第27卷第1期 数学研究与评论 Vol.27, No.1
2007年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)01-0195-06 **文献标识码**: **A**

余辛流形的半不变子流形的 Ricci 曲率

王爱齐 [1], 刘西民 [2]
(1. 大连交通大学数理系, 辽宁 大连 116028; 2. 大连理工大学应用数学系, 辽宁 大连 116024)
(E-mail: ximin_dl@163.com)

摘 要: 本文研究了余辛流形的半不变子流形, 得到了这类子流形的 Ricci 曲率与平均曲率平方之间的一个不等式, 并讨论了等式成立的充分必要条件.

关键词: 余辛流形; 半不变子流形; Ricci 曲率; 平均曲率.
MSC(2000): 53C40; 53C15
中图分类: O186.1

1 引 言

建立子流形上主要的内蕴不变量与主要的外蕴不变量之间的简单关系是子流形理论中一个重要而有意义的研究内容.

在 [1] 中, B.Y. Chen 证明复空间形式 $\tilde{M}^m(c)$ 的子流形 M^n 上的 Ricci 张量 S 满足 $S \leq ((n-1)+\frac{n^2}{4}\|H\|^2)g$, 并且等号成立的充要条件是 M^n 是全测地子流形或 $n=2, M^n$ 是全脐子流形.

在 [2] 中, B.Y. Chen 又证明复空间形式 $\tilde{M}^m(4c)$ 的迷向子流形上的 Ricci 曲率满足 $\mathrm{Ric} \leq (n-1)c+\frac{n^2}{4}\|H\|^2$.

后来, 许多作者将 Chen 不等式推广到其它类型的空间上.

而余辛流形是一类重要的殆切触度量流形. D.E. Blair 在论著 [3] 中详细介绍了殆切触流形. 上世纪七八十年代, 许多作者对殆切触流形进行了研究, 得到了许多有意义的结果, 使其几何结构和拓扑性质得到了进一步丰富. 本文主要是将 Chen 不等式的一些结果推广到余辛流形的半不变子流形上, 得到其上的 Ricci 曲率与平均曲率平方之间的一个不等式, 并讨论了等号成立时所满足的条件.

2 预备知识

设 $(\tilde{M}, g)$ 是 $(2m+1)$ 维黎曼流形, 记 φ 是 $\tilde{M}$ 上的 (1,1) 型张量场, ξ 是单位向量场 (结构向量场), η 是 1- 形式. 若对 $\tilde{M}$ 上任意向量场 X, Y, 有

$$\begin{cases} \varphi^2X=-X+\eta(X)\xi,\ \varphi\xi=0,\ \eta\varphi=0,\ \eta(\xi)=1 \\ g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y),\ g(X,\xi)=\eta(X), \end{cases}$$

则称 $\tilde{M}$ 有殆切触度量结构 (φ,ξ,η,g), 并称 $\tilde{M}$ 为殆切触度量流形.

收稿日期: 2004-09-16; **接受日期**: 2005-10-23
基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金 (20050141011)

一个殆切触度量流形是余辛流形 [3], 若对 $\tilde{M}$ 上任意向量场 X,Y, 满足 $(\tilde{\bigtriangledown}_X\varphi)Y=0$, 其中 $\tilde{\bigtriangledown}$ 是黎曼度量 g 的 Levi-Civita 联络.

切向量丛 $T\tilde{M}$ 的一个截面 π 称为 φ- 截面，若 π 是由 X 和 φX 张成，其中 X 是与 ξ 垂直的单位切向量场. 若截面曲率 $\tilde{K}(\pi)$ 不依赖于 φ- 截面 π 与点 $p\in\tilde{M}$ 的选取，即 $\tilde{M}$ 有常 φ- 截面曲率 c, 则称 $\tilde{M}$ 为空间形式. 一个余辛流形 $\tilde{M}$ 有常 φ- 截面曲率 c 当且仅当它的曲率张量 $\tilde{R}$ 满足

$$\begin{aligned}4\tilde{R}(X,Y,Z,W)=&c\{g(X,Z)g(Y,W)-g(X,W)g(Y,Z)+\\&g(X,\varphi Z)g(Y,\varphi W)-g(X,\varphi W)g(Y,\varphi Z)+\\&2g(X,\varphi Y)g(Z,\varphi W)+g(X,W)\eta(Y)\eta(Z)-\\&g(X,Z)\eta(Y)\eta(W)+g(Y,Z)\eta(X)\eta(W)-\\&g(Y,W)\eta(X)\eta(Z)\}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

设 M 是余辛流形 $\tilde{M}$ 的 $(n+1)$ 维子流形，使得向量 $\xi\in TM$, 用相同的符号 g 表示 $\tilde{M}$ 在 M 上诱导的黎曼度量张量， Gauss 公式和 Weigarten 公式分别由下式给出

$$\tilde{\nabla}_XY=\nabla_XY+h(X,Y),\quad \tilde{\nabla}_XV=-A_VX+D_XV,\tag{2.2}$$

对任意 $X,Y\in TM$ 和 $V\in T^{\perp}M$, 其中 $\tilde{\nabla},\nabla$ 和 D 分别是 $\tilde{M}$ 上的黎曼联络、 M 上的诱导联络和 M 的法丛 $T^{\perp}M$ 上的诱导法联络， h 是第二基本形式， h 和 A 之间有下述关系:

$$g(h(X,Y),V)=g(A_VX,Y).$$

记 X,Y,Z,W 是 M 上的任意切向量，则 Gauss 方程由下式给出

$$\tilde{R}(X,Y,Z,W)=R(X,Y,Z,W)+g(h(X,W),h(Y,Z))-g(h(X,Z),h(Y,W)).\tag{2.3}$$

设 $\{e_1\cdots e_{n+1}\}$ 是切空间 T_pM 的一组标准正交基，则平均曲率向量 $H(p)$ 为

$$H(p)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}h(e_i,e_i),$$

记

$$h_{ij}^r=g(h(e_i,e_j),e_r),$$

则

$$\|h\|^2=\sum_{i,j=1}^{n+1}g(h(e_i,e_j),h(e_i,e_j)).$$

对于黎曼流形 $\tilde{M}$ 的子流形 M, 在点 $p\in M$ 处， M 的相对零化空间定义为

$$N_p=\{X\in T_pM|h(X,Y)=0,\quad \forall Y\in T_pM\}.$$

3 沿 ξ 方向的 Ricci 曲率

引理 3.1 设 $\tilde{M}$ 是 $(2m+1)$ 维余辛流形，殆切触度量结构为 (φ,ξ,η,g), 那么有 $\tilde{\nabla}_X\xi=0,\ \forall X\in T\tilde{M}$.

证明 由余辛流形的条件知，对任意的切向量场 X,Y, 有 $(\tilde{\nabla}_X\varphi)Y=0$. 从而

$$0=(\tilde{\nabla}_X\varphi)\xi=\tilde{\nabla}_X(\varphi\xi)-\varphi(\tilde{\nabla}_X\xi)=-\varphi(\tilde{\nabla}_X\xi),$$

两边用 φ 作用，得

$$0=\tilde{\nabla}_X\xi-\eta(\tilde{\nabla}_X\xi)\xi. \tag{3.1}$$

而 $\eta(\tilde{\nabla}_X\xi)=g(\tilde{\nabla}_X\xi,\xi)=\tilde{\nabla}_Xg(\xi,\xi)-g(\xi,\tilde{\nabla}_X\xi)=-g(\xi,\tilde{\nabla}_X\xi)$, 即 $\eta(\tilde{\nabla}_X\xi)=0$, 故由 (3.1) 式得

$$\tilde{\nabla}_X\xi=0. \tag{3.2}$$

设 M 是余辛流形 $\tilde{M}$ 的 $n+1$ 维子流形，记 $\{e_1,\cdots,e_{n+1}\}$ 是 $T_pM(p\in M)$ 的一组标准正交基，对任意 $X\in T_pM$, 沿 X 方向的 Ricci 曲率定义为

$$\mathrm{Ric}(X)=\sum_{i=1}^{n+1}R(e_i,X,e_i,X)$$

由 (3.2) 及 Gauss 公式 (2.2) 知

$$0=\nabla_X\xi+h(X,\xi),$$

故

$$\nabla_X\xi=0,\quad h(X,\xi)=0,$$

因而沿 ξ 方向的 Ricci 曲率为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(\xi)&=\sum_{i=1}^{n+1}R(e_i,\xi,e_i,\xi)=\sum_{i=1}^{n+1}g(R(e_i,\xi)\xi,e_i)\\&=\sum_{i=1}^{n+1}g(\nabla_{e_i}\nabla_\xi\xi-\nabla_\xi\nabla_{e_i}\xi-\nabla_{[e_i,\xi]}\xi,e_i)=0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

4 半不变子流形的 Ricci 曲率与平均曲率

定义 称子流形 M 是 $\tilde{M}$ 的半不变子流形，若在 M 上存在两个正交分布 D 和 $D^\perp$ 满足：

1) $TM=D\bigoplus D^\perp\bigoplus\{\xi\}$;

2) 分布 D 是 φ- 不变的，即 $\varphi(D_p)=D_p,\forall p\in M$;

3) 分布 $D^\perp$ 是 φ- 反不变的，即 $\varphi(D_p^\perp)\subseteq T^\perp M,\forall p\in M$.

其中，$\{\xi\}$ 是由向量 ξ 张成的一维分布.

首先，有下面的引理.

引理 4.1 分布 D 是偶数维的.

证明 设分布 D 是 $(2n+1)$ 维的. 取 $D_p(p\in M)$ 的一组标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_{2n+1}\}$, 由 2) 可知 $\{\varphi e_1,\cdots,\varphi e_{2n+1}\}$ 仍是 D_p 的一组标准正交基，故 $\varphi e_i=a_{ij}e_j$, $i,j=1,\cdots,2n+1$. 记 $A=(a_{ij})$, 由于 $g(e_i,\varphi e_j)=-g(\varphi e_i,e_j)$, 因此 $a_{ij}=-a_{ji}$, 即 A 是奇数阶反对称矩阵，故 $|A|=0$, 这与 A 是过渡矩阵相矛盾，所以，分布 D 的维数是偶数. □

接下来证明本文的主要结果.

定理 4.1 设 $\tilde{M}(4c)$ 是有常 φ- 截面曲率 $4c$ 的 $(2m+1)$ 维余辛流形， M 是 $(n+1)$ 维半不变子流形，那么：

(i) 对每一个正交于 ξ 的单位切向量 X, 有

(a) 当 $X \in D_p$ 时,

$$\mathrm{Ric}(X) \le \frac{(n+1)^2}{4}\|H\|^2 + c(n+2), \tag{4.1}$$

(b) 当 $X \in {D_p}^{\perp}$ 时,

$$\mathrm{Ric}(X) \le \frac{(n+1)^2}{4}\|H\|^2 + c(n-1). \tag{4.2}$$

(ii) 若 $H(p)=0$, 则对正交于 ξ 的单位切向量 X, 使得 (a) 或 (b) 取等号的充要条件是 $X \in N_p$.

(iii) 对于任意正交于 ξ 的单位切向量 X,(a) 或 (b) 等号都成立的充要条件是点 p 是全测地点.

证明 (i) 设 $X \in T_pM$ 为与 ξ 正交的单位切向量， $\{e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}=\xi,e_{n+2},\cdots,e_{2m+1}\}$ 为 $T_p\tilde{M}$ 的一组标准正交基，使得 $\{e_1,\cdots,e_{n+1}\}$ 是 T_pM 的一组标准正交基，令 $e_1=X$, 因 $\tilde{M}$ 是常 φ- 截面曲率为 $4c$ 的空间形式，由 (2.1) 式得

$$\sum_{i\neq j}^{n+1}\tilde{R}(e_i,e_j,e_i,e_j) = c[n(n-1) + 3\sum_{i\neq j}^{n+1} g^2(e_i,\varphi e_j)].$$

由于 M 是半不变子流形，记 M 的维数 $(n+1=2d+s+1)$, 其中 $2d$ 为 D 的维数， s 为 $D^{\perp}$ 的维数，在 D_p 上，由施密特 (Schimidt) 正交过程，可以选取如下一组标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_d,\varphi e_1,\cdots,\varphi e_d\}$, 将其扩充为 M 的一组标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_d,e_{d+1}=\varphi e_1,\cdots,e_{2d}=\varphi e_d,e_{2d+1},\cdots,e_{2d+s},e_{2d+s+1}=\xi\}$, 显然有

$$g^2(e_i,\varphi e_j) = \begin{cases} 1, & i,j\in\{1,\cdots,2d\} \text{ 且 } \mid i-j \mid = d, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

故

$$\sum_{i\neq j}^{n+1} g^2(e_i,\varphi e_j) = 2d.$$

于是

$$\sum_{i\neq j}^{n+1}\tilde{R}(e_i,e_j,e_i,e_j) = c[n(n-1)+6d]$$

由 Gauss 方程 (2.3) 得

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq j}^{n+1} R(e_i,e_j,e_i,e_j) = &\sum_{i\neq j}^{n+1}\tilde{R}(e_i,e_j,e_i,e_j) + g(h(e_i,e_i),h(e_j,e_j)) - \\ &g(h(e_i,e_j),h(e_i,e_j)),\end{aligned}$$

即

$$
\begin{aligned}
2\tau =& c[n(n-1)+6d]+\sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{i\neq j}[h_{ii}^{r}h_{jj}^{r}-(h_{ij}^{r})^{2}] \\
=& c[n(n-1)+6d]+(n+1)^{2}\|H\|^{2}-\|h\|^{2}.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

又由 $h(X,\xi)=0$, 知 $h_{i,n+1}^{r}=0$. 于是

$$
\begin{aligned}
(n+1)^{2}\|H\|^{2} =& 2\tau+\|h\|^{2}-c[n(n-1)+6d] \\
=& 2\tau+\sum_{r=n+2}^{2m+1}[(h_{11}^{r})^{2}+(h_{22}^{r}+\cdots+h_{n,n}^{r})^{2}+2\sum_{1\leq i<j\leq n}(h_{ij}^{r})^{2}]- \\
& 2\sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{2\leq i<j\leq n}(h_{ii}^{r}h_{jj}^{r}-c[n(n-1)+6d] \\
=& 2\tau+\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{2m+1}[(h_{11}^{r}+\cdots+h_{n,n}^{r})^{2}+(h_{11}^{r}-\cdots-h_{n,n}^{r})^{2}]+ \\
& 2\sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{2\leq i<j\leq n}[(h_{ij}^{r})^{2}-h_{ii}^{r}h_{jj}^{r}]+2\sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{j=2}^{n}(h_{1j}^{r})^{2}- \\
& c[n(n-1)+6d].
\end{aligned}
$$

又因为

$$
K_{ij}=R(e_i,e_j,e_i,e_j)=\sum_{r=n+2}^{2m+1}[h_{ii}^{r}h_{jj}^{r}-(h_{ij}^{r})^{2}]+c[1+3g^{2}(e_i,\varphi e_j)],\qquad i,j\in\{1,\cdots,n\},
\tag{4.6}
$$

因此

$$
\sum_{2\leq i<j\leq n}K_{ij}=\sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{2\leq i<j\leq n}[h_{ii}^{r}h_{jj}^{r}-(h_{ij}^{r})^{2}]+\frac{(n-1)(n-2)}{2}c+3c\sum_{2\leq i<j\leq n}g^{2}(e_i,\varphi e_j).
\tag{4.7}
$$

由 (4.5) 和 (4.7) 式得

$$
\begin{aligned}
\frac{(n+1)^{2}}{2}\|H\|^{2} \geq& 2\mathrm{Ric}(X)+2\sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{2\leq i<j\leq n}[(h_{ij}^{r})^{2}-h_{ii}^{r}h_{jj}^{r}]+2\sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{j=2}^{n}(h_{1j}^{r})^{2}- \\
& -c(n(n-1)+6d)-2\sum_{r=n+2}^{2m+1}\sum_{2\leq i<j\leq n}[h_{ii}^{r}h_{jj}^{r}-(h_{ij}^{r})^{2}]- \\
& (n-1)(n-2)c-6c\sum_{2\leq i<j\leq n}g^{2}(e_i,\varphi e_j) \\
\geq& 2\mathrm{Ric}(X)+6c\sum_{2\leq i<j\leq n}g^{2}(e_i,\varphi e_j)-2c(n-1)-6cd.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

(a) 当 $X\in D_p$ 时， $\sum_{2\leq i<j\leq n+1}g^{2}(e_i,\varphi e_j)=d-1$, 所以

$$
\mathrm{Ric}(X)\leq\frac{(n+1)^{2}}{4}\|H\|^{2}+c(n+2).
\tag{4.9}
$$

(b) 当 $X \in D_p^{\perp}$ 时, $\sum_{2\le i<j\le n+1} g^2(e_i, \varphi e_j) = d$, 所以

$$\mathrm{Ric}(X) \le \frac{(n+1)^2}{4}\|H\|^2 + c(n-1). \tag{4.10}$$

(ii) 对于单位切向量 X, 若 (4.1) 或 (4.2) 式等号成立, 则

$$\begin{cases} h_{11}^r = h_{22}^r + \cdots + h_{n,n}^r, & r = n+2, \cdots, 2m+1 \\ h_{1j}^r = 0, & j = 2, \cdots, n+1. \end{cases}$$

若 $H(p) = 0$, 则

$$0 = h_{11}^r + \cdots + h_{n+1,n+1}^r = h_{11}^r + \cdots + h_{n,n}^r,$$

故 $h_{1j}^r = 0,\ j = 1, 2, \cdots, n+1$, 即 $X \in N_p$.

反之, 易证当 $X \in N_p$ 时, 有 (4.1) 或 (4.2) 等号成立.

(iii) 若对于任意单位切向量 X, 等式 (4.1) 或 (4.2) 都成立, 则有

$$\begin{cases} h_{11}^r + \cdots + h_{n+1,n+1}^r - 2h_{ii}^r = 0, & i \in \{1, \cdots, n+1\},\ r \in \{n+2, \cdots, 2m+1\} \\ h_{ij}^r = 0, & i \ne j \end{cases}$$

由上式知 $h_{11}^r + \cdots + h_{n+1,n+1}^r = 0$, 故 $H(p) = 0$, 由 (ii) 知

$$h_{ij}^r = 0,\ \ i, j \in \{1, \cdots, n+1\}, \quad r \in \{n+2, \cdots, 2m+1\},$$

即点 p 是全测地点.

反之, 易证当 p 是全测地点时, 对任意 $X \in T_pM$, 有 (4.1) 或 (4.2) 式等号成立.

参考文献:

[1] CHEN Bang-yen. *Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimension* [J]. Glasg. Math. J., 1999, **41**: 33–41.
[2] CHEN Bang-yen. *On Ricci curvature of isotropic and Lagrangian submanifolds in complex space forms* [J]. Arch. Math. (Basel), 2000, **74**: 154–160.
[3] BLAIR D E. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry* [M]. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 509. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
[4] CHEN Bang-yen. *Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds* [J]. Arch. Math. (Basel), 1993, **60**: 568–578.
[5] LIU Xi-min. *On Ricci curvature of C-totally real submanifolds in Sasakian space forms* [J]. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 2001, **111**: 399–405.

On Ricci Curvature of Semi-invariant Submanifolds in Cosymplectic Space Forms

Wang Ai-qi[1], *Liu Xi-min*[2]
(1. Department of Mathematics and Physics, Dalian Jiaotong University, Liaoning 116028, China;
2. Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China)

Abstract: In this paper, we obtain a sharp inequality between the Ricci curvature and the squared mean curvature of semi-invariant submanifolds in cosymplectic space forms, and get some conditions to make the equality hold.

Key words: cosymplectic manifold; semi-invariant submanifold; Ricci curvature; mean curvature.