第27卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.2
2007年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2007

文章编号: 1000-341X(2007)02-0355-04 **文献标识码**: **A**

线性层空间的一个刻画

许玉铭 [1,2], 江守礼 [1]

(1. 山东大学数学与系统科学学院, 山东 济南 250100; 2. 苏州大学数学院, 江苏 苏州 215006)
(E-mail: jiang@math.sdu.edu.cn)

摘 要: 本文利用邻域约定证明了线性层空间是单调正规的, 并且从单调正规的角度得到了线性层空间的一个刻画.

关键词: 邻域约定; 单调正规; 垫状对基; 线性层空间.
MSC(2000): 54D15; 54E20
中图分类: O189.1

1 预备知识

本文主要研究线性层空间的刻画. 这里我们给出将要用到的几个基本的定义, 其它未提及的有关概念可参考文献 [6].

定义 1.1[1] 空间 $(X,\mathcal{T})$ 的子集对的族 $\mathcal{P}$ 称为 X 的对基, 若 $\mathcal{P}$ 满足下列条件:

(i). 对每一个 $(P_1,P_2)\in\mathcal{P}$, 都有 $P_1\subset P_2$, 并且 $P_1\in\mathcal{T}$;

(ii). 若 $x\in U\in\mathcal{T}$, 则存在某个 $(P_1,P_2)\in\mathcal{P}$ 使得 $x\in P_1\subset P_2\subset U$.

集族 $\mathcal{P}$ 称为垫状的, 如果对任意的 $\mathcal{P}'\subset\mathcal{P}$, 都有 $\mathrm{cl}(\cup\{P_1:(P_1,P_2)\in\mathcal{P}'\})\subset\cup\{P_2:(P_1,P_2)\in\mathcal{P}'\}$. 空间 $(X,\mathcal{T})$ 称为 M_3- 空间, 如果它有一个 σ- 垫状对基.

定义 1.2[2] 空间 $(X,\mathcal{T})$ 称为层空间, 若存在映射 $G:N\times\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{T}$, 把任意的 $n\in N$ 和 $U\in\mathcal{T}$ 映成 $G(n,U)$, 并且满足:

(i). 对任意的 $n\in N$, $U\in\mathcal{T}$, 都有 $\overline{G(n,U)}\subset U=\cup_{m\in N}G(m,U)$;

(ii). 对任意的 $V\subset U$, 其中 V, $U\in\mathcal{T}$, 都有 $G(n,V)\subset G(n,U)$. 为了方便, 我们把 G 称为空间 X 上的层映射.

定义 1.3[3] 空间 X 称为单调正规的, 如果存在映射 D, 把每一个不相交的闭集对 (H,K) 映成一个开集 $D(H,K)$, 并且满足:

(i). $H\subset D(H,K)\subset\overline{D(H,K)}\subset X\setminus K$;

(ii). 若 $H\subset H'$, $K\supset K'$, 并且 H', K' 是不相交的闭子集, 则有 $D(H,K)\subset D(H',K')$.

习惯上, 映射 D 称为空间 X 上的单调正规算子.

定义 1.4[4] (1) 设 B 为空间 X 的一个开子集, 如果对每一点 $x\in B$, 都有一个邻域 $(x)_B\subset B$ 与之相对应, 就称在 B 上存在一个邻域约定 $\{(x)_B:x\in B\}$.

(i). 如果所有的邻域都是开的, 我们就称这个邻域约定是开的;

(ii). 如果对每一个 $x\in B$, 子集 $(x)^*_B=\{y\in B:x\in(y)_B\}$ 也是 x 的邻域, 就说这个邻域约定是拓扑对称的, 而把 $\{(x)^*_B:x\in B\}$ 称为其对偶的邻域约定;

收稿日期: 2005-05-17; **接受日期**: 2005-07-19
基金项目: 国家自然科学基金 (10271026); 山东省自然科学基金 (Y2004A03).

(iii). 如果对任意的 $x, y \in B$, 都有 $x \in (y)_B \Leftrightarrow y \in (x)_B$, 就称这个邻域约定是对称的;

(iv). 如果存在 X 的开子集族 $\mathcal{U}$ 使得 $\cup\mathcal{U} = B$, 并且对每一点 $x \in B$, 都有 $(x)_B = st(x, \mathcal{U})$, 就说这个邻域约定是星状的.

(2) 设 $\mathcal{B}$ 为空间 X 的开子集族，如果对每一个 $B \in \mathcal{B}$, 在 B 上都有一个邻域约定 $\{(x)_B : x \in B\}$, 则称在 $\mathcal{B}$ 上有一个邻域约定 $\{\{(x)_B : x \in B\} : B \in \mathcal{B}\}$.

(3) $\mathcal{B}$ 上的一个邻域约定称为是对称 T_2 可分离的，如果对任给的 $A, B \in \mathcal{B}$, 都有

$$(x)_A \cap (x)_B \neq \emptyset \Longrightarrow x \in B \ \text{ 或 } \ y \in A. \tag{*}$$

(4) 对于下列开集族上的对称 T_2 可分离的邻域约定：

(i). X 上所有二元开覆盖的族 $\mathcal{C}$;

(ii). X 上所有开子集对的族 $\mathcal{P}$;

(iii). X 上所有开子集的族 $\mathcal{B}$. 我们依次得到正规性，遗传正规性和单调正规性.

2 线性层空间的刻画

作为层空间的推广， Vaughan 在文献 [5] 中引入了线性层空间的定义，并对它进行了系统的研究，得到了很多重要的结论. 我们以邻域约定为工具对线性层空间进行了研究，从单调正规性的角度给出了它的一个重要刻画.

定义 2.1[5] 设 $(X, \mathcal{T})$ 为 T_1 空间， α 是一个初始序数，并且 $\alpha \geq \omega$. 空间 $(X, \mathcal{T})$ 称为可 α- 层化的或线性层化的，若存在一个映射 $S : \alpha \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ 满足下列条件 (其中 $S(\beta, U) = U_\beta$):

LS_1: 对任意的 $\beta < \alpha$ 和 $U \in \mathcal{T}$, 都有 $\overline{U_\beta} \subset U$;

LS_2: 对任意的 $U \in \mathcal{T}$, 都有 $\cup\{U_\beta : \beta < \alpha\} = U$;

LS_3: 若 $U \subset W$, 则对任意的 $\beta < \alpha$, 都有 $U_\beta \subset W_\beta$;

LS_4: 若 $\gamma < \beta < \alpha$, 则对任意的 $U \in \mathcal{T}$, 都有 $U_\gamma \subset U_\beta$.

T_1 空间 $(X, \mathcal{T})$ 称为 α- 层空间，如果 α 是使得 X 可线性层化的最小的初始序数.

定义 2.2[5] 空间 $(X, \mathcal{T})$ 的子集对的族 $\mathcal{P}$ 称为线性垫状的, 如果在 $\mathcal{P}$ 上的有一个线性序 $\leq$, 使得对每一个关于 $\leq$ 有上界的子族 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, 都有 $\overline{\cup\{P_1 : (P_1, P_2) \in \mathcal{P}'\}} \subset \cup\{P_2 : (P_1, P_2) \in \mathcal{P}'\}$.

定理 2.3[5] 设 $(X, \mathcal{T})$ 是 T_1 空间， α 是一个初始序数，则下列条件等价：

(i). $(X, \mathcal{T})$ 可 α- 层化的;

(ii). $(X, \mathcal{T})$ 有一个线性垫状对基 $\mathcal{P}$, 并且 α 与 $\mathcal{P}$ 共尾;

(iii). 存在从 X 到 $\mathcal{T}$ 的映射的族 $\{g_\beta : \beta < \alpha\}$, 使得：(a) 对任意的 $\beta < \alpha$, 都有 $x \in g_\beta(x)$; (b) 对任意的 $F \subset X$, 若对每一个 $\beta < \alpha$ 都有 $y \in \overline{\cup\{g_\beta(x) : x \in F\}}$, 则 $y \in \overline{F}$; (c) 若 $\beta < \gamma < \alpha$, 则对任意的 x 都有 $g_\beta(x) \supset g_\gamma(x)$.

性质 2.4 设 $(X, \mathcal{T})$ 可 α- 层化的，则存在 $\mathcal{T}$ 上的一个开邻域约定 $\mathcal{A} = \{\{(x)_U : x \in U\} : U \in \mathcal{T}\}$ 满足：若 $(x)_U \cap (y)_V \neq \emptyset$, 则 $x \in V$ 或 $y \in U$.

证明 设 $S : \alpha \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ 是定义 2.1 中的层映射. 对任意的 $x \in U \in \mathcal{T}$, 令 $m(U, x)$ 为使得 $x \in U_\beta \subset U$ 的最小的序数 $\beta < \alpha$. 定义 $(x)_U = U_{m(U,x)} \setminus \overline{(X \setminus \{x\})_{m(U,x)}}$, 则 $(x)_U$ 为点 x 的一个开邻域. 令 $\mathcal{A} = \{\{(x)_U : x \in U\} : U \in \mathcal{T}\}$, 则 $\mathcal{A}$ 显然是 $\mathcal{T}$ 上的一个开邻域约定.

令 $(x)_U \cap (y)_V \neq \emptyset$, 且不妨设 $m(U, x) \leq m(V, y)$, 则 $y \in U$. 若不然，则有 $U \subset X \setminus \{y\}$, 从

而对每一个 $\beta<\alpha$ 都有 $U_\beta \subset (X\setminus\{y\})_\beta$. 于是，有

$$(x)_U \subset U_{m(U,x)} \subset (X\setminus\{y\})_{m(U,x)} \subset (X\setminus\{y\})_{m(V,y)}.$$

由于 $(y)_V = V_{m(V,y)} \setminus \overline{(X\setminus\{y\})_{m(V,y)}}$, 我们得到 $(x)_U \cap (y)_V = \emptyset$, 矛盾.

推论 2.5 线性层空间是单调正规的.

定理 2.6 空间 $(X,\mathcal{T})$ 可 α- 层化的充要条件是, 存在一个 $\mathcal{T}$ 上的开邻域约定的序列 $\{\mathcal{A}_\delta : \delta\in\alpha\}$ 使得：对任意的 $(x)_U^{\beta,\gamma}\in\mathcal{A}_\gamma$ 和 $(y)_V^{\xi,\eta}\in\mathcal{A}_\eta$, 都有

$$\begin{aligned}&(x)_U^{\beta,\gamma}\cap(y)_V^{\xi,\eta}\neq\emptyset,\ \ \eta\geq\beta\Longrightarrow y\in U,\\&(x)_U^{\beta,\gamma}\cap(y)_V^{\xi,\eta}\neq\emptyset,\ \ \gamma\geq\xi\Longrightarrow x\in V.\end{aligned}\tag{**}$$

其中对每一个 $\delta<\alpha$, $\mathcal{A}_\delta=\{(x)_U^{\beta,\delta}: x\in U\in\mathcal{T},\ \beta$ 由 x 和 U 确定 $\}$.

证明 *必要性*. 根据定理 2.3, 取 $\mathcal{P}$ 为 X 的线性垫状对基，并且 $\{P_\beta:\beta<\alpha\}$ 是 $\mathcal{P}$ 的一个子族，满足：对每一个 $P\in\mathcal{P}$, 存在某个 $\beta<\alpha$ 使得 $P<P_\beta$.

由性质 2.4 可知，存在 $\mathcal{T}$ 上的一个开邻域约定 $\mathcal{A}'=\{\{(x)'_U : x\in U\}: U\in\mathcal{T}\}$ 满足 $(*)$. 对每一个 $(x)'_U\subset\mathcal{A}'$, 令 $\gamma=\min\{\beta:$ 存在某个 $P=(P_1,P_2)\in\mathcal{P}$ 使得 $P<P_\beta\in\mathcal{P}',\ x\in P_1\subset P_2\subset(x)'_U\}$. 定义

$$(x)_U^\gamma=\cup\{P_1:(P_1,P_2)<P_\gamma,\ x\in P_1\subset P_2\subset(x)'_U\},$$

并且 $\mathcal{A}_\gamma=\{\{(x)_U^\gamma: x\in U\}: U\in\mathcal{T}\}$, 则 $\mathcal{A}=\cup\{\mathcal{A}_\gamma\}$ 是 $\mathcal{T}$ 上一个开邻域的约定.

固定某个 $\delta<\alpha$. 对任意的 $x\in U\in\mathcal{T}$, 存在某个 γ 使得 $x\in(x)_U^\gamma\subset U$. 令

$$\mathcal{A}_{x,U}^{\gamma,\delta}=\{(y)_V^\sigma\in\mathcal{A}_\sigma:(y)_V^\sigma\cap(x)_U^\gamma\neq\emptyset,\ \sigma<\delta, x\notin V\in\mathcal{T}\},$$

则

$$(x)_U^\gamma\setminus\cup\{V\in\mathcal{T}:(y)_V^\sigma\in\mathcal{A}_{x,U}^{\gamma,\delta}\}\neq\emptyset.$$

根据 $(x)_U^\gamma$ 的定义和 $\mathcal{P}$ 的线性垫状性质，容易验证 $\overline{\cup\mathcal{A}_{x,U}^{\gamma,\delta}}\subset\cup\{V\in\mathcal{T}:(y)_V^\sigma\in\mathcal{A}_{x,U}^{\gamma,\delta}\}$, 从而 $(x)_U^{\gamma,\delta}=(x)_U^\gamma\setminus\overline{\cup\mathcal{A}_{x,U}^{\gamma,\delta}}$ 是点 x 的一个开邻域. 令 $\mathcal{A}_\delta=\{\{(x)_U^{\gamma,\delta}:x\in U\}:U\in\mathcal{T}\}$, 则 $\mathcal{A}_\delta$ 是 $\mathcal{T}$ 上的一个开邻域约定.

根据 $\mathcal{A}_\delta$ 的定义容易验证， $\{\mathcal{A}_\delta:\delta\in\alpha\}$ 是 $\mathcal{T}$ 上的一个下降的开邻域约定序列.

令 $(x)_U^{\beta,\gamma}\cap(y)_V^{\xi,\eta}\neq\emptyset$ 并且 $\eta\geq\beta$, 则有 $(x)_U^\beta\cap(y)_V^\xi\neq\emptyset$. 若 $y\notin U$, 根据 $(y)_V^{\xi,\eta}=(y)_V^\xi\setminus\overline{\cup\mathcal{A}_{y,V}^{\xi,\eta}}$, 其中

$$\mathcal{A}_{y,V}^{\xi,\eta}=\{(z)_W^\sigma\in\mathcal{A}_\eta:(z)_W^\sigma\cap(y)_V^\xi\neq\emptyset,\ \sigma\leq\eta,\ \ \text{并且}\ y\notin W\in\mathcal{T}\},$$

就有 $(x)_U^\beta\in\mathcal{A}_{y,V}^{\xi,\eta}$, 从而 $(y)_V^{\xi,\eta}\cap(x)_U^\beta=\emptyset$. 于是，从 $(x)_U^{\beta,\gamma}\subset(x)_U^\beta$ 可得 $(x)_U^{\beta,\gamma}\cap(y)_V^{\xi,\eta}=\emptyset$, 矛盾. 所以， $y\in U$.

类似地，可以证明，当 $(x)_U^{\beta,\gamma}\cap(y)_V^{\xi,\eta}\neq\emptyset$ 并且 $\gamma\geq\xi$ 时，有 $x\in V$.

充分性. 在 $\mathcal{T}$ 上定义一个良序，令 $\alpha\times\alpha\times\mathcal{T}$ 带有字典序，则显然

$$\mathcal{P}=\{P=((x)_U^{\gamma,\beta},U):x\in U,\ (\gamma,\beta,U)\in\alpha\times\alpha\times\mathcal{T}\}$$

是空间 X 一个对基.

设 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ 并且有一个上界 $P_\tau = ((z)_W^{\rho,\theta}, W)$, 则对每一个 $((x)_U^{\gamma,\beta}, U) \in \mathcal{P}'$, 有 $\gamma \le \rho$. 若

$$y \in \overline{\cup\{(x)_U^{\gamma,\beta} : ((x)_U^{\gamma,\beta}, U) \in \mathcal{P}'\}},$$

则

$$(y)_V^{\xi,\rho+1} \cap (\cup\{(x)_U^{\gamma,\beta} : ((x)_U^{\gamma,\beta}, U) \in \mathcal{P}'\}) \neq \emptyset,$$

其中 V 是点 y 的一个开邻域, ξ 由 y 和 V 确定. 于是，存在某个 $((x)_U^{\gamma,\beta}, U) \in \mathcal{P}'$ 使得 $(y)_V^{\xi,\rho+1} \cap (x)_U^{\gamma,\beta} \neq \emptyset$, 从而有 $y \in U \subset \cup\{U : ((x)_U^{\gamma,\beta}, U) \in \mathcal{P}'\}$. 因此，有

$$\overline{\cup\{(x)_U^{\gamma,\beta} : ((x)_U^{\gamma,\beta}, U) \in \mathcal{P}'\}} \subset \cup\{U : ((x)_U^{\gamma,\beta}, U) \in \mathcal{P}'\}.$$

所以， $\mathcal{P}$ 是线性垫状的.

最后，从 $\alpha \times \alpha \times \mathcal{T}$ 上序的定义容易看出， α 与 $\mathcal{P}$ 是共尾的.

比较定理 1.4 和定义 2.6 可以看到，单调正规空间可以用满足条件 $(*)$ 的邻域约定刻画，线性层空间可以用满足条件 $(**)$ 的邻域约定的序列刻画，而条件 $(*)$ 显然是条件 $(**)$ 当 $\alpha = 1$ 时的特例. 因此，线性层空间可以看作是单调正规空间的一般化，而且我们可以把 α- 层空间称为 α- 单调正规空间.

参考文献:

[1] CEDER J G. *Some generalizations of metric spaces* [J]. Pacific J. Math., 1961, **11**: 105–125.
[2] BORGES C J R. *On stratifiable spaces* [J]. Pacific J. Math., 1966, **17**: 1–16.
[3] HEATH R W, LUTZER D J, ZENOR P L. *Monotonically normal spaces* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **178**: 481–493.
[4] HUNG H H. *Metrization and stratification of squares of topological spaces* [J]. Topology Appl., 1998, **82**: 205–210.
[5] VAUGHAN J E. *Linearly stratifiable spaces* [J]. Pacific J. Math., 1972, **43**: 253–266.
[6] 高国士. 拓扑空间论 [M]. 北京：科学出版社， 2000.
GAO Guo-shi. *Theory of Topological Spaces* [M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)

A Characterization of Linearly Stratifiable Spaces

XU Yu-ming[1,2], *JIANG Shou-li*[1]
(1. School of Mathematics and System Science, Shandong University, Ji'nan 250100, China;
2. School of Mathematical Sciences, Suzhou University, Jiangsu 215006, China)

Abstract: By using neighborhood assignment, we prove that the linearly stratifiable space is monotonically normal, and give a new characterization of linearly stratifiable spaces in terms of monotonic normality.

Key words: neighborhood assignment; monotonic normality; cushioned pair-base; linearly stratifiable space.