第27卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.2
2007年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2007

文章编号: 1000-341X(2007)02-0368-09 **文献标识码**: **A**

具有性质 (G_k) 的 Wakamatsu 倾斜模

张 必 成 [1,2]

(1. 湘潭大学数学系，湖南 湘潭 411105; 2. 苏州大学数学科学学院，江苏 苏州 215006)
(E-mail: zhangbicheng@126.com)

摘 要: 本文引进了具有性质 (G_k) 的 Wakamatsu 倾斜模的概念，并用同调有限子范畴的性质对其进行了刻画. 所得结果推广了黄兆泳在文献 [1] 和 [11] 中的工作.

关键词: Wakamatsu 倾斜模；正变有限子范畴；反变有限子范畴.
MSC(2000): 16D50; 16D10
中图分类: O153.3

1 引 言

本文中我们总假定 R 是右 Noether 环， S 是左 Noether 环， T_R 是 Wakamatsu 倾斜模 [2]，且 $S=\mathrm{End}(T_R)$. 用 mod-R(或 S-mod) 表示有限生成右 R-(或左 S-) 模范畴. $\mathrm{add}(T_R)$ 表示由 T_R 的有限直和的直和项所组成的 mod-R 的子模范畴.

定义 1[5] 设 $\mathcal{C}\supset\mathcal{D}$ 是 mod-R 的两个子模范畴，且设 $C\in\mathcal{C}, D\in\mathcal{D}$, 这里 $\mathrm{add}\mathcal{D}$ 是由与 $\mathcal{D}$ 上的模的有限直和的直和项同构的模组成的 mod-R 的子范畴. 如果对任意 $X\in\mathrm{add}\mathcal{D}$, $\mathrm{Hom}_R(X,D)\to\mathrm{Hom}_R(X,C)$ 是满的，则称态射 $D\to C$ 是 C 的一个右 $\mathcal{D}$- 逼近. 如果 $\mathcal{C}$ 的每一个模都有一个右 $\mathcal{D}$- 逼近，则称 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{C}$ 上反变有限，或称 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 的一个反变有限子范畴. 对偶地，如果对任意 $X\in\mathrm{add}\mathcal{D}$, $\mathrm{Hom}_R(D,X)\to\mathrm{Hom}_R(C,X)$ 是满的，则称态射 $C\to D$ 是 C 的一个左 $\mathcal{D}$- 逼近. 如果 $\mathcal{C}$ 的每一个模都有一个左 $\mathcal{D}$- 逼近，则称 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{C}$ 上正变有限，或称 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 的一个正变有限子范畴. 如果 $\mathcal{C}$ 的每一个模既有右 $\mathcal{D}$- 逼近又有左 $\mathcal{D}$- 逼近，则称 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{C}$ 上函子有限，或称 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 的一个函子有限子范畴. 反变有限子范畴，正变有限子范畴，函子有限子范畴统称为同调有限子范畴. 类似地，可定义 S-mod 的同调有限子范畴的概念.

为了叙述方便起见，首先给出以下记号：

$$\mathrm{gen}^{\ell}(T_R)=\{X\in\text{mod-}R|0\to X_\ell\to\cdots\to X_0\to X\to 0, X_i\in\mathrm{add}(T_R),\ell\text{是给定的整数}\};$$
$$W_T^t=\{X\in\text{mod-}R|\mathrm{Ext}_R^i(X,T)=0,\ 1\le i\le t\};$$
$$W_T^\infty=\{X\in\text{mod-}R|\mathrm{Ext}_R^i(X,T)=0,\ i\ge 1\};$$
$$T_R\text{-grade}(X_R)\ge\ell\Leftrightarrow\mathrm{Ext}_R^i(X,T)=0,\ \ 0\le i\le\ell-1;$$
$$\mathrm{st}.T_R\text{-grade}(X_R)\ge\ell\Leftrightarrow T_R\text{-grade}(X_0)\ge\ell,\text{对}X\text{的所有子模}X_0,$$

这里 t,i,ℓ 是正整数. 用 $(\ )^T$ 表示 $\mathrm{Hom}_R(\ ,T)$和$\mathrm{Hom}_S(\ ,T)$. 如果 $M\in W_T^t$, 我们称 M 是 W_T^t-模. 设 $P_1\xrightarrow{f}P_0\to A\to 0$ 是 A 的一个投射分解, 从而有正合列 $0\to A^T\to P_0^T\xrightarrow{f^T}P_1^T\to X\to 0$,

收稿日期: 2005-07-05; **接受日期**: 2005-11-27
基金项目: 国家自然科学基金 (10171074); 湖南省自然科学基金 (04JJ4001); 湖南省教育厅资助项目；湘潭大学博士启动基金 (06QDZ18).

其中 $X = \mathrm{Coker} f^T$. 我们称 X 为 A 的广义 Auslander 转置. 如果 $\mathrm{Ext}_S^i(X,T)=0$, 对 $1 \le i \le k$, 则称 A 是 T-k- 挠自由模. 由文献 [6] 知， X 在文献 [6] 定义 2 的意义下与 A 的投射分解选取无关. 为了方便起见，把 X 记为 $\mathrm{Tr}_T A$. 设 Λ 是一个环， A 是一个左 (或右)Λ- 模，我们用 $\mathrm{l.fd}_\Lambda(A)$(或 $\mathrm{r.fd}_\Lambda(A)$) 表示 A 的左 (或右) 平坦维数， $\mathrm{l.id}_\Lambda(A)$(或 $\mathrm{r.id}_\Lambda(A)$) 表示 A 的左 (或右) 内射维数.

对任意正整数 k, Auslander M. 在文献 [4] 中引进了非交换形式的 k-Gorenstein 代数，并证明了 k-Gorenstein 代数是左 - 右对称的. Auslander M. 和 Reiten I. 在文献 [4] 中用模的同调有限子范畴研究了 k-Gorenstein 代数. 为了把 k-Gorenstein 代数的结果推广到 Wakamatsu 倾斜模的情形， Wakamatsu T. 在文献 [2] 中引进了具有 Auslander k-Gorenstein 性质的 Wakamatsu 倾斜模. 设 $0 \to_S T \to I_0(_ST) \to I_1(_ST) \to \cdots \to I_i(_ST)\cdots \to \cdots$ 为 $_ST$ 的极小内射分解，如果 $\mathrm{l.fd}_R(\mathrm{Hom}_S(T, I_i(_ST)) \le i$ 对 $0 \le i \le k-1$ 成立，则称 T_R 具有 Auslander k-Gorenstein 性质. 显然，具有 Auslander k-Gorenstein 性质的 Wakamatsu 倾斜模 T_R 是 k-Gorenstein 代数 (k-Gorenstein 代数的定义见文献 [3]) 的推广. Wakamatsu T. 在文献 [2] 对具有 Auslander k-Gorenstein 性质的 Wakamatsu 倾斜模 T_R 进行了研究，所得结果推广了文献 [3] 和 [4] 的相应结论 (见文献 [2] 定理 7.2, 定理 7.3, 定理 7.5 和引理 7.4).

黄兆泳在文献 [1] 中引进了拟 k-Gorenstein 代数 (定义见文献 [1]), 这是较 k-Gorenstein 代数更大的类，且不是左 - 右对称的. 在文献 [1] 中黄兆泳用同调有限子范畴的方法研究了拟 k-Gorenstein 代数. 受文献 [1] 和 [2] 的启发，本文将把拟 k-Gorenstein 代数推广到 Wakamatsu 倾斜模的情形，并用同调有限子范畴对其进行研究. 为此给出下列定义：

定义 2 设 $0 \to {}_ST \to I_0(_ST) \to I_1(_ST) \to \cdots \to I_i(_ST)\cdots \to \cdots$ 是 $_ST$ 的极小内射分解，如果 $\mathrm{l.fd}_R(\mathrm{Hom}_S(T, I_i(_ST)) \le i+1$ 对 $0 \le i \le k-1$ 成立，则称 Wakamatsu 倾斜模 T_R 具有性质 (G_k).

显然，具有性质 (G_k) 的 Wakamatsu 倾斜模是拟 k-Gorenstein 代数， k-Gorenstein 代数和具有 Auslander k-Gorenstein 性质的 Wakamatsu 倾斜模三者的推广.

定义 3 对任意 $A \in W_T^k$, 如果 A 是 T- 无挠模，则称 T_R 具有性质 (W^k). 类似地，我们可定义 $_ST$ 具有性质 (W^k).

设 $A \in$mod-R, 用 $\sigma_A : A \to A^{TT}$ (对任意 $x \in A, f \in A^T$, 定义 $\sigma_A(x)(f) = f(x)$) 表示典范赋值同态. 如果 σ_A 是单的，则称 A 是 T- 无挠模；如果 σ_A 是同构，则称 A 是 T- 自反模. 由文献 [10] 引理 2.1 知 T- 无挠模， T- 自反模分别与 T-1- 挠自由模， T-2- 挠自由模一致.

2 具有性质 (G_k) 的 Wakamatsu 倾斜模

下面的引理是众所周知的 [7].

引理 1 设 $_SI$ 是内射模， X_R 是有限生成的. 则有

$$\mathrm{Tor}_i^R(X, \mathrm{Hom}_S(T, I)) \cong \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Ext}_R^i(X,T), I)$$

对所有 $i \ge 0$ 成立.

推论 1 对任意内射模 $_SI$, 对所有 $C \in \mathrm{mod}$-R,

$$\mathrm{l.fd}_R(\mathrm{Hom}_S(T,I)) \le k \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Ext}_R^{k+1}(C,T), I) = 0.$$

证明 由引理 1 易得.

为了给出具有性质 (G_k) 的 Wakamatsu 倾斜模 T_R 的一些性质，我们需要下面的：

定理 1 设 m 是非负整数， $0\to {}_ST\to I_0({}_ST)\to I_1({}_ST)\to\cdots\to I_i({}_ST)\cdots\to\cdots$ 为 ${}_ST$ 的极小内射分解， k 是一个正整数. 那么 $\mathrm{l.fd}_R(\mathrm{Hom}_S(T,\oplus_{i=0}^{k-1}I_i({}_ST))\leq k+m\Leftrightarrow \mathrm{st.}{}_ST\text{-}\mathrm{gradeExt}_R^{k+m+1}(M,T)\geq k$ 对所有 $M\in\mathrm{mod}\text{-}R$ 成立.

特别地， $\mathrm{l.fd}_R(\mathrm{Hom}_S(T,\oplus_{i=0}^{k-1}I_i({}_ST))\leq k\Leftrightarrow \mathrm{st.}{}_ST\text{-}\mathrm{gradeExt}_R^{k+1}(M,T)\geq k$ 对所有 $M\in$ mod-R 成立.

证明 "$\Leftarrow$". 对 i 进行归纳法. 假设 $\mathrm{st.}{}_ST\text{-}\mathrm{gradeExt}_R^{k+m+1}(M,T)\geq k$ 对所有 $M\in\mathrm{mod}\text{-}R$ 成立. 首先证明 $\mathrm{l.fd}_R(\mathrm{Hom}_S(T,I_0({}_ST)))\leq k+m$. 因为 $\mathrm{st.}{}_ST\text{-}\mathrm{gradeExt}_R^{k+m+1}(M,T)\geq k$, 所以 $\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Ext}_R^{k+m+1}(M,T),T)=0$. 从而有 $\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Ext}_R^{k+m+1}(M,T),I_0({}_ST))=0$. 否则，因为 T 是 $I_0({}_ST)$ 的本质子模，从而有 $0\neq f:\mathrm{Ext}_R^{k+m+1}(M,T)\to I_0({}_ST)$ 使得 $\mathrm{Im}f\cap T\neq 0$. 这样就有 $\mathrm{Ext}_R^{k+m+1}(M,T)\to I_0({}_ST)$ 的子模 $X=f^{-1}(T)$ 使得 $\mathrm{Hom}_S(X,T)\neq 0$, 而这与 $\mathrm{st.}{}_ST\text{-}\mathrm{gradeExt}_R^{k+m+1}(M,T)\geq k$ 矛盾. 因此由推论 1 有 $\mathrm{l.fd}_R(\mathrm{Hom}_S(T,I_0(T)))\leq k+m$.

现假设 $i\geq 1$. 考虑正合列 $0\to\Omega^{-(i-1)}({}_ST)\to I_{i-1}({}_ST)\to\Omega^{-i}({}_ST)\to 0$, 其中 $\Omega^{-i}({}_ST)$ 表示 ${}_ST$ 的极小内射分解的第 i 个核. 那么对 $\mathrm{Ext}_R^{k+m+1}(M,T)$ 的任意子模 X, 有正合列

$$\mathrm{Hom}_S(X,I_{i-1}({}_ST))\to\mathrm{Hom}_S(X,\Omega^{-i}({}_ST))\to\mathrm{Ext}_S^1(X,\Omega^{-(i-1)}({}_ST)).$$

因为

$$\mathrm{st.}{}_ST--\mathrm{gradeExt}_R^{k+m+1}(M,T)\geq k.$$

从而 $\mathrm{Ext}_S^1(X,\Omega^{-(i-1)}({}_ST))\cong\mathrm{Ext}_S^i(X,T)=0$ 对所有 $1\leq i\leq k-1$ 成立. 由归纳假设和推论 1 有 $\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Ext}_R^{k+m+1}(M,T),I_{i-1}({}_ST))=0$. 由于 $I_{i-1}({}_ST)$ 是内射模，从而 $\mathrm{Hom}_S(X,I_{i-1}({}_ST))$ 是 $\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Ext}_R^{k+m+1}(M,T),I_{i-1}({}_ST))=0$ 的商模，故 $\mathrm{Hom}_S(X,I_{i-1}({}_ST))=0$. 因此

$$\mathrm{Hom}_S(X,\Omega^{-i}({}_ST))=0.$$

注意到 $I_i({}_ST)$ 是 $\Omega^{-i}({}_ST)$ 的内射包络，用类似 $i=0$ 的情形的证明方法，可得

$$\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Ext}_R^{k+m+1}(M,T),I_i({}_ST))=0,$$

从而 $\mathrm{l.fd}_R(\mathrm{Hom}_S(T,I_i({}_ST)))\leq k+m$. 这样充分性得证.

"$\Rightarrow$". 设 $\mathrm{l.fd}_R(\mathrm{Hom}_S(T,\oplus_{i=0}^{k-1}I_i({}_ST))\leq k+m$. 则 $\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Ext}_R^{k+m+1}(M,T),\oplus_{i=0}^{k-1}I_i({}_ST))=0$. 设 X 是 $\mathrm{Ext}_R^{k+m+1}(M,T)$ 的一个子模，有 $\mathrm{Hom}_S(X,\oplus_{i=0}^{k-1}I_i({}_ST))=0$. 令 $\Omega^0({}_ST)=T$ 和 $\Omega^{-i}({}_ST)=\mathrm{Im}(I_{i-1}({}_ST)\to I_i({}_ST))$ 对所有 $1\leq i\leq k-1$ 成立. 因为 $\mathrm{Hom}_S(X,\oplus_{i=0}^{k-1}I_i({}_ST))\cong\oplus_{i=0}^{k-1}\mathrm{Hom}_S(X,I_i({}_ST))$ 和正合列 $0\to\Omega^{-i}({}_ST)\to I_i({}_ST)\to\Omega^{-(i+1)}({}_ST)\to 0$, 那么

$$\mathrm{Hom}_S(X,\Omega^{-i}({}_ST))=0$$

对所有 $0\leq i\leq k-1$ 成立. 不难证明 $\mathrm{Ext}_S^{i+1}(X,\Omega^0({}_ST))\cong\mathrm{Ext}_S^1(X,\Omega^{-i}({}_ST))$和$\mathrm{Ext}_S^1(X,\Omega^{-i}({}_ST))\cong\mathrm{Hom}_S(X,\Omega^{-(i+1)}({}_ST))$ 对 $0\leq i\leq k-2$ 成立. 因此有 $\mathrm{Hom}_S(X,T)=0=\mathrm{Ext}_S^i(X,T)$ 对所有 $1\leq i\leq k-1$ 成立.

推论 2 设 m 是非负整数，则 $\mathrm{l.fd}_R(\mathrm{Hom}_S(T,I_i({}_ST))\leq i+m+1$ 对所有 $0\leq i\leq k-1$ 成立 $\Leftrightarrow \mathrm{st.}{}_ST\text{-}\mathrm{gradeExt}_R^{i+m+1}(M,T)\geq i$ 对任意 $M\in\mathrm{mod}\text{-}R$ 和对所有 $1\leq i\leq k$ 成立. 特别地， $\mathrm{l.fd}_R(\mathrm{Hom}_S(T,I_i({}_ST))\leq i+1$对所有$0\leq i\leq k-1\Leftrightarrow \mathrm{st.}{}_ST\text{-}\mathrm{gradeExt}_R^{i+1}(M,T)\geq i$ 对任意 $M\in\mathrm{mod}\text{-}R$ 和对所有 $1\leq i\leq k$ 成立.

证明 由定理 1 直接可得.

由推论 2 的后半部分可知： T_R 是具有性质 (G_k) 的 Wakamatsu 倾斜模等价于

$$\mathrm{st.}_S T\text{-grade } \mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,T) \geq i$$

对任意 $M \in \mathrm{mod}\text{-}R$ 和对所有 $1 \leq i \leq k$ 成立.

引理 2 设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是正合序列，则对适当的广义 Auslander 转置，有长正合列：

$$0 \to C^T \to B^T \to A^T \to \mathrm{Tr}_T C \to \mathrm{Tr}_T B \to \mathrm{Tr}_T A \to 0.$$

证明 考虑下面具有后两行分裂正合的正合交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u] & B \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] \arrow[u] & F_0 \oplus G_0 \arrow[r] \arrow[u] & G_0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] \arrow[u] & F_1 \oplus G_1 \arrow[r] \arrow[u] & G_1 \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

图 1

这里 $F_i, G_i, i = 0, 1$ 是投射模. 那么有下列正合交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C^T \arrow[r] \arrow[d] & B^T \arrow[r] \arrow[d] & A^T \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G_0^T \arrow[r] \arrow[d] & F_0^T \oplus G_0^T \arrow[r] \arrow[d] & G_0^T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G_1^T \arrow[r] \arrow[d] & F_1^T \oplus G_1^T \arrow[r] \arrow[d] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathrm{Tr}_T C \arrow[d] & \mathrm{Tr}_T B \arrow[d] & \mathrm{Tr}_T A \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 2

于是由 Snake 引理知 $0 \to C^T \to B^T \to A^T \to \mathrm{Tr}_T C \to \mathrm{Tr}_T B \to \mathrm{Tr}_T A \to 0$ 正合.

引理 3 设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是正合序列，则有：

(1) 如果 A, C 是 T-k- 挠自由模， st.$_ST$-grade$(\mathrm{Ext}_R^1(C,T)) \geq k$, 则 B 是 T-k- 挠自由模;

(2) 如果 B 是 T-k- 挠自由模，C 是 T-$(k-1)$- 挠自由模，st.$_ST$-grade$(\mathrm{Ext}_R^1(C,T)) \geq k-1$, 则 A 是 T-k- 挠自由模;

(3) 如果 A 是 T-$(k+1)$- 挠自由模，B 是 T-k- 挠自由模，st.$_ST$-grade$(\mathrm{Ext}_R^1(C,T)) \geq k+1$, 则 C 是 B 是 T-k- 挠自由模.

证明 由引理 2 可得正合列： $0 \to L \to \mathrm{Tr}_T C \to \mathrm{Tr}_T B \to \mathrm{Tr}_T A \to 0$, 这里 $L = \mathrm{Coker}(B^T \to A^T)$. 从而又有正合列 $0 \to L \to \mathrm{Tr}_T C \to M \to 0$ 和 $0 \to M \to \mathrm{Tr}_T B \to \mathrm{Tr}_T A \to 0$.

考察以上两正合列相应的 Ext 的长正合列，易得该引理的陈述 (1), (2), (3).

引理 4 设 $\mathcal{D}$ 是 mod-R 的一个全子范畴且在直和项下封闭， $M \in$mod-R, $M \xrightarrow{f} D$ 是一个左 $\mathcal{D}$- 逼近. 那么对任意 $C \in \mathcal{D}$, $M \xrightarrow{\alpha} D \oplus C$ 也是 M 的一个左 $\mathcal{D}$- 逼近，这里 $\alpha = \binom{f}{0}$.

证明 对于任意 $D' \in \mathcal{D}$, 考虑下图:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & D \arrow[r, "h"] & D \oplus C \\ D' & & \end{tikzcd}$$

图 3

这里 $h = \binom{1}{0}$. 由于 $M \xrightarrow{f} D$ 是一个左 $\mathcal{D}$- 逼近，从而存在模同态 $\beta : D \to D'$ 使得 $g = \beta f$. 令 $\gamma = (\beta, 0)$, 显然 γ 是 $D \oplus C$ 到 D' 的模同态. 容易验证， $\alpha = hf$, $g = \gamma\alpha$. 因此， $M \xrightarrow{\alpha} D \oplus C$ 是 M 的一个左 $\mathcal{D}$- 逼近.

定理 2 设 $M \in$ mod-R, k 是一个整正数. 如果 T_R 是 mod-R 中的一个生成元且对任意 $1 \leq t \leq k-1$ 成立， st.$_ST$-gradeExt$_R^{t+1}(M,T) \geq t$ 成立，那么对任意 $1 \leq t \leq k$ 有正合列:

$$0 \to K_t(M) \xrightarrow{f_t} E_t(M) \xrightarrow{g_t} M \to 0$$

使得 $K_t(M) \in \mathrm{gen}^{t-1}(T_R)$ 且 $E_t(M)$ 是 W_T^t- 模.

证明 对 k 作归纳法. 当 $k=1$ 时，由文献 [8] 引理 6.9 知结论成立. 现假设 $k \geq 2$, $M \in$mod-R 且满足 st.$_ST$-gradeExt$_R^{t+1}(M,T) \geq t$, 对任意 $1 \leq t \leq k-1$ 成立.

因为 $M \in$ mod-R, T_R 是 mod-R 中的一个生成元，从而有 mod-R 中的正合序列： $0 \to L \xrightarrow{f} T^n \xrightarrow{g} M \to 0$, 其中 n 是某个正整数. 那么有 $\mathrm{Ext}_R^t(L,T) \cong \mathrm{Ext}_R^{t+1}(M,T)$ 对所有 $t \geq 1$ 且 st.$_ST$-grade $\mathrm{Ext}_R^t(L,T) \geq t \geq t-1$ 对所有 $1 \leq t \leq k-1$ 成立. 由归纳假设，有正合列:

$$0 \to K_{k-1}(L) \xrightarrow{\alpha} E_{k-1}(L) \xrightarrow{\beta} L \to 0,$$

这里 $K_{k-1}(L) \in \mathrm{gen}^{k-2}(T_R)$, 且$E_{k-1} \in W_T^{k-1}$. 从而 $\mathrm{Ext}_R^t(K_{k-1}(L),T) \cong \mathrm{Ext}_R^{t+1}(L,T)$ 对所有 $1 \leq t \leq k-2$ 成立. 因此 st.$_ST$-grade $\mathrm{Ext}_R^t(K_{k-1}(L),T) \geq t+1$ 对所有 $1 \leq t \leq k-2$ 成立.

注意到 $K_{k-1}(L) \in \mathrm{gen}^{k-2}(T_R)$. 如果 $k=2$, 那么 $K_{k-1}(L) \in \mathrm{add}(T_R)$. 如果 $k \geq 3$, 有正合列 $0 \to X_{k-2} \xrightarrow{f_{k-2}} X_{k-3} \to \cdots \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \to K_{k-1}(L) \to 0$, 这里 $X_i \in \mathrm{add}(T_R)$ 对 $i = 1, 2, \ldots, k-2$. 显然, 对任意正整数 ℓ, X_i 是 T-ℓ- 挠自由模. 容易看到 $\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Coker}f_{k-2},T) \cong \mathrm{Ext}_R^{k-2}(K_{k-1}(L),T)$, 因此 st.$_ST$-grade $\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Coker}f_{k-2},T) \geq k-1$. 由引理 3(3) 有 $\mathrm{Coker}f_{k-2}$ 是 T-$(k-2)$- 挠自由模. 连续 $(k-3)$ 次应用引理 3(3) 易知 $\mathrm{Coker}f_2$ 是 T- 自反模. 但

$$\text{st.}_ST\text{-grade } \mathrm{Ext}_R^1(K_{k-1}(L),T) \geq 2,$$

因此由引理 3(3) 知 $K_{k-1}(L)$ 是 T- 无挠模. 这样得：如果 $k \geq 2$, 那么 $K_{k-1}(L)$ 是 T- 无挠模. 另一方面，由于 L 是 T^n 的子模，所以 L 是 T- 无挠模. 由文献 [9] 定理 3.2 知， $E_{k-1}(L)$ 是 T- 无挠模.

设 $Q \xrightarrow{h_1} (E_{k-1}(L))^T \to 0$ 是 S-mod 中的正合序列,其中 Q 是投射模,则 $0 \to (E_{k-1}(L))^{TT} \xrightarrow{h_1^T} Q^T$ 是 mod-R 中的正合序列. 令 h 是 $E_{k-1}(L) \xrightarrow{\sigma_{E_{k-1}(L)}} E_{k-1}(L)^{TT} \xrightarrow{h_1^T} Q^T$ 的合成，即 $h = h_1^T\sigma_{E_{k-1}(L)}$. 因为 $E_{k-1}(L)$ 是 T- 无挠模，从而 $\sigma_{E_{k-1}(L)}$和h 是单同态. 对任意 $P \in \mathrm{add}(T_R)$, 设 $g : E_{k-1}(L) \to P$ 是任意模同态，因为 P^T 是投射模，从而有正合列

$$\mathrm{Hom}_S(P^T, Q) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_S(P^T,\ h_1)} \mathrm{Hom}_S(P^T, (E_{k-1}(L))^T) \to 0,$$

因此存在 $s \in \mathrm{Hom}_S(P^T, Q)$ 使得 $h_1\ s = g^T$. 又 $\sigma_P\ g = g^{TT}\ \sigma_{E_{k-1}(L)}$, 而 $g^{TT} = s^T\ h_1^T$, 因此

$$g = \sigma_P^{-1} g^{TT} \sigma_{E_{k-1}(L)} = (\sigma_P^{-1} s^T) h_1^T \sigma_{E_{k-1}(L)} = (\sigma_P^{-1} s^T) h.$$

这说明 h 是 $E_{k-1}(L)$ 的左 $\mathrm{add}(T_R)$- 逼近. 因此有一个同态 $\delta : Q^T \to T^n$ 使得 $\delta h = f\beta$, 从而有下列具有正合行，列的交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_{k-1}(L) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & E_{k-1}(L) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta"] & L \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q^T \arrow[r] & Q^T \oplus T^n \arrow[r, "{(\delta,0)}"] & T^n \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
 & & & M \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 4

这里 γ 是一个诱导同态， $\eta = \binom{h}{0}$.

令 $K_k(M) = \mathrm{Coker}(\gamma)$ 且 $E_k(M) = \mathrm{Coker}\eta$. 由 Snake 引理有正合列：

$$0 \to K_k(M) \to E_k(M) \to M \to 0. \qquad (*)$$

由 $0 \to K_{k-1}(L) \xrightarrow{\gamma} Q^T \to K_k(M) \to 0$ 的正合性，有 $K_k(M) \in \mathrm{gen}^{k-1}(T_R)$. 另一方面，由 $0 \to E_{k-1}(L) \xrightarrow{\eta} Q^T \oplus T^n \to E_k(M) \to 0$ 的正合性，有 $\mathrm{Ext}_R^t(E_{k-1}(L), T) \cong \mathrm{Ext}_R^{t+1}(E_k(M), T)$ 对 $t \geq 1$ 成立，从而有 $\mathrm{Ext}_R^t(E_k(M), T) = 0$ 对 $2 \leq t \leq k$ 成立. 另外，由引理 4 知 η 也是 $E_{k-1}(L)$ 的左 $\mathrm{add}(T_R)$- 逼近，因此 $\mathrm{Ext}_R^1(E_k(M), T) = 0$. 这样得到 $\mathrm{Ext}_R^t(E_k(M), T) = 0$ 对 $1 \leq t \leq k$ 成立. 因此 $E_k(M) \in W_T^k$, 所以序列 $(*)$ 就是我们想要的.

为了叙述方便，以下总假定 T_R 是具有性质 (G_k) 的 Wakamatsu 倾斜模并且 T_R 是 mod-R 中的一个生成元.

由定理 2 和推论 2 容易得到下面：

定理 3 设 $M \in \mathrm{mod}\text{-}R$, k 是一个整正数. 则对任意 $1 \leq t \leq k+1$ 有正合列：

$$0 \to K_t(M) \xrightarrow{f_t} E_t(M) \xrightarrow{g_t} M \to 0$$

使得 $K_t(M) \in \mathrm{gen}^{t-1}(T_R)$ 且 $E_t(M)$ 是 W_T^t- 模.

推论 3 对任意 $1 \le t \le k+1$, W_T^t 是 mod-R 上的反变有限子范畴.

证明 设 $M \in$mod-R, 由定理 3 有正合列 $0 \to K_t(M) \xrightarrow{f_t} E_t(M) \xrightarrow{g_t} M \to 0$ 使得 $K_t(M) \in \mathrm{gen}^{t-1}(T_R)$ 且 $E_t(M)$ 是 W_T^t- 模. 设 $E \in W_T^t$, 容易看到 $\mathrm{Ext}_R^1(E, K_t(M)) = 0$. 因此 $E_t(M) \xrightarrow{g_t} M$ 是 M 的一个右 W_T^t- 逼近，故 W_T^t 是 mod-R 上的反变有限子范畴.

推论 4 如果 l.id$({}_ST)$有限，且r.id$(T_R) \le k$, 那么 $\mathrm{gen}^k(T_R)$ 是 mod-R 的正变有限子范畴.

证明 由定理 3, 有定理 3 中的正合列 $0 \to K_k(M) \xrightarrow{f_k} E_k(M) \xrightarrow{g_k} M \to 0$. 因为 $E_k(M)$ 是 W_T^k- 模且 r.id$(T_R) \le k$, 所以 $\mathrm{Ext}_R^i(E_k(M), T) = 0$ 对 $i \ge 1$ 成立. 从而由文献 [10] 中定理 2.4 知 $E_k(M)$ 是 T- 自反模. 于是由文献 [6] 中定理 1 知，有正合列 $0 \to E_k(M) \to P \to X \to 0$, 其中 $P \in$add(T_R), $\mathrm{Ext}_R^i(X, T) = 0$ 对 $i \ge 1$ 成立. 考虑下列推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_k(M) \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, equal] & E_k(M) \arrow[r, "g_k"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_k(M) \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & X \arrow[r, equal] \arrow[d] & X \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 5

显然 $Y \in \mathrm{gen}^k(T_R)$. 因为 $\mathrm{Ext}_R^i(X, T) = 0$ 对 $i \ge 1$ 成立，所以对任意 $Y' \in \mathrm{gen}^k(T_R)$ 都有 $\mathrm{Ext}_R^1(X, Y')$=0. 因此上图的第三列，也就是正合列 $0 \to M \to Y \to X \to 0$ 是一个左 $\mathrm{gen}^k(T_R)$-逼近.

推论 5 如果 ${}_ST$ 具有性质 (W^k), 那么 r.id$(T_R) \le k$.

证明 由定理 3, 有正合列 $0 \to K_k(M) \xrightarrow{f_k} E_k(M) \xrightarrow{g_k} M \to 0$, 使得 $E_k(M) \in W_T^k$ 且 $K_k(M) \in \mathrm{gen}^{k-1}(T_R)$. 因为 ${}_ST$ 具有性质 (W^k), 类似文献 [10] 中引理 3.3, 易证 $E_k(M)$ 是 W_T^∞-模，从而 $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M, T) \cong \mathrm{Ext}_R^i(K_k(M), T) = 0$ 对 $i \ge k$, 因此 r.id$(T_R) \le k$.

推论 6 如果 T_R 具有性质 (W^k), 那么 $\mathrm{gen}^k(T_R)$ 是 mod-R 的正变有限子范畴.

证明 由定理 3, 有正合列 $0 \to K_k(M) \xrightarrow{f_k} E_k(M) \xrightarrow{g_k} M \to 0$, 使得 $E_k(M) \in W_T^k$ 且 $K_k(M) \in \mathrm{gen}^{k-1}(T_R)$. 因为 T_R 具有性质 (W^k), 所以 $E_k(M)$ 是 T- 无挠模，于是由文献 [6] 中定理 1 知，有正合列 $0 \to E_k(M) \to P \to X \to 0$, 其中 $P \in$add(T_R), $\mathrm{Ext}_R^i(X, T) = 0$ 对 $1 \le i \le k+1$ 成立.

考虑推出图 6, 显然 $Y \in \mathrm{gen}^k(T_R)$. 因为 $\mathrm{Ext}_R^i(X, T) = 0$ 对 $1 \le i \le k+1$ 成立，容易看到 $\mathrm{Ext}_R^1(X, Y')$=0 对 $Y' \in \mathrm{gen}^k(T_R)$ 成立. 因此图 6 的第三列，也就是正合列 $0 \to M \to Y \to X \to 0$ 是 M 的一个左 $\mathrm{gen}^k(T_R)$- 逼近.

下面给出定理 3 中正合列的一些性质.

引理 5 设 n 是一个正整数， E 是右 R- 模. 如果 E 是 W_T^n- 模，那么下列陈述成立：

(1) 如果 $K \in \mathrm{gen}^{n-1}(T_R)$, 那么 $\mathrm{Ext}_R^1(E,K)=0$;

(2) 如果 $E \in \mathrm{gen}^{n-1}(T_R)$, 那么 $E \in \mathrm{add}(T_R)$.

证明 (1) 因为 $K \in \mathrm{gen}^{n-1}(T_R)$, 有正合列 $0 \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to K \to 0$, 其中 $P_i \in \mathrm{add}(T_R)$. 由此易得 $\mathrm{Ext}_R^1(E,K)=0$.

(2) 取正合列 $0 \to L \to T_0 \to E \to 0$, 这里 $T_0 \in \mathrm{add}(T_R)$, $L \in \mathrm{gen}^{n-2}(T_R)$. 由 (1) 有正合列 $0 \to \mathrm{Hom}_R(E,L) \to \mathrm{Hom}_R(E,T_0) \to \mathrm{Hom}_R(E,E) \to 0$, 因此 $0 \to L \to T_0 \to E \to 0$ 是分裂正合的. 从而 $E \in \mathrm{add}(T_R)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_k(M) \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, equal] & E_k(M) \arrow[r, "g_k"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_k(M) \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & X \arrow[r, equal] \arrow[d] & X \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

图 6

引理 6 对任意 $1 \le t \le k+1$, $0 \to K_t(M) \to E_t(M) \to M \to 0$ 是定理 3 中的正合列，则它可以诱导同构：

$$\mathrm{Ext}_R^i(M,T) \cong \mathrm{Ext}_R^{i-1}(K_t(M),T), \text{对任意} 2 \le i \le t;$$

$$\mathrm{Ext}_R^i(M,T) \cong \mathrm{Ext}_R^i(E_t(M),T), \text{对} i \ge t+1.$$

证明 由 $K_t(M) \in \mathrm{gen}^{t-1}(T_R)$ 及 $E_t(M)$ 是 W_T^t- 模，易得.

定理 4 对 $M \in \text{mod-}R$, $0 \to K_t(M) \to E_t(M) \to M \to 0$ 是定理 3 中的正合列，下列陈述成立：

(1) 设 $1 \le t \le k+1$, 如果 $\mathrm{Ext}_R^{t+1}(M,T)=0$, 那么 $E_t(M) \in W_T^{t+1}$;

(2) 设 $2 \le t \le k+1$, 如果 $K_t(M) \in \mathrm{add}(T_R)$, 那么 $\mathrm{Ext}_R^i(M,T)=0$ 对任意 $2 \le i \le t$ 成立;

(3) 设 $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ 且 $1 \le s \le t \le k$, 则有下面正合交换图：

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_t(M) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & E_t(M) \arrow[r, "g_t"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_s(N) \arrow[r] & E_s(N) \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

图 7

证明 (1) 由定理 3 可得.

(2) 由引理 6 易得.

(3) 因为 $K_s(N)\in \mathrm{gen}^{s-1}(T_R)\subseteq \mathrm{gen}^{t-1}(T_R)$ 且 $E_t(M)$ 是 W_T^t- 模, 由引理 5(1) 有

$$\mathrm{Ext}_R^1(E_t(M),K_s(N))=0,$$

从而由正合列 $0\to K_s(N)\to E_s(N)\to N\to 0$, 有正合列

$$0\to \mathrm{Hom}_R(E_t(M),K_s(N))\to \mathrm{Hom}_R(E_t(M),E_s(N))\to \mathrm{Hom}_R(E_t(M),N)\to 0.$$

因此同态 $fg_t:E_t(M)\to N$ 可提升为同态 $g:E_t(M)\to E_s(N)$, 这样便得到想要的交换图.

参考文献:

[1] HUANG Zhao-yong. *W^t-approximation representations over quasi k-Gorenstein algebras* [J]. Sci. China Ser. A, 1999, **42**(9): 945–956.
[2] WAKAMATSU T. *Tilting modules and Auslander's Gorenstein property* [J]. J. Algebra, 2004, **275**: 3–39.
[3] FOSSUM R M, GIFFITH P A, REITEN I. *Trivial Extensions of Abelian Categories* [M]. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 456. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.
[4] AUSLANDER M, REITEN I. *k-Gorenstein algebras and syzygy modules* [J]. J. Pure Appl. Algebra, 1994, **92**(1): 1–27.
[5] HUANG Zhao-yong. *Selforthogonal modules with finite injective dimension* [J]. Sci. China Ser. A. 2000, **43**(11): 1174–1181.
[6] HUANG Zhao-yong. *ω-k-torsionfree modules and ω-left approximation dimension* [J]. Sci. China Ser. A, 2001, **44**(2): 184–192.
[7] CARTAN H, EILENBERG S. *Homological Algebra* [M]. Princeton Univ. Press, Princeton 1956.
[8] TRLIFAJ J. *Whitehead test modules* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1996, **348**(4): 1521–1554.
[9] HUANG Zhao-yong. *Extension closure of relative syzygy modules* [J]. Sci. China Ser. A, 2003, **46**(5): 611–620.
[10] HUANG Zhao-yong, TANG Gao-hua. *Self-orthogonal modules over coherent rings* [J]. J. Pure Appl. Algebra, 2001, **161**: 167–176.
[11] HUANG Zhao-yong. *Extension closure of k-torsionfree modules* [J]. Comm. Algebra, 1999, **27**(3): 1457–1464.
[12] MAŠEK V. *Gorenstein dimension and torsion of modules over commutative noetherian rings* [J]. Comm. Algebra, 2000, **28**: 5783–5811.

Wakamatsu Tilting Modules with Property (G_k)

ZHANG Bi-Cheng[1,2]

(1. Department of Mathematics, Xiangtan University, Hunan 411105, China;
2. School of Mathematical Sciences, Suzhou University, Jiangsu 215006, China)

Abstract: This paper introduces the notion of Wakamatsu tilting modules with the property (G_k) and then characterizes it by the properties of homologically finite subcategories. The obtained results generalize the work of HUANG Zhao-yong in [1] and [11].

Key words: Wakamatsu tilting modules; covariantly finite subcategories; contravariantly finite subcategories.