),\cdots,Z_5(n)$:

$$\begin{aligned}
&Z_1(n)=\{n,\cdots,2n\};\\
&Z_2(n)=\{2n+1,\cdots,3n-4\};\\
&Z_3(n)=\{3n-3,\cdots,\frac{1}{2}n(n-1)+3\};\\
&Z_4(n)=\{\frac{1}{2}n(n-1)+4,\cdots,\frac{1}{2}n(n+1)-1\};\\
&Z_5(n)=\{\frac{1}{2}n(n+1)\}.
\end{aligned}$$

显然 $Z_1(n)\cup\cdots\cup Z_5(n)=\{n,\cdots,\frac{1}{2}n(n+1)\}$, $Z_i(n)\cap Z_j(n)=\phi$, $i\neq j$ 且 $i,j\in\{1,\cdots,5\}$. 易见 $Z_5(n)\subseteq \mathcal{S}(n)$ (由 [7] 及 (2.1) 式), 文献 [1] 已证 $Z_1(n)\cap\mathcal{S}(n)=\phi$; $Z_3(n)\subseteq\mathcal{S}(n)$. 下面我们将应用图论方法证明 $Z_4(n)$ 中的任一数都不在 $\mathcal{S}(n)$ 中．为此，首先给出若干个引理.

引理 3.1 设 $n\geq 5$, A 是有 k 个完全不可分分支的 n 阶极大 S^2NS 阵．若 $N(A)\in Z_4(n)$, 则 $k=n$, 进而 $S(A)$ 无圈，且 A 可置换相似于某个对角元全负的下三角矩阵，即具有如下形式的矩阵:

$$\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

证明 由 (1.1) 式可知此时每个 A_i 都是 S^2NS 阵， $i=1,\cdots,k$. 若 $k\leq n-1$, 则由引理 2.3 及定理 2.1 可得

$$\begin{aligned}
N(A)&=\sum_{i=1}^{k}N(A_i)+\sum_{1\leq j<i\leq k}N(B_{ij})\leq\sum_{i=1}^{k}(3n_i-2)+(1+\cdots+(k-1))\\
&=3n+\frac{1}{2}k(k-5)\leq 3n+\frac{1}{2}(n-1)(n-6)\\
&=\frac{1}{2}(n-1)n+3<\frac{1}{2}(n-1)n+4.
\end{aligned}$$

这与 $N(A)\in Z_4(n)$ 矛盾．所以必有 $k=n$.

若 $k=n$, 则 $S(A)$ 是有 n 个强连通分支的 n 阶极大 S^2NS 带号有向图，即 $S(A)$ 的每个强连通分支都是平凡的，从而 $S(A)$ 无圈，故 A 可置换相似于某个 (形如 (3.1)) 的对角元全负的下三角矩阵. □

定义 3.1 称有向图 S 为传递有向图，如果对于 S 中任意两点 u,v, 点 u 到 v 若有路，则有弧.

以下我们常以记号 $P(a\to b)$ 表示有向图中点 a 到 b 的某一条有向路．而当有向路 P 顺次经过点 x 和点 y 时，我们以 xPy 表示有向路 P 上点 x 到点 y 的一段子路.

引理 3.2 设 S 是 n 阶极大 S^2NS 带号有向图，且 S 无圈，则 S 是传递有向图.

证明 (反证法)．若 S 中存在两点 u,v, $(u,v)\notin E(S)$, 但存在点 u 到 v 的路 P, 此时添弧 (u,v), 且赋号使 $\mathrm{sgn}(u,v)=\mathrm{sgn}\ P$. 记所得的新带号有向图为 S_1. 由 S 无圈可知 S_1 也无圈.

对 S_1 中任意两点 x,y, 设 P_1,P_2 是图 S_1 中点 x 到 y 的任意两条路．若 P_1,P_2 都在图 S 中，则由 S 是 S^2NS 带号有向图可知 P_1 和 P_2 同号．否则 P_1,P_2 中至少有一条路经过了弧 (u,v).

若 P_1,P_2 都经过了弧 (u,v), 则 P_1,P_2 均由 S 中点 x 到 u 的路、新弧 (u,v) 与 S 中点 v 到 y 的路构成．从而由 S 中的同始同终路同号可知有 $\mathrm{sgn}P_1=\mathrm{sgn}P_2$.

否则 P_1,P_2 中仅有一条路经过了弧 (u,v), 不妨设 P_1 经过了弧 (u,v), 即 $P_1=P(x\to u)\cup\{(u,v)\}\cup P(v\to y)$, 此时以 S 中 u 到 v 的路 P 替代弧 (u,v) 得 S 中途径 $P_1'=(xP_1u)\cup P\cup(vP_1y)$. 显然 $\mathrm{sgn}P_1'=\mathrm{sgn}P_1$, 且由 S 无圈知此时途径 P_1' 必为 S 中的路．从而 P_1' 与 P_2 为 S 中的同始同终路，故有 $\mathrm{sgn}P_1'=\mathrm{sgn}P_2$. 进而有 $\mathrm{sgn}P_1=\mathrm{sgn}P_2$. 所以 S_1 仍然是 S^2NS 带号有向图，这与 S 的极大性矛盾.

故 S 是传递有向图.

在本文中, 以下设 A 为具有 (3.1) 形式的 (对角元全为负的下三角) 符号矩阵, 记 $E(S(A))=E$, $V=\{1,2,\cdots,n\}$. 记 $V\times V$ 的子集 L 为:

$$L=\{(i,j)\in V\times V\mid i>j\},\tag{3.2}$$

因 A 为下三角矩阵，故显然有 $E\subseteq L$. 令

$$L'=L\backslash E.\tag{3.3}$$

显然，若 A 是 (3.1) 型的 n 阶极大 S^2NS 阵，且 $N(A)\in Z_4(n)$, 则 $|E|+n\in Z_4(n)$, 故 $|E|\geq\frac{1}{2}n(n-1)+4-n$. 于是有

$$|L'|=|L|-|E|\leq\frac{1}{2}n(n-1)-(\frac{1}{2}n(n-1)+4-n)=n-4.$$

对任意给定的 $1\leq j<i\leq n$, 再定义 $V\times V$ 的若干子集如下:

$$E_{ij}(w)=\{(i,w),(w,j)\};\quad E'_{ij}(w)=E_{ij}(w)\backslash E;$$
$$E_{ij}=\bigcup_{j<w<i}E_{ij}(w);\quad E'_{ij}=E_{ij}\backslash E.$$

又定义

$$F_{ij}(w)=\{(w,i),(w,j)\};\quad F'_{ij}(w)=F_{ij}(w)\backslash E;$$

$$F_{ij}=\bigcup_{i<w\le n}F_{ij}(w);\quad F'_{ij}=F_{ij}\backslash E$$

及

$$H_{ij}(w)=\{(i,w),(j,w)\};\quad H'_{ij}(w)=H_{ij}(w)\backslash E;$$
$$H_{ij}=\bigcup_{1\le w<j}H_{ij}(w);\quad H'_{ij}=H_{ij}\backslash E.$$

则由定义易见集合 E_{ij}, F_{ij} 和 H_{ij} 都是 L 的子集，且 E_{ij}, F_{ij} 和 H_{ij} 为两两不交.

引理 3.3 设 $n\ge 5$, A 是 (3.1) 型的 (对角元全为负的下三角)n 阶极大 S^2NS 阵，且 $S(A)$ 中存在两点 u,v, $1\le v<u\le n$, $(u,v)\notin E(S(A))=E$, 则 $|E'_{uv}|\ge u-v-1$.

证明 因为点 u 到点 v 无弧，从而由引理 3.2 知点 u 到 v 无路. 故对满足 $v<w<u$ 的任一点 w, 点 u 到点 w 和点 w 到点 v 不能都有弧相连，即 $E'_{uv}(w)=E_{uv}(w)\backslash E\ne\phi$. 从而

$$|E'_{uv}|=\sum_{v<w<u}|E'_{uv}(w)|\ge u-v-1.$$

设 $n\ge 5$, A 是 (3.1) 型的 (对角元全为负的下三角)n 阶极大 S^2NS 阵，且 $S(A)$ 中存在两点 u,v, $1\le v<u\le n$, $(u,v)\notin E$. 现定义 V 中两个点集合 R_{uv},Q_{uv}(简记为 R,Q) 如下：

$$R=\{x\mid x\in V,\ (x,u)\in E \text{ 且 } (x,v)\in E\};\quad Q=\{y\mid y\in V,\ (u,y)\in E \text{ 且 } (v,y)\in E\}.$$

再定义 V 中四个点集合 R_1,R_{-1},Q_1,Q_{-1} 如下：

$$R_1=\{x|x\in R,\ \mathrm{sgn}(x,u)\mathrm{sgn}(x,v)=1\};\quad R_{-1}=\{x|x\in R,\ \mathrm{sgn}(x,u)\mathrm{sgn}(x,v)=-1\};$$
$$Q_1=\{y|y\in Q,\ \mathrm{sgn}(u,y)\mathrm{sgn}(v,y)=1\};\quad Q_{-1}=\{y|y\in Q,\ \mathrm{sgn}(u,y)\mathrm{sgn}(v,y)=-1\}.$$

则 $R_1\cup R_{-1}=R$, $R_1\cap R_{-1}=\phi$; $Q_1\cup Q_{-1}=Q$, $Q_1\cap Q_{-1}=\phi$. 显然，当 A 为 S^2NS 阵时， R_1 与 Q_{-1} 不能同时非空， R_{-1} 与 Q_1 也不能同时非空. 否则 $S(A)$ 中存在点 $x\in R_1$(或 R_{-1}) 到点 $y\in Q_{-1}$(或 Q_1) 的同始同终异号路，矛盾.

引理 3.4 设 $n\ge 5$, A 是 (3.1) 型的 (对角元全为负的下三角)n 阶极大 S^2NS 阵， $S(A)$ 中存在两点 u,v, $1\le v<u\le n$, $(u,v)\notin E$, 且 R, R_1, R_{-1}, Q, Q_1, Q_{-1} 如上所定义，则下列情形之一成立：

1) $R_1\ne\phi$ 且 $R_{-1}\ne\phi$ (此时必有 $Q=\phi$);

2) $Q_1\ne\phi$ 且 $Q_{-1}\ne\phi$ (此时必有 $R=\phi$).

证明 首先用反证法证明如下的结论 $(\star)$ 成立，即有

结论 $(\star)$: $R_{-1}=\phi$ 与 $Q_{-1}=\phi$ 不能同时成立，且 $R_1=\phi$ 与 $Q_1=\phi$ 不能同时成立.

情形 1. 若 $R_{-1}=\phi$ 与 $Q_{-1}=\phi$ 同时成立. 此时要推出 A 不是极大 S^2NS 阵，从而导出矛盾.

显然，此时有 $R_1=R$, $Q_1=Q$. 由已知条件知 $S(A)$(以下简记为 S) 中有两点 u,v, $1\le v<u\le n$, 而 $(u,v)\notin E$. 给 S 添弧 (u,v), 并赋号使 $\mathrm{sgn}(u,v)=1$, 记所得的带号有向图为 S_1. 因 $u>v$, 故易见 S_1 仍无圈. 下面证明 S_1 中所有同始同终路仍然同号，即证明对 S_1 中的任意两点 x,y, 若 P_1,P_2 是点 x 到 y 的任意一对路，则 $\mathrm{sgn}P_1=\mathrm{sgn}P_2$.

子情形 1.1. 若 P_1,P_2 都在 S 内，则显然有 $\mathrm{sgn}P_1=\mathrm{sgn}P_2$.

子情形 1.2. 若 P_1, P_2 中至少有一条路经过了弧 (u,v).

若 P_1, P_2 都经过了弧 (u,v), 此时 P_1, P_2 均由 S 中点 x 到点 u 的路、新弧 (u,v) 与 S 中点 v 到点 y 的路所构成. 则由 S 中所有同始同终路同号可得 $\mathrm{sgn}P_1 = \mathrm{sgn}P_2$.

否则，不妨设仅有 P_1 经过了弧 (u,v), 此时必有 $P_1 = P(x \to u) \cup \{(u,v)\} \cup P(v \to y)$, 其中 $x \geq u, y \leq v$. 易见 $x = u$, $y = v$ 不能同时成立 (否则 P_2 为 S 中点 u 到点 v 的路，再由引理 3.2 知 S 为传递有向图，从而 S 中必有点 u 到点 v 的弧，这与题设 $(u,v) \notin E$ 矛盾).

子情形 1.2.1. 若 $x \in R_1$.

则 S 中有点 x 到 y 的如下一条路 $P_3 = (x,v) \cup (vP_1y)$. 由 $x \in R_1$ 及 $\mathrm{sgn}(u,v) = 1$, 可知 $\mathrm{sgn}P_1 = \mathrm{sgn}P_3$. 又由 P_2, P_3 均为 S 中 x 到 y 的路可得 $\mathrm{sgn}P_2 = \mathrm{sgn}P_3$. 从而 $\mathrm{sgn}P_1 = \mathrm{sgn}P_2$.

子情形 1.2.2. 若 $y \in Q_1$. 则与子情形 1.2.1 类似地可得 $\mathrm{sgn}P_1 = \mathrm{sgn}P_2$.

子情形 1.2.3. 若 $x \notin R_1 = R$, $y \notin Q_1 = Q$, 且 $x = u$. 则由前述知此时必有 $y \neq v$.

此时 $P_1 = \{(u,v)\} \cup P(v \to y)$. 由 P_2 是 S 中点 u 到点 y 的路及 S 是传递有向图可知 $(u,y) \in E$, 同理由 vP_1y 是 S 中点 v 到点 y 的路可得 $(v,y) \in E$. 故 $y \in Q$. 这与题设 $y \notin Q_1 = Q$ 矛盾. 故本子情形不能出现.

子情形 1.2.4. 若 $x \notin R_1 = R$, $y \notin Q_1 = Q$, 且 $y = v$. 则必有 $x \neq u$.

则与子情形 1.2.3 类似可知本子情形也不能出现.

子情形 1.2.5. 若 $x \notin R_1 = R$, $y \notin Q_1 = Q$, 且 $x \neq u$, $y \neq v$.

因为路 xP_1u 与路 vP_1y 都是 P_1 上的有向路，进而也是 S 中的有向路，故 S 中没有点 x 到点 v 的路 (与弧) 且没有点 u 到点 y 的路 (与弧). 从而由引理 3.3 知

$$|E'_{xv}| \geq x - v - 1, \quad |E'_{uy}| \geq u - y - 1.$$

又由 $1 \leq y < v < u < x \leq n$ 知 $E_{xv} \cap E_{uy} = \{(u,v)\}$, 且 $(u,v) \notin E$, 从而 $E'_{xv} \cap E'_{uy} = \{(u,v)\}$, 即 $|E'_{xv} \cap E'_{uy}| = 1$. 故 $|E'_{xv} \cup E'_{uy}| = |E'_{xv}| + |E'_{uy}| - 1 \geq (x-v-1) + (u-y-1) - 1 = x + u - v - y - 3$.

以下分三个子情形来讨论.

子情形 1.2.5.1. 若存在某点 a 到点 x, u, v 同时有弧，则 $a \in R = R_1$. 从而由子情形 1.2.1 可知 S_1 中点 a 到点 y 的所有同始同终路都同号. 令 $P'_i = (a,x) \cup P_i$, $i = 1, 2$. 由 $\mathrm{sgn}P'_1 = \mathrm{sgn}P'_2$ 可得 $\mathrm{sgn}P_1 = \mathrm{sgn}P_2$.

子情形 1.2.5.2. 若存在某点 b, 点 u, v, y 到点 b 同时有弧，则 $b \in Q = Q_1$. 类似子情形 1.2.5.1 的证明同样可得 $\mathrm{sgn}P_1 = \mathrm{sgn}P_2$.

子情形 1.2.5.3. 上面两种情形都不成立. 即对任意 $a > x, b < y$, 点 a 到点 x, u, v 不能同时有弧，且点 u, v, y 不能同时到点 b 有弧. 此时令

$$\begin{aligned} F_{xuv}(a) &= \{(a,x), (a,u), (a,v)\}; \quad F'_{xuv}(a) = F_{xuv}(a) \backslash E; \\ F_{xuv} &= \bigcup_{x < a \leq n} F_{xuv}(a); \quad F'_{xuv} = F_{xuv} \backslash E. \end{aligned}$$

又令

$$\begin{aligned} H_{uvy}(b) &= \{(u,b), (v,b), (y,b)\}; \quad H'_{uvy}(b) = H_{uvy}(b) \backslash E; \\ H_{uvy} &= \bigcup_{1 \leq b < y} H_{uvy}(b); \quad H'_{uvy} = H_{uvy} \backslash E. \end{aligned}$$

则对任意的 $x < a \le n$ 与 $1 \le b < y$, 有 $|F'_{xuv}(a)| \ge 1$ 且 $|H'_{uvy}(b)| \ge 1$. 从而

$$|F'_{xuv}| = \sum_{x<a\le n} |F'_{xuv}(a)| \ge n - x,$$

且

$$|H'_{uvy}| = \sum_{1\le b<y} |H'_{uvy}(b)| \ge y - 1.$$

显然 F_{xuv} 与 E_{xv}, E_{uy}, H_{uvy} 交集为空, H_{uvy} 与 E_{xv}, E_{uy}, F_{xuv} 的交集为空. 且 F'_{xuv}, H'_{uvy}, E'_{xv}, $E'_{uy} \subseteq L'$. 所以

$$\begin{aligned}|L'| &\ge |F'_{xuv} \cup H'_{uvy} \cup E'_{xv} \cup E'_{uy}| = |F'_{xuv}| + |H'_{uvy}| + |E'_{xv} \cup E'_{uy}| \\ &\ge (n-x) + (y-1) + (x+u-v-y-3) = n+u-v-4 \\ &> n-4.\end{aligned}$$

这与 $|L'| \le n-4$ 矛盾. 故本子情形不能出现.

综上, 总有 $\mathrm{sgn}P_1 = \mathrm{sgn}P_2$, 从而 $S_1 = S \cup \{(u,v)\}$ 仍是 S^2NS 带号有向图, 即 S 不是极大 S^2NS 带号有向图. 再由 A 的对角元全负可知 A 不是极大 S^2NS 阵, 这与题设矛盾.

情形 2. 若 $R_1 = \phi$ 与 $Q_1 = \phi$ 同时成立. 则与情形 1 类似可得矛盾.

综上情形 1,2 知结论 $(\star)$ 成立.

此时, 若 $R_{-1} \ne \phi$, 由于 R_{-1} 与 Q_1 不能同时非空可知必有 $Q_1 = \phi$. 再由结论 $(\star)$ 知 $R_1 = \phi$ 与 $Q_1 = \phi$ 不能同时成立可得 $R_1 \ne \phi$, 即 1) 成立.

同理, 若 $Q_{-1} \ne \phi$ 可得 $Q_1 \ne \phi$, 即 2) 成立. □

定理 3.1 设 $n \ge 5$, $Z_4(n) = \{\frac{1}{2}(n-1)n+4, \cdots, \frac{1}{2}n(n+1)-1\}$, $\mathcal{S}(n)$ 表示所有 n 阶极大 S^2NS 阵的非零元个数所成之集, 则 $Z_4(n) \cap \mathcal{S}(n) = \phi$ 即对任意的 n 阶极大 S^2NS 阵 A, 其非零元个数 $N(A) \notin Z_4(n)$.

证明 (反证法). 若存在 n 阶极大 S^2NS 阵 A, 使 $N(A) \in Z_4(n)$, 令 k 为 A 的完全不可分分支个数, 则由引理 3.1 知 $k = n$. 不妨假设 A 已是 (3.1) 型的 (对角元全为负的下三角) 符号矩阵, 则 $S(A)$ 是传递有向图. 由 $N(A) \in Z_4(n)$ 可得 $N(A) < \frac{1}{2}n(n+1)$, 故在 $S(A)$ 中 (以下简记为 S) 存在两点 u, v $(1 \le v < u \le n)$, 使得 $(u,v) \notin E$. 从而可如上文定义 V 中的点集合 $R, R_1, R_{-1}, Q, Q_1, Q_{-1}$, 再由引理 3.4 的结论可分以下两种情形来讨论.

情形 1. $R_1 \ne \phi$ 且 $R_{-1} \ne \phi$ (此时 $Q = \phi$).

此时存在点 $s \in R_1, t \in R_{-1}$, 使下式成立:

$$\mathrm{sgn}(s,u)\mathrm{sgn}(s,v)\mathrm{sgn}(t,u)\mathrm{sgn}(t,v) < 0. \tag{3.4}$$

结论 $(\star\star)$: 集合 R_1 与集合 R_{-1} 中的点在 S 中没有路相连.

否则不妨设 S 中点 t 到点 s 有路, 则由 S 是传递有向图知 $(t,s) \in E$. 从而

$$\begin{aligned}&\mathrm{sgn}(s,u)\mathrm{sgn}(s,v)\mathrm{sgn}(t,u)\mathrm{sgn}(t,v) \\ &\quad = \mathrm{sgn}(s,u)\mathrm{sgn}(s,v)[\mathrm{sgn}(t,s)\mathrm{sgn}(s,u)][\mathrm{sgn}(t,s)\mathrm{sgn}(s,v)] \\ &\quad = (\mathrm{sgn}(t,s))^2(\mathrm{sgn}(s,u))^2(\mathrm{sgn}(s,v))^2 > 0,\end{aligned} \tag{3.5}$$

这与 (3.4) 式矛盾.

不妨设 $s=\min\{x|x\in R_1\}$, $t=\max\{x|x\in R_{-1}\}$, 则 s,t 满足 (3.4) 式. 不失一般性，不妨设 $s<t$ ($s>t$ 时证明类似), 从而由结论 ($\star\star$) 知点 t 到点 s 无路. 由引理 3.3 知对任意 $s<w<t$, 有 $|E'_{ts}(w)|\geq 1$, 从而有

$$|E'_{ts}|=\sum_{s<w<t}|E'_{ts}(w)|\geq t-s-1. \tag{3.6}$$

同上理，因 $(u,v)\notin E$, 则由引理 3.3 得

$$|E'_{uv}|=\sum_{v<w<u}|E'_{uv}(w)|\geq u-v-1. \tag{3.7}$$

现在考察点 $u,v(1\leq v<u\leq n$, 且 $(u,v)\notin E)$ 到满足 $1\leq w<v$ 的任一点 w 能否都有弧相连. 显然由于 $Q=\phi$ 可知点 u,v 不能到点 w 都有弧，故

$$|H'_{uv}|=\sum_{1\leq w<v}|H'_{uv}(w)|\geq v-1. \tag{3.8}$$

接下来考察对 s,u 之间的任一点 q ($u<q<s$), s 到 q, q 到 u, q 到 v 能否都有弧. 此时令

$$K_{suv}(q)=\{(s,q),(q,u),(q,v)\};\quad K'_{suv}(q)=K_{suv}(q)\backslash E;$$
$$K_{suv}=\bigcup_{u<q<s}K_{suv}(q);\quad K'_{suv}=K_{suv}\backslash E.$$

若存在点 q ($u<q<s$), 使 $q\in R$(即 q 到 u, q 到 v 都有弧) 且点 s 到 q 有弧，则由 S 中的同始同终路均同号可知

$$\mathrm{sgn}(s,u)\mathrm{sgn}(s,q)\mathrm{sgn}(q,u)>0,$$

且

$$\mathrm{sgn}(s,v)\mathrm{sgn}(s,q)\mathrm{sgn}(q,v)>0.$$

从而由 $s\in R_1$ 可得

$$\mathrm{sgn}(q,u)\mathrm{sgn}(q,v)=(\mathrm{sgn}(s,q))^2\mathrm{sgn}(s,u)\mathrm{sgn}(s,v)=1.$$

故 $q\in R_1$, 这与 s 的极小性矛盾. 因此 (s,q), (q,u), (q,v) 不能同时在弧集合 E 中, 即 $K'_{suv}(q)\neq\phi$. 从而

$$|K'_{suv}|=\sum_{u<q<s}|K'_{suv}(q)|\geq s-u-1. \tag{3.9}$$

最后考察点 $w(t<w\leq n)$ 到 t 能否有弧. 若令

$$E_t=\bigcup_{t<w\leq n}\{(w,t)\}.$$

则显然有

$$|E_t|=n-t. \tag{3.10}$$

若存在某点 $w(t < w \le n)$, 使得 $(w,t) \in E$, 则由 $t \in R_{-1}$ 及 S 为传递有向图可得 $w \in R_{-1}$. 这与 t 的极大性矛盾. 所以对任意 $w(t < w \le n)$, 都有 $(w,t) \notin E$. 故 $E_t \subseteq L'$.

由定义可知, E'_{ts}, E'_{uv}, H'_{uv}, K'_{suv}, E_t 和 $\{(t,s),(u,v)\}$ 两两不交. 又由结论 $(\star\star)$ 知 $(t,s) \notin E$, 且由假设知 $(u,v) \notin E$, 从而由式 (3.6)–(3.10) 可得:

$$\begin{aligned}|L'| &\ge |E'_{ts} \cup E'_{uv} \cup H'_{uv} \cup K'_{suv} \cup E_t \cup \{(t,s),(u,v)\}|\\ &= |E'_{ts}| + |E'_{uv}| + |H'_{uv}| + |K'_{suv}| + |E_t| + |\{(t,s),(u,v)\}|\\ &\ge (t-s-1) + (u-v-1) + (v-1) + (s-u-1) + (n-t) + 2\\ &= n-2 > n-4.\end{aligned}$$

这与 $|L'| \le n-4$ 矛盾.

情形 2. $Q_1 \ne \phi$ 且 $Q_{-1} \ne \phi$(此时 $R = \phi$). 此时考虑图 S 的逆向图 $\mathrm{Rev}(S)$ 即可. 在 $\mathrm{Rev}(S)$ 中, 此情形的条件恰好满足 S 中情形 1 的条件. 从而由情形 1 的结论及逆向图的性质知可导致矛盾.

从而综合情形 1,2 知 $Z_4(n) \cap \mathcal{S}(n) = \phi$. □

参考文献:

[1] 尤利华, 邵嘉裕. 极大 S^2NS 阵的分支数与非零元个数 [J]. 高校应用数学学报, 2005, 20(4):424–440.
YOU Li-hua, SHAO Jia-yu. *A note on the numbers of nonzero entries of maximal S^2NS matrices* [J]. Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A, 2005, 20(4): 424–440. (in Chinese)

[2] LIU Bo-lian, LAI Hong-jian. *Matrices in Combinatorics and Graph Theory* [M]. Kluwer Academic, 2000.

[3] BRUALDI R A, CHAVEY K L, SHADER B L. *Bipartite graphs and inverse sign patterns of strong sign-nonsingular matrices* [J]. J. Combin. Theory Ser. B, 1994, **62**: 133–150.

[4] BRUALDI R A, SHADER B L. *Matrices of Sign-Solvable Linear Systems* [M]. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[5] SHAO Jia-yu, HE Jin-ling, SHAN Hai-ying. *Number of nonzero entries of S^2NS matrices and matrices with signed generalized inverses* [J]. Linear Algebra Appl., 2003, **373**: 223–239.

[6] BASSETT L, MAYBEE J, QUIRK J. *Qualitative economics and the scope of the correspondence principle* [J]. Econometrica, 1968, **36**: 544–563.

[7] THOMASSEN C. *When the sign pattern of a square matrix determines uniquely the sign pattern of its inverse* [J]. Linear Algebra Appl., 1989, **119**: 27–34.

[8] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Applications* [M]. Macmillan Press, New York, 1976.

A Note on the Numbers of Nonzero Entries of Maximal S^2NS Matrices

YOU Li-hua[1], *SHAO Jia-yu*[2]

(1. Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China;
2. Department of Applied Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A square real matrix A is called an S^2NS matrix, if every matrix with the same sign pattern as A is invertible, and the inverses of all such matrices have the same sign pattern. A matrix A is called a maximal S^2NS matrix, if A is an S^2NS matrix, but each matrix obtained from A by replacing one zero entry by a nonzero entry is not a S^2NS matrix. Let $\mathcal{S}(n)$ be the set of numbers of nonzero entries of maximal S^2NS matrices with order n (≥ 5), and $Z_4(n) = \{\frac{1}{2}n(n-1)+4, \cdots, \frac{1}{2}n(n+1)-1\}$. We know that $\mathcal{S}(n)$ has been described except for the numbers between $2n+1$ and $3n-4$ and the numbers in $Z_4(n)$. We prove $Z_4(n) \cap \mathcal{S}(n) = \phi$ by graphic method in this paper.

Key words: sign; maximal; S^2NS; matrices; digraphs.