第27卷第1期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.1
2007年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)01-0145-12 **文献标识码**: **A**

单位球上不同 Privalov 空间之间的复合算子

李 颂 孝 [1,2]
(1. 汕头大学数学系，广东 汕头 515063; 2. 嘉应学院数学系，广东 梅州 514015)
(E-mail: jyulsx@163.com)

摘 要: 利用 η-Carleson 测度给出了单位球上不同 Privalov 以及不同加权 Bergman-Privalov 空间之间的复合算子是度量有界或度量紧的充要条件，并给出了一些函数理论方面的刻画.

关键词: Privalov 空间; η-Carleson 测度; 复合算子.
MSC(2000): 32A35; 47B35
中图分类: O174.56

1 引 言

设 $n\geq 1$ 是一个固定的整数，用 B 与 ∂B 分别表示 $\mathbf{C}^n$ 中的开单位球与单位球面， B 与 ∂B 上正规化的 Lebesgue 测度分别记为 $\mathrm{d}\nu$ 与 $\mathrm{d}\sigma$. 记 $H(B)$ 为 B 上的全体全纯函数所构成的空间. φ 是 B 到自身的一个全纯映照， $f\in H(B)$, 定义 $C_\varphi f(z)=f(\varphi(z))$, 称 C_φ 为由 φ 导出的复合算子.

定义 1 设 $1<p<\infty$, 球上的 Privalov 空间 $N^p(B)$ 定义为

$$N^p(B)=\{f:f\in H(B),\|f\|_{N^p}^p=\sup_{0<r<1}\int_{\partial B}\{\log(1+|f_r|)\}^p\mathrm{d}\sigma<\infty\}.$$

关于 Privalov 空间 $N^p(B)$ 的性质的研究可参见文献 [1], [2].

对于 $-1<\alpha<\infty$, 令 $c_\alpha=\Gamma(n+\alpha+1)/\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)$ 及 $\mathrm{d}\nu_\alpha(z)=c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha\mathrm{d}\nu(z)$. 对于 $1\leq p<\infty$, $-1<\alpha<\infty$, 加权 Bergman 空间定义为

$$A_\alpha^p(B)=\{f\in H(B):||f||_{p,\alpha}^p=\int_B|f(z)|^p\mathrm{d}\nu_\alpha(z)<\infty\}.$$

在范数 $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ 下加权 Bergman 空间 $A_\alpha^p(B)$ 是一个 Banach 空间.

定义 2 设 $1\leq p<\infty$, $-1<\alpha<\infty$, 球上的加权 Bergman-Privalov 空间 $(AN)^p(\nu_\alpha)$ 定义为

$$(AN)^p(\nu_\alpha)=\{f:f\in H(B),\|f\|_{(AN)^p(\nu_\alpha)}^p=\int_B\{\log(1+|f|)\}^p\mathrm{d}\nu_\alpha<\infty\}.$$

关于加权 Bergman-Privalov 空间 $(AN)^p(\nu_\alpha)$ 的性质的研究可参见文献 [1], [3], [4].

对任意一点 $a\in\partial B$, $t>0$, 记 $S(a,t)=\{z\in\overline{B}:|1-<z,a>|<t\}$, $Q(a,t)=S(a,t)\bigcap\partial B$, $P(a,t)=S(a,t)\bigcap B$. 其中 $\sigma(Q(a,t))\approx t^n$[5].

收稿日期: 2005-05-27; **接受日期**: 2006-01-18
基金项目: 国家自然科学基金 (10371051); 浙江省自然科学基金 (102025).

定义 3[6] 设 μ 是 $\overline{B}$ 上的一个正有限 Borel 测度， $1\le\eta<\infty$, 若对 $t>0$, 一致地有

$$\|\mu\|_\eta=\sup_{a\in\partial B}\frac{\mu^{\frac{1}{\eta}}(S(a,t))}{t^n}<\infty,$$

称 μ 是一个 η-Carleson 测度．若对所有 $a\in\partial B$, 一致地有

$$\lim_{t\to0}\frac{\mu^{\frac{1}{\eta}}(S(a,t))}{t^n}=0,$$

称 μ 是一个消没 η-Carleson 测度.

定义 4 设 μ 是 B 上的一个正有限 Borel 测度， $\alpha>-1$, $1\le\eta<\infty$, 若对 $t>0$, 一致地有

$$\|\mu\|_\eta=\sup_{a\in B}\frac{\mu^{\frac{1}{\eta}}(P(a,t))}{t^{n+1+\alpha}}<\infty,$$

称 μ 是一个 η-Carleson 测度．若对所有 $a\in\partial B$, 一致地有

$$\lim_{t\to0}\frac{\mu^{\frac{1}{\eta}}(P(a,t))}{t^{n+1+\alpha}}=0,$$

称 μ 是一个消没 η-Carleson 测度．当 $\eta=1$ 时，上述 η-Carleson 测度和消没 η-Carleson 测度分别称为 Carleson 测度和消没 Carleson 测度．这样定义的 η-Carleson 测度本质上与罗罗和史济怀在文献 [7] 中定义的 η-Carleson 测度在单位球上是等价的，他们利用 η-Carleson 测度研究了有界对称域上不同加权 Bergamn 空间之间的复合算子.

根据文献 [8], 如果存在一个正的常数 K 满足 $\|C_\varphi f\|_{N^q(B)}\le K\|f\|_{N^p(B)}$, 则称 $C_\varphi:N^p(B)\to N^q(B)(p\le q)$ 是度量有界的．如果 C_φ 把每个闭球 $B_R=\{f\in N^p(B):\|f\|_{N^p(B)}\le R\}$ 映入到 $N^q(B)$ 中的相对紧子集，则称 $C_\varphi:N^p(B)\to N^q(B)(p\le q)$ 是度量紧的．当把 $N^q(B)$ 换成 $(AN)^q(\nu_\alpha)$, $N^p(B)$ 换成 $(AN)^p(\nu_\beta)$ 时，可以类似地定义不同加权 Bergman-Privalov 空间之间的复合算子的度量有界性及度量紧性.

MacCluer 在文献 [9] 中研究了单位球上 Hardy 空间之间的复合算子的有界性及紧性；罗罗与史济怀在文献 [6] 中利用 $\eta-$Carleson 测度研究了单位球上不同 Hardy 空间之间的复合算子， Ueki 在文献 [10] 中已经利用 Carleson 测度和消没 Carleson 测度研究了 $C_\varphi:N^p(B)\to N^q(B)(p=q)$ 以及 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^p(\nu_\alpha)$ 的度量有界以及度量紧性．本文将利用 η-Carleson 测度来刻画单位球上不同 Privalov 空间之间以及不同加权 Bergman-Privalov 空间之间的复合算子的度量有界性及度量紧性.

本文证明了下列断言的等价性:

(i) $C_\varphi:N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$ 是一个度量有界 (度量紧) 复合算子;

(ii) $C_\varphi:H^p(B)\to H^{\eta p}(B)$ 是一个有界 (紧) 复合算子;

(iii) $\mu=\sigma\circ\varphi^{*-1}$ 是一个 η-Carleson 测度 (消没 η-Carleson 测度).

以及下列断言的等价性:

(i) $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$ 是一个度量有界 (度量紧) 复合算子;

(ii) $C_\varphi:A^p_\alpha(B)\to A^{\eta p}_\beta(B)$ 是一个有界 (紧) 复合算子;

(iii) $\mu=\mathrm{d}\nu_\beta\circ\varphi^{-1}$ 是一个 η-Carleson 测度 (消没 η-Carleson 测度).

最后，还得到了加权 Bergman-Privalov 空间上复合算子 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^p(\nu_\alpha)$ 度量有界性及度量紧性函数理论方面的刻画．在整篇文章中，符号 C 代表常数，并且在不同的地方可以不同．

2 复合算子 $C_\varphi: N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$

在这一节中，将刻画复合算子 $C_\varphi: N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$. 关于测度 σ, 对几乎处处点 $a\in\partial B$, 有 $\varphi^*(a)=\lim_{r\to 1}\varphi(ra)$ 存在, 因此可以认为 φ 是 $\overline{B}$ 到 $\overline{B}$ 的一个映照. 本文仍然用 φ 表示 $\overline{B}$ 到 $\overline{B}$ 的映照，φ^* 表示 ∂B 到 $\overline{B}$ 的映照. 对 $\overline{B}$ 上所有的 Borel 集 E 定义测度 $\mu(E)=\sigma(\varphi^{*-1}(E))$.

在给出定理及其证明之前，先给出如下引理 [6]:

引理 1 设 μ 是 $\overline{B}$ 上的正有限 Borel 测度，$1\le\eta<\infty$, 则下述条件等价：

(i) μ 是一个 η-Carleson 测度；

(ii) 存在常数 C, 对所有 $u\in S^p(B)$, $0<p<\infty$, 有

$$\{\int_{\overline{B}}u^{\eta p}d\mu\}^{\frac{1}{\eta}}\le C\int_{\partial B}u^p\mathrm{d}\sigma.$$

其中 $S^p(B)$ 表示 B 上满足 $\sup_{0<r<1}\int_{\partial B}u^p(rx)\mathrm{d}\sigma(x)<\infty$ 的非负次调和函数 u 的全体；

(iii) 对某个 p, $0<p<\infty$, 上式成立.

命题 2 设 $1<p<\infty$, $1\le\eta<\infty$, μ 是 $\overline{B}$ 上的正有限 Borel 测度, 则 μ 是一个 η-Carleson 测度当且仅当存在常数 C, 对所有的 $f\in N^p(B)$, 满足

$$\{\int_{\overline{B}}\{\log(1+|f^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\}^{\frac{1}{\eta}}\le C\|f\|^p_{N^p(B)}.$$

这里的 f^* 表示 $\overline{B}$ 上的如下定义的函数: 关于测度 σ, 对几乎处处点 $z\in\partial B$, $f^*(z)=\lim_{r\to 1}f(rz)$, 在 B 上，$f^*=f$.

证明 假设 μ 是一个 η-Carleson 测度，由引理 1 知存在常数 C, 对所有 $u\in S^p(B)$ 有

$$\{\int_{\overline{B}}u^{\eta p}\mathrm{d}\mu\}^{\frac{1}{\eta}}\le C\int_{\partial B}u^p\mathrm{d}\sigma.$$

特别地对所有的 $f\in N^p(B)$, 取 $u=\log(1+|f|)$, 则 $u\in S^p(B)$, 从而

$$\{\int_{\overline{B}}\{\log(1+|f^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\}^{\frac{1}{\eta}}\le C\|f\|^p_{N^p(B)}.$$

相反，假设对所有的 $f\in N^p(B)$,

$$\{\int_{\overline{B}}\{\log(1+|f^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\}^{\frac{1}{\eta}}\le C\|f\|^p_{N^p(B)}.$$

考虑函数

$$f_w(z)=\exp\{\frac{1-|w|^2}{(1-<z,w>)^2}\}^{\frac{n}{p}}.$$

其中 $w=(1-t)a$, $0<t<1$, $a\in\partial B$. 利用基本不等式 $\log^+ x\le\log(1+x)\le\log 2+\log^+ x$, 经过计算得 $\|f_w\|^p_{N^p(B)}\le 2^{p-1}\{(\log 2)^p+1\}$[10]. 从而有

$$\begin{aligned}C&\ge\int_{\overline{B}}\{\log(1+|f_w|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\ge\int_{\overline{B}}\{\log^+|f_w|\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\\&=\int_{\overline{B}}\{\log^+\exp[\mathrm{Re}\{\frac{1-|w|^2}{(1-<z,w>)^2}\}^{\frac{n}{p}}]\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\\&=\int_{\overline{B}}\{[\mathrm{Re}^+\{\frac{1-|w|^2}{(1-<z,w>)^2}\}^{\frac{n}{p}}]\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Re}^+(v)=\max\{\mathrm{Re}(v),0\}$ 对于 $v\in\mathbf{C}$.

利用函数 $g(v)=\mathrm{Re}(1+v)^{-\frac{2n}{p}}$ 在 $\mathbf{C}$ 中原点的连续性, 选取 $t_0>0$ 对所有的 $z\in S(a,t_0t)$[10] 满足

$$\mathrm{Re}\{1+\frac{|w|(1-\langle z,a\rangle)}{1-|w|}\}^{-\frac{2n}{p}}>\frac{1}{2}.$$

从而可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\{\frac{1-|w|^2}{(1-\langle z,w\rangle)^2}\}^{\frac{n}{p}}=\{\frac{1-|w|^2}{(1-|w|)^2}\}^{\frac{n}{p}}\times\mathrm{Re}\{\frac{1-|w|}{(1-\langle z,w\rangle)}\}^{\frac{2n}{p}}\\&=\{\frac{1+|w|}{1-|w|}\}^{\frac{n}{p}}\times\mathrm{Re}\{1+\frac{|w|(1-\langle z,a\rangle)}{1-|w|}\}^{-\frac{2n}{p}}>(\frac{2-t}{t})^{\frac{n}{p}}\times\frac{1}{2}>\frac{1}{2t^{\frac{n}{p}}}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}C&\ge\int_{\overline{B}}\{[\mathrm{Re}^+\{\frac{1-|w|^2}{(1-\langle z,w\rangle)^2}\}^{\frac{n}{p}}]\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\ge\int_{S(a,t_0t)}\{[\mathrm{Re}^+\{\frac{1-|w|^2}{(1-\langle z,w\rangle)^2}\}^{\frac{n}{p}}]\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\\&\ge\int_{S(a,t_0t)}\frac{1}{2^{\eta p}t^{n\eta}}\mathrm{d}\mu=\frac{1}{2^{\eta p}t^{n\eta}}\mu(S(a,t_0t)).\end{aligned}$$

也即是对任意的 $a\in\partial B$ 及 $0<t<1$, $t_0>0$ 有 $\mu(S(a,t_0t))\le Ct^{n\eta}$. 从而对任意的 $a\in\partial B$ 及 $0<t<1$ 有

$$\frac{\mu^{\frac{1}{\eta}}(S(a,t))}{t^n}\le C.$$

因此, μ 是一个 η-Carleson 测度.

定理 3 固定 $1<p<\infty$, $1\le\eta<\infty$, φ 是 B 到自身的一个全纯映照, 则 $C_\varphi:N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$ 是一个度量有界复合算子当且仅当 μ 是一个 η-Carleson 测度.

证明 假设 $C_\varphi:N^p\to N^{\eta p}$ 是一个度量有界复合算子, 则存在常数 C 满足对所有的 $f\in N^p(B)$ 有

$$\|C_\varphi f\|^{\eta p}_{N^{\eta p}(B)}\le C\|f\|^p_{N^p(B)}.$$

即是

$$\{\int_{\partial B}\{\log(1+|(f\circ\varphi)^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\sigma\}^{\frac{1}{\eta}}\le C\|f\|^p_{N^p(B)}.$$

由文献 [9] 中的引理 1.6 知道关于测度 σ, 对几乎处处的点 $a\in\partial B$, 有 $(f\circ\varphi)^*(a)=f^*\circ\varphi^*(a)$. 利用 μ 的定义, 得到

$$\int_{\partial B}\{\log(1+|(f\circ\varphi)^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\sigma=\int_{\partial B}\{\log(1+|f^*\circ\varphi^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\sigma=\int_{\overline{B}}\{\log(1+|f^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu.$$

从而

$$\{\int_{\overline{B}}\{\log(1+|f^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\}^{\frac{1}{\eta}}\le C\|f\|^p_{N^p(B)}.$$

因此， μ 是一个 η-Carleson 测度.

相反，假设 μ 是一个 η-Carleson 测度. 由命题 2, 可知对所有的 $f\in N^p$ 存在 C 满足

$$\{\int_{\overline{B}}\{\log(1+|f^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\}^{\frac{1}{\eta}}\le C\|f\|^p_{N^p(B)}.$$

特别地，对 $f\in A(B)=H(B)\bigcap C(\overline{B})$,

$$\begin{aligned}\{\int_{\partial B}(\log(1+|(f\circ\varphi)^*|))^{\eta p}\mathrm{d}\sigma\}^{\frac{1}{\eta}}&=\{\int_{\partial B}(\log(1+|f^*\circ\varphi^*|))^{\eta p}\mathrm{d}\sigma\}^{\frac{1}{\eta}}\\&=\{\int_{\overline{B}}(\log(1+|f^*|))^{\eta p}\mathrm{d}\mu\}^{\frac{1}{\eta}}\le\|f\|^p_{N^p(B)}.\end{aligned}$$

由于 $A(B)$ 在 $N^p(B)$ 中稠密，所以 $C_\varphi:N^p\to N^{\eta p}$ 是一个度量有界复合算子.

引理 4 固定 $1<p<\infty$, $1\le\eta<\infty$ 及 φ 是 B 到自身的一个全纯映照，则复合算子 $C_\varphi:N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$ 是一个度量紧复合算子当且仅当对 $N^p(B)$ 中任一内闭一致收敛于 0 的有界函数列 $\{f_k\}$, 在 $N^{\eta p}(B)$ 中有 $\|C_\varphi f_k\|^{\eta p}_{N^{\eta p}(B)}\to 0\ (k\to\infty)$.

注记 引理 4 的证明过程类似于文献 [6] 中引理 1 的证明，也可以参见文献 [11].

定理 5 固定 $1<p<\infty$, $1\le\eta<\infty$, φ 是 B 到自身的一个全纯映照，则 $C_\varphi:N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$ 是一个度量紧复合算子当且仅当 μ 是一个消没的 η-Carleson 测度.

证明 设 $C_\varphi:N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$ 是度量紧. 用反证法，若 μ 不是一个消没的 η-Caleson 测度，则存在点列 $\{a_j\}\in\partial B$, 一数列 $\{t_j\}$, $t_j>0$ 且当 $j\to\infty$ 时， $t_j\to 0$ 和某个 $\beta>0$, 使得 $\mu^{\frac{1}{\eta}}(S(a_j,t_j))\ge\beta t_j^n$. 考虑函数

$$f_j(z)=(1-|w_j|)\exp\{\frac{1-|w_j|^2}{(1-<z,w_j>)^2}\}^{\frac{n}{p}},$$

其中 $w_j=(1-t_j)a_j$, $0<t_j<1$. 由命题 2 可知 $\|f_j\|^p_{N^p(B)}\le 2^{p-1}\{(\log 2)^p+1\}$[10]. 而且 f_j 在 B 上内闭一致收敛于 0, 所以由引理 4, $\|C_\varphi f_k\|^{\eta p}_{N^{\eta p}(B)}$ 在 $N^{\eta p}(B)$ 中收敛于 0. 正如命题 2 中的证明可知存在 $t_0\in(0,1)$ 满足 $z\in S(a_j,t_0t_j)$ 及 $j\in\mathbf{N}$ 时有

$$\exp\{\mathrm{Re}\{\frac{1-|w_j|^2}{(1-<z,w_j>)^2}\}^{\frac{n}{p}}\}=\{\frac{1-|w_j|^2}{(1-|w_j|)^2}\}^{\frac{n}{p}}\times\mathrm{Re}\{\frac{1-|w_j|}{(1-<z,w_j>)}\}^{\frac{2n}{p}}>\exp(\frac{1}{2t_j^{\frac{n}{p}}}).$$

从而对 $z\in S(a_j,t_0t_j)$ 及 $j\in\mathbf{N}$ 有

$$\log^+|f_j(z)|=\log^+[(1-|w_j|)\exp\{\frac{1-|w_j|^2}{(1-<z,w_j>)^2}\}^{\frac{n}{p}}]>\log^+[t_j\exp(\frac{1}{2t_j^{\frac{n}{p}}})].$$

从而有

$$
\begin{aligned}
&[\log^+[t_j\exp(\frac{1}{2t_j^{\frac{n}{p}}})]]^{\eta p}\mu(S(a_j,t_0t_j))\le\int_{S(a_j,t_0t_j)}\{\log^+|f_j(z)|\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\\
&\le\int_{\overline{B}}\{\log(1+|f_j|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu=\int_{\partial B}\{\log(1+|(f_j\circ\varphi)^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\sigma\\
&\le\liminf_{r\to 1}\int_{\partial B}\{\log(1+|(f_j\circ\varphi)_r|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\sigma=\|f_j\circ\varphi\|^{\eta p}_{N^{\eta p}(B)}.
\end{aligned}
$$

由于 $\lim_{j\to\infty}\|f_j\circ\varphi\|^{\eta p}_{N^{\eta p}(B)}=0$ 及 $\lim_{j\to\infty}t_j^{\eta n}[\log^+[t_j\exp(\frac{1}{2t_j^{\frac{n}{p}}})]]^{\eta p}=\frac{1}{2^{\eta p}}$, 因此

$$
\lim_{j\to\infty}\frac{\mu(S(a_j,t_0t_j))}{t_j^{\eta n}}=0.
$$

从而有

$$
\lim_{j\to\infty}\frac{\mu^{\frac{1}{\eta}}(S(a_j,t_j))}{t_j^{n}}=0.
$$

而这与前面的假设相矛盾，从而 μ 是一个消没的 η-Carleson 测度.

反之,假设 μ 是一个消没的 η-Carleson 测度. 则对任意给定的 $\epsilon>0$, 存在一个 $t_0>0$, 使得对所有 $a\in\partial B$ 和 $t\le t_0$, 一致地有 $\mu^{\frac{1}{\eta}}(S(a,t))\le\epsilon t^n$. 在 B 上定义一个测度 μ', $\mu'(A)=\mu(A\cap R)$, 其中 $R=\overline{B}\setminus(1-t_0)\overline{B}$. 从而由文献 [6] 中定理 4 的证明可知 μ' 是 B 上的一个 η-Carleson 测度，且对所有的 $a\in\partial B$ 和 $t>0$, 有 $\mu'^{\frac{1}{\eta}}(S(a,t))\le C\epsilon t^n$.

设 $\{f_j\}$ 是 $N^p(B)$ 中的一个函数列，满足 $\|f_j\|^p_{N^p}\le M$ 和 f_j 在 B 上内闭一致收敛于 0, 为此只需证明 $\|C_\varphi f_j\|^{\eta p}_{N^{\eta p}(B)}\to 0\ (j\to\infty)$. 由于

$$
\begin{aligned}
&\|f_j\circ\varphi\|^{\eta p}_{N^{\eta p}(B)}=\int_{\partial B}\{\log(1+|(f_j\circ\varphi)^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\sigma=\int_{\partial B}\{\log(1+|f_j^*\circ\varphi^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\sigma\\
&=\int_{\overline{B}}\{\log(1+|f_j^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu=\int_{\overline{B}\setminus(1-t_0)\overline{B}}\{\log(1+|f_j^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu+\\
&\int_{(1-t_0)\overline{B}}\{\log(1+|f_j^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu=\mathrm{I}+\mathrm{II}.
\end{aligned}
$$

一方面，由于 $f_j\in N^p$, 因此

$$
\mathrm{I}=\int_{\overline{B}\setminus(1-t_0)\overline{B}}\{\log(1+|f_j^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu=\int_{\overline{B}}\{\log(1+|f_j^*|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu'\le C\epsilon^\eta\|f_j\|^p_{N^p}\le C\epsilon^\eta M.
$$

另一方面，由于 $\{f_j\}$ 在 $(1-t_0)\overline{B}$ 上一致收敛于 0, 故可以通过选取足够大的 j 使得 $\mathrm{II}=\int_{(1-t_0)\overline{B}}|f_j^*|^{\eta p}\mathrm{d}\mu$ 充分地小，由 ϵ 的任意性，有 $\|C_\varphi f_k\|^{\eta p}_{N^{\eta p}(B)}\to 0(j\to\infty)$, 利用前引理从而 C_φ 是一个度量紧复合算子.

由定理 3 与定理 5 易得如下推论:

推论 6 设 $1\le\eta<\infty$, φ 是 B 到自身的一个全纯映照,

(i) 若对某个 $1<p<\infty$, $C_\varphi:N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$ 是一个度量有界复合算子，则对任意的 $1<p<\infty$ ， $C_\varphi:N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$ 是一个度量有界复合算子;

(ii) 若对某个 $1<p<\infty$, $C_\varphi: N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$ 是一个度量紧复合算子，则对任意的 $1<p<\infty$, $C_\varphi: N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$ 是一个度量紧复合算子.

推论 7 设 $1<p<\infty$, $1\le\eta<\infty$, φ 是 B 到自身的一个全纯映照，

(i) $C_\varphi: N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$ 是一个度量有界复合算子当且仅当 $C_\varphi: H^p(B)\to H^{\eta p}(B)$ 是有界的.

(ii) $C_\varphi: N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$ 是一个度量紧复合算子当且仅当 $C_\varphi: H^p(B)\to H^{\eta p}(B)$ 是紧算子.

证明 结合定理 3 与定理 5 及文 [6] 中的主要结论.

对 $\alpha>1$ 和 $a\in\partial B$, 令 $D_\alpha(a)=\{z:|1-<z,a>|<\frac{1}{2}\alpha(1-|z|^2)\}$. 称 $D_\alpha(a)$ 为 Koranyi 可近区域 [5]. 由文献 [6] 中的定理 5 可得如下结论.

命题 8 设 $1<p<\infty$, $1\le\eta<\infty$, φ 是 B 到自身的一个全纯映照，记 $\alpha_0=(\cos(\frac{\pi}{2n\eta}))^{-1}$.

(i) 若对某个 $a\in\partial B$ 有 $\varphi(B)\subseteq D_\alpha(a)$. 则 $C_\varphi: N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$ 是一个度量有界复合算子.

(ii) 若对某个 $a\in\partial B$ 和某个 $1<\gamma<\alpha_0$, 有 $\varphi(B)\subseteq D_\gamma(a)$. 则 $C_\varphi: N^p(B)\to N^{\eta p}(B)$ 是一个度量紧复合算子.

3 复合算子 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$

在这一节中，设 φ 是 B 到自身的一个全纯映照，对 B 上所有的 Borel 集 E 定义测度 $\mu(E)=\nu_\beta(\varphi^{-1}(E))$. 对任给的 $z,w\in B$, 令 $\varphi_z(w)=\frac{z-P_zw-sQ_zw}{1-\langle w,z\rangle}$, 其中 $P_z(w)$ 表示 w 在 z 张成的线性空间上的投影, 即 $P_0(z)=0$, 当 $z\neq0$ 时，$P_z(w)=\frac{\langle w,z\rangle}{|z|^2}z$, 而 $Q_z=1-P_z$, $s=\sqrt{1-|z|^2}$, 则 φ_z 为 B 上的全纯自同构. 固定 $z\in B$, $0<r<1$, $E(z,r)=\varphi_z(rB)=\{w\in B:\beta(z,w)<r\}$, 其中 β 是球上 Bergman 度量，根据文献 [5] 第 29 页可知

$$E(z,r)=\{w\in B:\frac{|P_zw-c|^2}{(r\rho)^2}+\frac{|w-P_zw|^2}{r^2\rho}<1\},$$

其中 $P_zw=\frac{<w,z>}{|z|^2}z$, $c=\frac{(1-r^2)z}{1-(r|z|)^2}$, $\rho=\frac{1-|z|^2}{1-(r|z|)^2}$.

引理 9[10] 对 $z\in B$, $0<r<1$, 存在 $0<t<1$, $a\in\partial B$ 使得 $E(z,r)\subset P(a,t)$, 而且 $t\sim1-|z|^2$.

引理 10 固定 $1\le p<\infty$, $-1<\alpha,\beta<\infty$, $1\le\eta<\infty$ 及 φ 是 B 到自身的一个全纯映照，则 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$ 是一个度量紧复合算子当且仅当对 $(AN)^p(\nu_\alpha)$ 中任一内闭一致收敛于 0 的有界函数列 $\{f_k\}$, 在 $(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$ 中有 $\|C_\varphi f_k\|^{\eta p}_{(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)}\to0$ $(k\to\infty)$.

注记 引理 10 的证明过程类似于文献 [7] 中定理 3.1 的证明，也可以参见文献 [11], 在此省略详细证明过程.

定理 11 固定 $1\le p<\infty$, $-1<\alpha,\beta<\infty$, $1\le\eta<\infty$, φ 是 B 到自身的一个全纯映照，则 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$ 是一个度量有界复合算子当且仅当 μ 是一个 η-Carleson 测度.

证明 假设 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$ 是一个度量有界复合算子，则存在常数 C 满足对所有的 $f\in(AN)^p(\nu_\alpha)$ 有

$$\|C_\varphi f\|^{\eta p}_{(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)}\le C\|f\|^p_{(AN)^p(\nu_\alpha)}.$$

考虑函数

$$f_w(z)=\exp\{\frac{1-|w|^2}{(1-<z,w>)^2}\}^{\frac{n+1+\alpha}{p}}.$$

其中 $w=(1-t)a$, $0<t<1$, $a\in\partial B$. 易知 $f_w\in A(B)\subset(AN)^p(\nu_\alpha)$ 且由命题 2 的证明过程可知存在常数 C 满足 [10]$\|f_w\|^p_{(AN)^p(\nu_\alpha)}\le C$. 从而类似于命题 2 的证明可得

$$\begin{aligned}C&\ge\int_B\{\log(1+|f_w\circ\varphi|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\nu_\beta=\int_B\{\log(1+|f_w|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\ge\int_B\{\log^+|f_w|\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\\&=\int_B\{\log^+\exp[\mathrm{Re}\{\frac{1-|w|^2}{(1-<z,w>)^2}\}^{\frac{n+1+\alpha}{p}}]\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu=\int_B\{[\mathrm{Re}^+\{\frac{1-|w|^2}{(1-\langle z,w\rangle)^2}\}^{\frac{n+1+\alpha}{p}}]\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\\&\ge\int_{P(a,t_0t)}\{[\mathrm{Re}^+\{\frac{1-|w|^2}{(1-\langle z,w\rangle)^2}\}^{\frac{n+1+\alpha}{p}}]\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu\ge\int_{P(a,t_0t)}\frac{1}{2^{\eta p}t^{(n+1+\alpha)\eta}}\mathrm{d}\mu\\&=\frac{1}{2^{\eta p}t^{(n+1+\alpha)\eta}}\mu(P(a,t_0t)).\end{aligned}$$

即对任意的 $a\in\partial B$, $0<t<1$, $t_0>0$ 有 $\mu^{\frac{1}{\eta}}(P(a,t_0t))\le Ct^{n+1+\alpha}$. 从而对任意的 $a\in\partial B$ 及 $0<t<1$ 有

$$\frac{\mu^{\frac{1}{\eta}}(P(a,t))}{t^{n+1+\alpha}}\le C.$$

因此， μ 是一个 η-Carleson 测度.

相反，假设 μ 是一个 $\eta-$Carleson 测度. 固定 $z\in B$ 与 $1/2<r<1$, 由引理 9 可知存在 $0<t<1$, $a\in\partial B$ 使得

$$E(z,r)\subset P(a,t),\quad t\sim1-|z|^2.$$

由于 $\nu_\alpha(P(a,t))\sim t^{n+1+\alpha}$[12] 及 μ 是一个 η-Carleson 测度可知

$$\frac{\mu^{\frac{1}{\eta}}(E(z,r))}{t^{n+1+\alpha}}\le\frac{\mu^{\frac{1}{\eta}}(P(a,t))}{t^{n+1+\alpha}}\le C.$$

从而 $\mu^{\frac{1}{\eta}}(E(z,r))\le C(1-|z|^2)^{n+1+\alpha}$. 对所有的 $f\in(AN)^p(\nu_\alpha)$, $(\log(1+|f|))^p$ 是非负的 $\mathcal{M}$- 次调和函数，从而由文献 [13] 可知对于 $z\in B$,

$$(\log(1+|f(z)|))^p\le3^n\int_{E(z,\frac12)}(\log(1+|f(w)|))^p\mathrm{d}\lambda(w),$$

其中 $\mathrm{d}\lambda(z)=(1-|z|^2)^{-n-1}\mathrm{d}\nu(z)$. 下面将利用文献 [14] 中引理 2.20, 推论 2.21, 定理 2.23 来完成本定理的证明. 设 $\{a_k\}$ 是文献 [14] 中定理 2.23 中的点列，则一方面有 $\mu^{\frac{1}{\eta}}(E(a_k,r))\le C(1-|a_k|^2)^{n+1+\alpha}$. 另一方面，利用文献 [14] 中引理 2.20, 推论 2.21, 定理 2.23 可得

$$\begin{aligned}\{\int_B[\log(1+|f(z)|)]^{\eta p}\mathrm{d}\mu(z)\}^{\frac{1}{\eta}}&\le\{\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E(a_k,r)}[\log(1+|f(z)|)]^{\eta p}\mathrm{d}\mu(z)\}^{\frac{1}{\eta}}\\&\le\{\sum_{k=1}^{\infty}\sup\{[\log(1+|f(z)|)]^{\eta p}:z\in E(a_k,r)\}\mu(E(a_k,r))\}^{\frac{1}{\eta}}.\end{aligned}$$

利用文献 [14] 中引理 2.20, 存在常数 C 满足对所有的 $k\ge1$ 有

$$\sup\{[\log(1+|f(z)|)]^{\eta p}:z\in E(a_k,r)\}\le\{\frac{C}{(1-|a_k|^2)^{n+1}}\int_{E(a_k,2r)}[\log(1+|f(w)|)]^p\mathrm{d}\nu(w)\}^{\eta}.$$

从而

$$\begin{aligned}&\{\int_B[\log(1+|f(z)|)]^{\eta p}\mathrm{d}\mu(z)\}^{\frac{1}{\eta}}\\ &\le C\{\sum_{k=1}^{\infty}\{\frac{1}{(1-|a_k|^2)^{n+1}}\int_{E(a_k,2r)}[\log(1+|f(w)|)]^p\mathrm{d}\nu(w)\}^{\eta}\mu(E(a_k,r))\}^{\frac{1}{\eta}}.\end{aligned}$$

因此利用不等式 $(a+b)^q\le a^q+b^q(a>0,b>0,0<q<1)$ 可得

$$\begin{aligned}&\{\int_B[\log(1+|f(z)|)]^{\eta p}\mathrm{d}\mu(z)\}^{\frac{1}{\eta}}\\ &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^{\frac{1}{\eta}}(E(a_k,r))}{(1-|a_k|^2)^{n+1}}\int_{E(a_k,2r)}[\log(1+|f(w)|)]^p\mathrm{d}\nu(w)\\ &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^{\frac{1}{\eta}}(E(a_k,r))}{(1-|a_k|^2)^{n+1+\alpha}}\int_{E(a_k,2r)}(1-|w|^2)^{\alpha}[\log(1+|f(w)|)]^p\mathrm{d}\nu(w)\\ &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E(a_k,2r)}(1-|w|^2)^{\alpha}[\log(1+|f(w)|)]^p\mathrm{d}\nu(w)\\ &\le C\int_B[\log(1+|f(w)|)]^p(1-|w|^2)^{\alpha}\mathrm{d}\nu(w)\le C\int_B[\log(1+|f(w)|)]^p\mathrm{d}\nu_{\alpha}(w).\end{aligned}$$

即可知对所有的 $f\in(AN)^p(\nu_\alpha)$ 存在 C 满足

$$\{\int_B\{\log(1+|f(z)|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu(z)\}^{\frac{1}{\eta}}\le C\|f\|^p_{(AN)^p(\nu_\alpha)}.$$

由 μ 的定义，此即 $\|f\circ\varphi\|^{\eta p}_{(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)}\le C\|f\|^p_{(AN)^p(\nu_\alpha)}$. 所以 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$ 是一个度量有界复合算子.

定理 12 固定 $1\le p<\infty$, $1\le\eta<\infty$, $-1<\alpha,\beta<\infty$, φ 是 B 到自身的一个全纯映照，则 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$ 是一个度量紧复合算子当且仅当 μ 是一个消没的 η-Carleson 测度.

证明 假设 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$ 是一个度量紧复合算子. 若 μ 不是一个消没的 η-Caleson 测度，则存在点列 $\{w_j\}\in\partial B$, 一数列 $\{t_j\}$, $t_j>0$ 且当 $j\to\infty$ 时， $t_j\to 0$ 和某个 $\gamma>0$, 使得 $\mu^{\frac{1}{\eta}}(P(w_j,t_j))\ge\gamma t_j^{n+1+\alpha}$. 考虑函数

$$f_j(z)=(1-|a_j|)\exp\{\frac{1-|a_j|^2}{(1-\langle z,a_j\rangle)^2}\}^{\frac{n+1+\alpha}{p}},$$

其中 $a_j=(1-t_j)w_j$. 则 $\|f_j\|_{(AN)^p(\nu_\alpha)}\le C$. 而且 f_j 在 B 上内闭一致收敛于 0, 所以由引理 10, $\|C_\varphi f_k\|^{\eta p}_{(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)}$ 收敛于 0. 正如命题 2 中的证明可知存在 $t_0\in(0,1)$ 满足 $z\in P(w_j,t_0t_j)$ 及 $j\in\mathbf{N}$ 时有

$$\exp\{\mathrm{Re}\{\frac{1-|a_j|^2}{(1-\langle z,a_j\rangle)^2}\}^{\frac{n+1+\alpha}{p}}\}>\exp(\frac{1}{2t_j^{\frac{n+1+\alpha}{p}}}).$$

从而对 $z\in P(w_j,t_0t_j)$ 及 $j\in\mathbf{N}$ 有

$$\log^+|f_j(z)|=\log^+\{(1-|a_j|)\exp\{\frac{1-|a_j|^2}{(1-\langle z,a_j\rangle)^2}\}^{\frac{n+1+\alpha}{p}}\}$$

$$> \log^+[t_j \exp(\frac{1}{2t_j^{\frac{n+1+\alpha}{p}}})].$$

即有

$$\{\log^+[t_j \exp(\frac{1}{2t_j^{\frac{n+1+\alpha}{p}}})]\}^{\eta p}\mu(P(w_j,t_0t_j)) \leq \int_{P(w_j,t_0t_j)}\{\log^+|f_j(z)|\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu$$
$$\leq \int_B\{\log(1+|f_j|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu = \int_B\{\log(1+|(f_j\circ\varphi)|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\nu_\beta = \|f_j\circ\varphi\|^{\eta p}_{(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)}.$$

由于 $\lim_{j\to\infty}\|f_j\circ\varphi\|^{\eta p}_{(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)}=0$ 及

$$\lim_{j\to\infty} t_j^{\eta(n+1+\alpha)}[\log^+[t_j\exp(\frac{1}{2t_j^{\frac{n+1+\alpha}{p}}})]]^{\eta p}=C.$$

因此

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\mu(P(w_j,t_0t_j))}{t_j^{\eta(n+1+\alpha)}}=0.$$

从而

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\mu^{\frac{1}{\eta}}(P(w_j,t_j))}{t_j^{n+1+\alpha}}=0.$$

而这与前面的假设相矛盾, 从而 μ 是一个消没的 η-Carleson 测度.

反之, 假设 μ 是一个消没的 η-Carleson 测度. 则对任意给定的 $\epsilon>0$, 存在一个 $t_0>0$, 使得对所有 $a\in\partial B$ 和 $t\leq t_0$, 一致地有 $\mu^{\frac{1}{\eta}}(P(a,t))\leq\epsilon t^{n+1+\alpha}$. 在 B 上定义一个测度 μ', $\mu'(A)=\mu(A\cap R)$, 其中 $R=B\setminus(1-t_0)\overline{B}$. 从而类似文 [6] 中定理 4 的证明可知 μ' 是 B 上的一个 η-Carleson 测度, 且对所有的 $a\in\partial B$ 和 $t>0$, 有 $\mu'^{\frac{1}{\eta}}(P(a,t))\leq C\epsilon t^{n+1+\alpha}$.

设 $\{f_j\}$ 是 $(AN)^p(\nu_\alpha)$ 中的一个函数列, 满足 $\|f_j\|^p_{(AN)^p(\nu_\alpha)}\leq M$ 和 f_j 在 B 上内闭一致收敛于 0, 为此只需证明 $\|C_\varphi f_j\|^{\eta p}_{(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)}\to 0$ $(j\to\infty)$. 由于

$$\|f_j\circ\varphi\|^{\eta p}_{(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)}=\int_B\{\log(1+|f_j\circ\varphi|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\nu_\beta=\int_B\{\log(1+|f_j\circ\varphi|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\nu_\beta$$
$$=\int_B\{\log(1+|f_j|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu=\int_{B\setminus(1-t_0)\overline{B}}\{\log(1+|f_j|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu+$$
$$\int_{(1-t_0)\overline{B}}\{\log(1+|f_j|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

一方面由于 $f_j\in(AN)^p(\nu_\alpha)$, 因此存在仅依赖于 n 和 α 的常数 C, 使得

$$\mathrm{I}=\int_{B\setminus(1-t_0)\overline{B}}\{\log(1+|f_j|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu=\int_B\{\log(1+|f_j|)\}^{\eta p}\mathrm{d}\mu'$$
$$\leq C\epsilon^\eta\|f_j\|^p_{(AN)^p(\nu_\alpha)}\leq C\epsilon^\eta M.$$

另一方面由于 $\{f_j\}$ 在 $(1-t_0)\overline{B}$ 上一致收敛于 0, 故可以通过选取足够大的 j 使得

$$\mathrm{II}=\int_{(1-t_0)\overline{B}}|f_j|^{\eta p}\mathrm{d}\mu$$

充分地小，由 ϵ 的任意性，有 $\|C_\varphi f_k\|^{\eta p}_{(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)} \to 0 (j\to\infty)$, 从而 C_φ 是一个度量紧复合算子.

推论 13 设 $1\le \eta<\infty$, $-1<\alpha,\beta<\infty$, φ 是 B 到自身的一个全纯映照,

(i) 若对某个 $1\le p<\infty$, $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$ 是一个度量有界复合算子，则对任意的 $1\le p<\infty$, $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$ 是一个度量有界复合算子.

(ii) 若对某个 $1\le p<\infty$, $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$ 是一个度量紧复合算子，则对任意的 $1\le p<\infty$, $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$ 是一个度量紧复合算子.

结合定理 11 与定理 12 及文 [7] 中的结论易得如下推论：

推论 14 设 $1\le p<\infty$, $1\le\eta<\infty$, $-1<\alpha,\beta<\infty$, φ 是 B 到自身的一个全纯映照,

(i) 则 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$ 是一个度量有界复合算子当且仅当 $C_\varphi:A^p_\alpha(B)\to A^{\eta p}_\beta(B)$ 是一个有界复合算子.

(ii) 则 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^{\eta p}(\nu_\beta)$ 是一个度量紧复合算子当且仅当 $C_\varphi:A^p_\alpha(B)\to A^{\eta p}_\beta(B)$ 是一个紧复合算子.

利用上述推论及文献 [15] 中的结论，可以得到复合算子 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^p(\nu_\alpha)$ 函数理论方面的刻画.

命题 15 设 $1\le p<\infty$, $-1<\alpha<\infty$, $t>0$, φ 是 B 到自身的一个全纯映照,

(i) 则 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^p(\nu_\alpha)$ 是一个度量有界复合算子当且仅当

$$\sup_{a\in B}(1-|a|^2)^t\int_B\frac{\mathrm{d}\nu_\alpha(z)}{|1-\langle a,\varphi(z)\rangle|^{n+1+\alpha+t}}\le C.$$

(ii) 则 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^p(\nu_\alpha)$ 是一个度量紧复合算子当且仅当

$$\lim_{|a|\to1}(1-|a|^2)^t\int_B\frac{\mathrm{d}\nu_\alpha(z)}{|1-\langle a,\varphi(z)\rangle|^{n+1+\alpha+t}}=0.$$

证明 结合推论 14 及文献 [15] 中的定理 7 与定理 9 即得.

命题 16 设 $1\le p<\infty$, $-1<\alpha<\infty$, φ 是 B 到自身的一个全纯映照，如果对某些 $q>0$ 及 $-1<\beta<\alpha$, $C_\varphi:(AN)^q(\nu_\beta)\to(AN)^q(\nu_\beta)$ 是一个度量有界复合算子，则 $C_\varphi:(AN)^p(\nu_\alpha)\to(AN)^p(\nu_\alpha)$ 是一个度量紧复合算子当且仅当

$$\lim_{|z|\to1}\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}=0.$$

证明 结合推论 14 及文献 [15] 中的定理 11 即得.

参考文献:

[1] STOLL M. *Mean growth and Taylor coefficients of some topological algebras of analytic functions* [J]. Ann. Polon. Math., 1977, **35**: 139–158.

[2] SUBBOTIN A V. *Functional properties of Privalov spaces of holomorphic functions of several variables* [J]. Math. Notes., 1999, **65**: 230-237.

[3] MATSUGU Y, UEKI S I. *Isometries of weighted Bergman-Privalov spaces on the unit ball of* $\mathbf{C}^n$ [J]. J. Math. Soc. Japan, 2002, **54**: 341–347.

[4] XIAO Jie. *Compact composition operators on the area-Nevanlinna class* [J]. Exposition. Math., 1999, **17**: 255–264.

[5] RUDIN W. *Function Theory in the Unit Ball* [M]. New York, Springer-Verlag, 1980.

[6] 罗罗，史济怀. 单位球上不同 Hardy 空间之间的复合算子 [J]. 数学学报， 2001, **44**(2): 206–219.
LUO Luo, SHI Ji-huai, *Composition operator between different Hardy space on the unit ball* [J]. Acta Math. Sinica, 2001, **44**(2): 206–219. (in Chinese)
[7] 罗罗，史济怀. $\mathbf{C}^n$ 中有界对称域不同加权 Bergman 空间之间的复合算子 [J], 数学年刊 (A 辑), 2000, **21**(1): 45–52.
LUO Luo, SHI Ji-huai. *Composition operator between different weighted Bergman space on the bounded symmetric domains* [J]. Chinese Ann. Math., Ser. A, 2000, **21**(1): 45–52. (in Chinese)
[8] CHOA J S, KIM H O. *Composition operators between Nevanlinna-type spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2001, **257**: 378–402.
[9] MACCLUER B D. *Compact composition operators on $H^p(B)$* [J]. Analysis, 1984, **4**: 87–103.
[10] UEKI S I. *Composition operators on the Privalov spaces on the unit ball of $\mathbf{C}^n$* [J], J. Korean Math. Soc., 2005, **42**(1): 111–127.
[11] COWEN C C, MACCLUER B D. *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions* [M]. CRC Press, Boca Raton, New York, 1995.
[12] MACCLUER B D, SHAPIRO J H. *Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces* [J]. Canad. J. Math., 1996, **38**: 878–906.
[13] STOLL M. *Invariant Potential Theory in the Unit Ball of $\mathbf{C}^n$* [M]. Cambridge Univ. Press, 1994.
[14] ZHU Ke-he. *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball* [M]. Springer-Verlag, New York, 2005.
[15] ZHU Ke-he. *Compact composition operators on Bergman spaces of the Unit Ball* [J]. Houston J. Math., 2007, **33**(1): 273–283.

Composition Operators Between Different Privalov Spaces on the Unit Ball

LI Song-xiao[1,2]
(1. Deptartment of Mathematics., Shantou University, Guangdong 515063, China;
2. Department of Mathematics, Jiaying University, Guangdong 514015, China)

Abstract: Some sufficient and necessary conditions for the composition operators between different Privalov spaces and different weighted Bergman-Privalov spaces to be metrically bounded or metrically compact are given by using η-Carleson measure, and some function theoretic characterizations are also given.

Key words: Privalov space; η-Carleson measure; composition operator.