

非自伴算子代数的换位子

纪培胜

(青岛大学数学系, 山东 青岛 266071)

(E-mail: jipeish@yahoo.com)

摘 要: 设 T 是复数域上的代数, T 的换位子 $[T, T]$ 指 $\{[a, b] : a, b \in T\}$ 的线性扩张. 本文给出了 Nest 代数 $T(N)$ 的换位子 $[T(N), T(N)]$ 的 σ -弱算子拓扑闭包 $\overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma-wot}$ 的刻画, 和 TAF 代数 T 的换位子 $[T, T]$ 的范数闭包 $\overline{[T, T]}$ 的几种刻画, 进一步得到 $\overline{[T, T]}$ 是 T 的理想.

关键词: Nest 代数; TAF 代数; 换位子.

MSC(2000): 47L25

中图分类号: O177.1

1 引言

设 T 是复数域上的一个结合代数, 在 T 上定义括积 $[a, b] = ab - ba$, 则 T 可以看成 Lie 代数. 令 $[T, T]$ 为 $\{[a, b] : a, b \in T\}$ 的线性扩张, 称 $[T, T]$ 为 T 的换位子. 关于自伴算子代数的换位子的研究有许多好的结果, 如文献 [1] 证明了真无限 ν N 代数 M 的换位子 $[M, M]$ 等于 M 本身 (即 $[M, M] = M$); 文献 [2] 证明了有限 ν N 代数 M 的换位子 $[M, M]$ 等于 $\{m \in M : \tau(m) = 0\}$, 其中 τ 是 M 上的唯一正常的中心值迹; Cuntz 和 Pedersen^[3] 证明了对于一个含单位元 C^* -代数 A , 要么 A 无迹态且 $\overline{[A, A]} = A$, 要么 $\overline{[A, A]}$ 为 A 的所有迹态的核的交.

本文研究一些常见非自伴算子代数的换位子. 第二部分刻画 Nest 代数 $T(N)$ 的换位子 $[T(N), T(N)]$ σ -弱算子拓扑闭包 $\overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma-wot}$, 定理 2.1 证明了存在一个从 $T(N)$ 到其对角 $D(N)$ 的中心的一个迹同态 τ 使得 $\overline{[T, T]}^{\sigma-wot} = \{a - \tau(a) : a \in T(N)\}$. 第三部分给出了 TAF 代数 T 的换位子的范数闭包 $\overline{[T, T]}$ 的几种刻画, 它类似于严格上三角矩阵代数, 从而得到 $\overline{[T, T]}$ 是 T 的理想.

2 Nest 代数的换位子的刻画

Hilbert 空间 H 上的 Nest N 指包含 $\{0\}$ 和 H 的 H 的闭子空间链, 并且关于任意交和任意并是封闭的. 相应的 Nest 代数 $T(N)$ 指集合 $\{a \in B(H) : \text{任给 } E \in N, \text{ 都有 } a(E) \subset E\}$. 它是 $B(H)$ 的弱闭算子代数. 任给 H 中闭子空间 E , 用 $P(E)$ 表示 H 到 E 上的正交投影, 显然 $T(N) = \{a \in B(H) : \text{任给 } E \in N, \text{ 都有 } aP(E) = P(E)aP(E)\}$. $T(N)$ 的对角 $D(N)$ 指 ν N 代数 $T(N) \cap T(N)^* = N'$, 其中 $T(N)^* = \{a^* : a \in T(N)\}$, $N' = \{a \in B(H) : \text{任给 } E \in N, \text{ 都有 } aP(E) = P(E)a\}$. 如果 $E, F \in N$ 并且 $E < F$, 称 $F - E$ 为 Nest 的区间; 非零极小的区间称为原子. 如果 N 中所有的原子生成 H , 则称 N 为原子 Nest. 如果 N 中无原子, 则称 N 为连续 Nest.

收稿日期: 2005-09-12; 接受日期: 2006-01-20

基金项目: 国家自然科学基金 (10371061); 天元基金 (A0324614).

任给 $E \in N$, 令 $E^- = \bigvee \{F : F < E, F \in N\}$, $E^+ = \bigwedge \{F : F > E, F \in N\}$, 显然 $(E^-)^+ = E$, $(E^+)^- = E$, 如果 $E^- \neq E$, 则 $E - E^-$ 是原子, 如果 $E^+ \neq E$, 则 $E^+ - E$ 是原子; N 是连续 Nest 的充分必要条件是任给 $E \in N$, $E^- = E$, $E^+ = E$. 设 $A = \{A_\alpha\}$ 表示 N 中原子的全体, 则称 $D_a = \sum_{A_\alpha \in A} \oplus B(A_\alpha)$ 为对角 $D(N)$ 的原子部分. 定义从 $B(H)$ 到 D_a 的收缩投影 Δ 为: 任给 $a \in B(H)$, $\Delta(a) = \sum_{A_\alpha \in A} P(A_\alpha)aP(A_\alpha)$. 容易验证 Δ 是 σ -wot 连续的, 并且 Δ 限制在 $T(N)$ 上为同态. 由于 D_a 是 I 型 vN 代数, 令 z 是 D_a 的极大的有限中心投影, 则 $D_a(1-z)$ 是 I_∞ 型 vN 代数, D_az 是有限 I 型 vN 代数. 设 τ_1 是 D_az 上唯一的中心值迹 (参见 [4, 定理 8.2.8]). 定义 τ 为: 任给 $a \in T(N)$, $\tau(a) = \tau_1(\Delta(a)z)$. 显然 τ 是 $T(N)$ 到 D_a 的中心映射, 满足任给 $a, b \in T(N)$, 都有 $\tau([a, b]) = 0$. 由 Δ 和 τ_1 是 σ -wot 连续的 (参见 [4, 定理 8.2.8]), 所以 τ 是 σ -wot 连续的. 由于 $D_a(1-z)$ 是无限 vN 代数, 所以 $[D_a(1-z), D_a(1-z)] = D_a(1-z)$, 由于 D_az 是有限 vN 代数, 所以 $[D_az, D_az] = \{a - \tau_1(a) : a \in D_az\}$. 关于 Nest 代数的系统知识可参考文献 [5].

本部分的主要结果是下面定理:

定理 2.1 设 N 是 Hilbert 空间 H 上的 Nest, 则

$$\overline{[T, T]}^{\sigma\text{-wot}} = \{a - \tau(a) : a \in T(N)\}.$$

下面分成几个引理进行证明.

引理 2.2 设 N 是 Hilbert 空间 H 上的 Nest, 则

$$\{P(E)a(1-P(E)) : a \in T(N), E \in N\} = \{a \in T(N) : \text{存在 } E \in N \text{ 使得 } a = P(E)a(1-P(E))\}$$

证明 显然.

引理 2.3 设 N 是 Hilbert 空间 H 上的 Nest, 则

$$\text{span}\{P(E)a(1-P(E)) : a \in T(N), E \in N\} \subseteq [T(N), T(N)].$$

证明 任给 $a \in T(N)$, $E \in N$, 显然

$$P(E)a(1-P(E)) = [P(E), P(E)a(1-P(E))] \in [T(N), T(N)].$$

引理 2.4 设 N 是 Hilbert 空间 H 上的连续 Nest, 则

$$\overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma\text{-wot}} = T(N) = \{a - \tau(a) : a \in T(N)\}.$$

证明 只需证 $T(N) \subseteq \overline{[T, T]}^{\sigma\text{-wot}}$. 任给 $T(N)$ 中一秩算子 a , 由文献 [5] 中引理 3.7, 存在 $E \in N$, 使得 $a = P(E)a(1-P(E^-))$, 由于 N 是连续的, 所以 $E^- = E$. 由引理 2.3, $a = P(E)a(1-P(E)) \in [T(N), T(N)]$. 由文献 [5] 中推论 3.13 知 $T(N)$ 中一秩算子的线性扩张 σ -弱算子拓扑稠于 $T(N)$, 从而 $\overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma\text{-wot}} = T(N)$. 由于 N 是连续 Nest, 所以 $\tau = 0$, 故

$$T(N) = \{a - \tau(a) : a \in T(N)\}.$$

引理 2.5 设 N 是 Hilbert 空间 H 上的原子 Nest, 则

$$\overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma\text{-wot}} = \{a - \tau(a) : a \in T(N)\}.$$

证明 任给 $a \in T(N)$, 则 $a = a - \Delta(a) + \Delta(a)$. 由 Δ 的定义可得

$$a - \Delta(a) \in \overline{\text{span}}^{\sigma\text{-}wot} \{P(E)a(1 - P(E)) : a \in T(N), E \in N\} \subseteq \overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma\text{-}wot}.$$

而 $\Delta(a) - \tau(a) = \Delta(a)(1 - z) + \Delta(a)z - \tau_1(\Delta(a)z)$, 由定理 1 前面说明知

$$\Delta(a)(1 - z) \in [D_a(1 - z), D_a(1 - z)] \subseteq \overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma\text{-}wot},$$

$$\Delta(a)z - \tau_1(\Delta(a)z) \in [D_az, D_az] \subseteq \overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma\text{-}wot}.$$

综上所述有 $\{a - \tau(a) : a \in T(N)\} \subseteq \overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma\text{-}wot}$.

任给 $a, b \in T(N)$, 由定理 2.1 前面说明知 $\tau([a, b]) = 0$, 所以 $[a, b] = [a, b] - \tau([a, b]) \in \{a - \tau(a) : a \in T(N)\}$. 由于 τ 是 σ -弱算子拓扑连续的, 所以 $\{a - \tau(a) : a \in T(N)\}$ 是 σ -弱算子拓扑闭的. 所以 $\overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma\text{-}wot} = \{a - \tau(a) : a \in T(N)\}$.

定理 2.1 的证明 设 P_a 是 H 到 N 的所有原子的闭线性扩张上的投影, 则 $P_a T(N) P_a$ 为一个原子 Nest M_1 上的 Nest 代数 $T(M_1)$, 且 $P_a^\perp T(N) P_a^\perp$ 为一个连续 Nest M_2 上的 Nest 代数 $T(M_2)$. 由引理 2.4 知

$$\begin{aligned} \overline{[P_a^\perp T(N) P_a^\perp, P_a^\perp T(N) P_a^\perp]}^{\sigma\text{-}wot} &= P_a^\perp T(N) P_a^\perp = \{a - \tau(a) : a \in P_a^\perp T(N) P_a^\perp\} \\ &\subseteq \{a - \tau(a) : a \in T(N)\}. \end{aligned}$$

由引理 2.5 知

$$\overline{[P_a T(N) P_a, P_a T(N) P_a]}^{\sigma\text{-}wot} = \{a - \tau(a) : a \in P_a T(N) P_a\} \subseteq \{a - \tau(a) : a \in T(N)\}.$$

设 $\{A_\alpha = E_\alpha - E_\alpha^-\}$ 为 N 的原子的全体, 记 $p_\alpha = P(E_\alpha)$, $p_\alpha^- = P(E_\alpha^-)$, 则 $P(A_\alpha) = p_\alpha - p_\alpha^-$, $P_a = \sum_\alpha P(A_\alpha) = \sum_\alpha (p_\alpha - p_\alpha^-)$. 任给 $t \in T(N)$, 则 $t = P_a t P_a + P_a^\perp t P_a + P_a t P_a^\perp + P_a^\perp t P_a^\perp$, 显然 $\tau(P_a^\perp t P_a) = 0$, $\tau(P_a t P_a^\perp) = 0$. 又

$$P_a t P_a^\perp = \sum_\alpha (p_\alpha - p_\alpha^-) t (1 - \sum_\beta (p_\beta - p_\beta^-)) = \sum_\alpha [(p_\alpha - p_\alpha^-) t (1 - \sum_\beta (p_\beta - p_\beta^-))].$$

任给 α

$$\begin{aligned} (p_\alpha - p_\alpha^-) t (1 - \sum_\beta (p_\beta - p_\beta^-)) &= (p_\alpha - p_\alpha^-) p_\alpha t (1 - p_\alpha) (1 - \sum_\beta (p_\beta - p_\beta^-)) + \\ &\quad (p_\alpha - p_\alpha^-) p_\alpha t p_\alpha^- (1 - \sum_\beta (p_\beta - p_\beta^-)) \\ &= p_\alpha (p_\alpha - p_\alpha^-) t (1 - \sum_\beta (p_\beta - p_\beta^-)) (1 - p_\alpha). \end{aligned}$$

由引理 2.2 知 $(p_\alpha - p_\alpha^-) t (1 - \sum_\beta (p_\beta - p_\beta^-)) \in [T(N), T(N)]$, 从而 $P_a t P_a^\perp \in \overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma\text{-}wot}$,

$$P_a^\perp t P_a = (1 - \sum_\beta (p_\beta - p_\beta^-)) t \sum_\alpha (p_\alpha - p_\alpha^-) = \sum_\alpha [(1 - \sum_\beta (p_\beta - p_\beta^-)) t (p_\alpha - p_\alpha^-)].$$

任给 α

$$\begin{aligned} (1 - \sum_{\beta} (p_{\beta} - p_{\beta}^{-}))t(p_{\alpha} - p_{\alpha}^{-}) &= (1 - \sum_{\beta} (p_{\beta} - p_{\beta}^{-}))p_{\alpha}t(p_{\alpha} - p_{\alpha}^{-}) \\ &= (p_{\alpha} - \sum_{\beta} (p_{\alpha}p_{\beta} - p_{\alpha}p_{\beta}^{-}))p_{\alpha}t(p_{\alpha} - p_{\alpha}^{-}) = (p_{\alpha}^{-} - \sum_{p_{\beta} \leq p_{\alpha}^{-}} (p_{\beta} - p_{\beta}^{-}))p_{\alpha}t(p_{\alpha} - p_{\alpha}^{-}) \\ &= p_{\alpha}^{-}[(p_{\alpha}^{-} - \sum_{p_{\beta} \leq p_{\alpha}^{-}} (p_{\beta} - p_{\beta}^{-}))t(p_{\alpha} - p_{\alpha}^{-})](1 - p_{\alpha}^{-}). \end{aligned}$$

再由引理 2.2 知

$$(1 - \sum_{\beta} (p_{\beta} - p_{\beta}^{-}))t(p_{\alpha} - p_{\alpha}^{-}) \in [T(N), T(N)],$$

从而 $P_a^{\perp}tP_a \in \overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma-wot}$.

综上所述

$$\begin{aligned} t - \tau(t) &= P_atP_a - \tau(P_atP_a) + P_a^{\perp}tP_a - \tau(P_a^{\perp}tP_a) + P_atP_a^{\perp} - \tau(P_atP_a^{\perp}) + \\ &\quad P_a^{\perp}tP_a^{\perp} - \tau(P_a^{\perp}tP_a^{\perp}) \\ &\in \overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma-wot}. \end{aligned}$$

所以 $\{a - \tau(a) : a \in T(N)\} \subseteq \overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma-wot}$.

反包含关系类似引理 2.5 后半部分的证明可证.

这样就证明了 $\{a - \tau(a) : a \in T(N)\} = \overline{[T(N), T(N)]}^{\sigma-wot}$.

3 TAF 代数的换位子的刻画

首先给出 TAF 代数的一些术语, 关于 TAF 代数的系统知识可参见文献 [6].

一个 C^* -代数 A 称为 AF C^* 代数指 A 中存在一个有限维 C^* 子代数序列 $\{A_n\}$ 使得 $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ 稠于 A . A 的一个 masa(极大交换 C^* 子代数) D 称为典型的, 指 A 中存在一个有限维 C^* 子代数升链列 $\{A_n\}$ 使得 $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ 稠于 A , 任给 n , $A_n \cap D = D_n$ 是 A_n 的 masa, 并且 $D = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} D_n}$. 任给一个 AF C^* 代数 A , 一个典型 masa D , 及相应的有限维 C^* -子代数序列 $\{A_n\}$, 存在 A 的一个子集 $\{e_{ij}^n : i, j, n\}$ 满足任给 n , $\{e_{ij}^n : i, j\}$ 为 A_n 的一个矩阵单位系, 任给 i , $e_{ii}^n \in D_n$, 并且每个 e_{ij}^n 是 $\{e_{ij}^{n+1} : i, j\}$ 中某些元素的和, 此时称之为 A 关于 D 的一个矩阵单位系. A 中一个闭子空间 S 称为归纳的指 $\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap S)$ 稠于 S . 文献 [6] 中证明了如果 S 是 A 的一个闭 D -双模 (即 $DS D \subset S$), 则 S 是归纳的. 显然此时 S 是 $\{e_{ij}^n : e_{ij}^n \in S\}$ 的闭线性扩张. A 的一个范数闭子代数 T 称为 TAF 代数, 指 $T \cap T^* = D$, 其中 $T^* = \{a^* : a \in T\}$, 称 D 为 T 的对角, 显然 T 是归纳的.

定理 3.1 设 T 是 AF C^* -代数 A 中对角为典型 MASA D 的 TAF 代数, 则

$$\overline{[T, T]} = \overline{\text{span}\{e_{ij}^n : e_{ij}^n \in T, i \neq j\}},$$

从而 $\overline{[T, T]}$ 是 T 的闭理想.

证明 任给 $e_{ij}^n \in T, i \neq j$, 则 $e_{ij}^n = [e_{ii}^n, e_{ij}^n] \in \overline{[T, T]}$, 从而 $\overline{\text{span}\{e_{ij}^n : e_{ij}^n \in T, i \neq j\}} \subset \overline{[T, T]}$. 任给 $e_{ij}^n, e_{kt}^n \in T$, 如果 $j = k$, 由于 $T \cap T^* = D$ 从而必有 $i \neq t$, 所以有 $[e_{ij}^n, e_{kt}^n] = e_{it}^n \in \overline{\text{span}\{e_{ij}^n :$

$e_{ij}^n \in T, i \neq j\}$. 如果 $j \neq k$ 并且 $i = t$, 则 $[e_{ij}^n, e_{kt}^n] = -e_{kj}^n \in \overline{\text{span}}\{e_{ij}^n : e_{ij}^n \in T, i \neq j\}$. 如果 $j \neq k$ 并且 $i \neq t$, 则 $[e_{ij}^n, e_{kt}^n] = 0 \in \overline{\text{span}}\{e_{ij}^n : e_{ij}^n \in T, i \neq j\}$. 由于 T 是归纳的, 所以 $T = \overline{\text{span}}\{e_{ij}^n : e_{ij}^n \in T\}$. 从而有 $\overline{[T, T]} = \overline{\text{span}}\{e_{ij}^n : e_{ij}^n \in T, i \neq j\}$.

给定 $A, \{A_n : n\}, D$ 及 A 关于 D 的矩阵单位系 $\{e_{ij}^n : i, j, n\}$. 任给 $a \in A$, 任给 n , 令 $P_n(a) = \sum_i e_{ii}^n a e_{ii}^n$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(a) = P(a)$ 定义了从 A 到 D 上的范数为 1 的条件期望 P .

推论 3.2 设 T 是 AFC^* -代数 A 中对角为典型 MASA D 的 TAF 代数, 则

$$\overline{[T, T]} = \{a - P(a) : a \in T\}.$$

证明 任给任给 $a \in T$, 任给 n , 则 $a = \sum_{i,j} e_{ii}^n a e_{jj}^n$, 所以 $a - P_n(a) = \sum_{i \neq j} e_{ii}^n a e_{jj}^n$. 因为 $e_{ii}^n a e_{jj}^n \in T$, 所以当 $i \neq j$ 时, $e_{ii}^n a e_{jj}^n = [e_{ii}^n, e_{ii}^n a e_{jj}^n] \in [T, T]$, 从而 $a - P_n(a) \in \overline{[T, T]}$. 所以 $a - P(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a - P_n(a)) \in \overline{[T, T]}$. 故 $\{a - P(a) : a \in T\} \subset \overline{[T, T]}$.

任给 $e_{ij}^n \in T, i \neq j$, 显然 $P(e_{ij}^n) = 0$, 所以 $e_{ij}^n = e_{ij}^n - P(e_{ij}^n) \in \{a - P(a) : a \in T\}$. 因为 P 是连续的, 所以 $\{a - P(a) : a \in T\}$ 是闭的. 由定理 3.1 知 $\overline{[T, T]} = \{a - P(a) : a \in T\}$.

任给一个 $\text{AF } C^*$ -代数, 它有一个 Groupoid 坐标化, 简单描述如下: 给定 $\text{AF } C^*$ -代数 A , 典型 masa D , 以及 A 关于 D 的矩阵单位系 $\{e_{ij}^n : i, j, n\}$. 设 X 是 D 的极大理想空间, 它是一个局部紧的极端不连通 Hausdorff 空间, 任给 e_{ij}^n , 可定义 X 上一个部分同胚^[6], 用 E_{ij}^n 表示它的图象, 则 A 对应的拓扑 Groupoid 为 $G = \cup_{i,j,n} E_{ij}^n$, 其中 G 的拓扑由 $\{E_{ij}^n : i, j, n\}$ 构成. A 中每一个元都等同于 $C_0(G)$ 中的元 (但 $C_0(G)$ 中的元未必对应 A 中的元). 任给 $a, b \in A$, 将 a, b 看成 $C_0(G)$ 中的元, 则 $(ab)(x, y) = \sum_u a(x, u)b(u, y)$, 其中 $(x, y) \in G, u$ 包含在 x 的等价类中.

设 S 是 A 的一个闭 D -双模, S 的谱定义为 G 的子集 $\text{spec}(S) = \{(x, y) \in G : \text{存在 } f \in S \text{ 使得 } f(x, y) \neq 0\}$. 则 $S = \{f \in A : \text{supp}(f) \subset \text{spec}(S)\}$. 显然 $\text{spec}(D) = X$.

推论 3.3 设 T 是 $\text{AF } C^*$ -代数 A 中对角为典型 MASA D 的 TAF 代数, 则

$$\text{spec}(\overline{[T, T]}) = \{(x, y) \in \text{spec}(T) : x \neq y\}.$$

证明 由定理 3.1 知 $\overline{[T, T]}$ 是 D -双模, 并且 $\text{spec}(\overline{[T, T]}) = \cup\{E_{ij}^n : e_{ij}^n \in T, i \neq j\} \subset \{(x, y) \in \text{spec}(T) : x \neq y\}$.

反之, 任给 $(x, y) \in \text{spec}(T)$, 且 $x \neq y$, 则存在 $f \in T$ 使得 $f(x, y) \neq 0$, 由于 $P(f)(x, y) = 0$, 所以 $(f - P(f))(x, y) \neq 0$, 由推论 3.2 知 $f - P(f) \in \overline{[T, T]}$, 所以 $(x, y) \in \text{spec}(\overline{[T, T]})$. 这样证明了 $\text{spec}(\overline{[T, T]}) = \{(x, y) \in \text{spec}(T) : x \neq y\}$.

Cuntz 和 Pedersen^[3] 证明了对于一个含单位元 C^* -代数 A , 要么 A 无迹态且 $\overline{[A, A]} = A$, 要么 $\overline{[A, A]}$ 为 A 的所有迹态的核的交. 下面定理 3.4 将证明对于 TAF 代数 T , $\overline{[T, T]}$ 为 T 的所有连续迹线性泛函的核的交 (T 连续迹线性泛函 f 指 f 是 T 上的连续迹线性泛函并且满足任给 $a, b \in T$, 都有 $f(ab) = f(ba)$).

定理 3.4 设 T 是 $\text{AF } C^*$ -代数 A 中对角为典型 MASA D 的 TAF 代数, 则 $\overline{[T, T]} = \cap\{\ker \varphi : \varphi \text{ 是 } T \text{ 上的连续迹线性泛函}\}$.

证明 显然 $\overline{[T, T]} \subset \cap\{\ker \varphi : \varphi \text{ 是 } T \text{ 上的连续迹线性泛函}\}$. 下证反包含关系成立. 任给 $x \in X$, 定义 $\varphi_x(f) = f(x, x), \forall f \in T$, 则 φ_x 是 T 上的连续迹线性泛函, 事实上, 显然 φ_x 是

T 上的线性泛函; 任给 $a, b \in T$, 有 $(ab)(x, x) = \sum_u a(x, u)b(u, x)$, 因为 T 是 TAF 代数, 所以 $\text{spec}(T)$ 是 X 上一个偏序, 即 $(x, u), (u, x) \in \text{spec}(T)$ 当且仅当 $x = u$. 因此

$$(ab)(x, x) = a(x, x)b(x, x) = b(x, x)a(x, x) = (ba)(x, x),$$

从而 $\varphi_x(ab) = \varphi_x(ba)$, 即 φ_x 是迹线性泛函; 再证连续性, 由于 $\varphi_x|_D$ 是 D 上的连续线性泛函, P 是 A 到 D 上的连续映射, 并且 $\varphi_x = \varphi_x|_D \circ P$, 所以 φ_x 是连续的.

任给 $a \in \cap\{\ker\varphi : \varphi \text{ 是 } T \text{ 上的连续迹线性泛函}\}$, 任给 $x \in X$, 由前面证明知 φ_x 是 T 上的连续迹线性泛函, 所以 $\varphi_x(a) = a(x, x) = 0$, 由推论 3.3 知 $a \in \overline{[T, T]}$. 所以 $\overline{[T, T]} = \cap\{\ker\varphi : \varphi \text{ 是 } T \text{ 上的连续迹线性泛函}\}$.

设 T 为 TAF 代数, 任给 n , 令 $\text{Lat}T_n = \{p : p \text{ 是 } D_n \text{ 的投影满足任给 } a \in T_n, \text{ 都有 } pa(1-p) \in T_n\}$.

定理 3.5 设 T 为 TAF 代数, 则

$$\begin{aligned}\overline{[T, T]} &= \overline{\text{span}\{pa(1-p) : a \in T, p \in \text{Lat}T_n, n = 1, 2, \dots\}} \\ &= \overline{\text{span}\{a \in T : \text{存在 } n \text{ 及 } p \in \text{Lat}T_n \text{ 使得 } a = pa(1-p)\}}.\end{aligned}$$

证明 (1) 任给 $e_{ij}^n \in T, i \neq j$, 由于 T_n 是有限维 C^* -代数 A_n 中子代数且包含 A_n 的 masa D_n , 从而存在 $p \in \text{Lat}T_n$ 使得 $e_{ij}^n = pe_{ij}^n(1-p)$, 由定理 3.1 可得 $\overline{[T, T]} \subset \overline{\text{span}\{pa(1-p) : a \in T, p \in \text{Lat}T_n, n = 1, 2, \dots\}}$. 反之, 设 $a \in T, p \in \text{Lat}T_n$, 则 $pa(1-p) = [p, pa(1-p)] \in [T, T]$. 从而 $\overline{[T, T]} = \overline{\text{span}\{pa(1-p) : a \in T, p \in \text{Lat}T_n, n = 1, 2, \dots\}}$.

(2) 记 $U = \{pa(1-p) : a \in T, p \in \text{Lat}T_n, n = 1, 2, \dots\}$, $V = \{a \in T : \text{存在 } n \text{ 及 } p \in \text{Lat}T_n \text{ 使得 } a = pa(1-p)\}$, 要证 $\overline{\text{span}U} = \overline{\text{span}V}$, 只需证 $U = V$. 任给 $a \in T$, 及 $p \in \text{Lat}T_n$ 则 $pa(1-p) \in T$, 从而 $pa(1-p) = p(pa(1-p))(1-p) \in V$. 任给 $a \in V$, 从而存在 n 及 $p \in \text{Lat}T_n$ 使得 $a = pa(1-p)$, 所以 $a \in U$.

参考文献:

- [1] SUNOUCHI H. *Infinity Lie rings* [J]. Tohoku Math. J., 1956, **8**: 291–307.
- [2] PEARCY C, TOPPING D M. *Commutators and certain II_1 -factors* [J]. J. Funct. Anal., 1969, **3**: 69–78.
- [3] CUNTZ J, PEDERSEN G K. *Equivalence and traces on C^* -algebras* [J]. J. Funct. Anal., 1979, **33**: 135–164.
- [4] KADISON R V, RINGROSE J R. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras II* [M]. Academic Press, INC, NewYork, 1986.
- [5] DAVIDSON K R. *Nest Algebras* [M]. Pitman Research Notes in Mathematics, No.191, Longman Sci Tech, Harlow, 1988.
- [6] POWER S C. *Limit Algebras* [M]. Pitman Research Notes in Mathematics, No.278, Longman Sci Tech, Harlow, 1992.

Commutators of Non-Self-Adjoint Operator Algebras

Ji Pei-sheng

(Department of Mathematics, Qingdao University, Shandong 266071, China)

Abstract: Let T be an associative algebra over the complex field, and the commutator $[T, T]$ of T be the linear span of the set $\{[a, b] : a, b \in T\}$. We describe the σ -wot closure of the commutator of a nest algebra and the norm closure of the commutator of an TAF algebra.

Key words: Nest algebra; TAF algebra; commutator.