第27卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.2
2007年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2007

文章编号: 1000-341X(2007)02-0377-08 **文献标识码**: A

具有时滞的 n 维 Liénard 型方程调和解的存在性

张建军， 陈太勇， 刘文斌， 张慧星
(中国矿业大学理学院，江苏 徐州 221008)
(E-mail: zjj-cumt@163.com)

摘 要: 本文利用迭合度理论研究了具有时滞的 n 维 Liénard 型方程调和解的存在性，在对阻尼项不作限制的前提下，给出了存在调和解的条件.

关键词: Liénard 型方程；时滞；调和解；迭合度.
MSC(2000): 34C25
中图分类: O175.8

1 引 言

考虑具有时滞的 n 维 Liénard 型方程

$$x'' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{grad}F(x) + \mathrm{grad}G(x(t-\tau)) = p(t) \tag{1}$$

调和解的存在性，其中 $x \in \mathbf{R}^n$, $F, G \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, $p \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n), p(t+T) = p(t)$, $\tau \geq 0$ 为常数.

具有时滞的 Liénard 系统在系统控制中有着广泛而深刻的应用背景，其调和解的存在性问题一直受到人们的广泛关注. 当 $\tau = 0$ 时，对于方程 (1) 已有很多文献研究过其调和解的存在性 [1,2], 得到了一系列重要的结果；而当 $\tau \neq 0$ 时，这方面的工作还相对较少 [3,4]. 一般说来，时滞系统比非时滞系统的研究难度更大，所以对该问题的研究有诸多的限制.

2002 年，文献 [5] 研究了方程 (1) 调和解的存在性，该文中作者要求 $|\mathrm{grad}G(x)| \leq \alpha|x| + \beta$, 其中 $\alpha < \frac{\pi^2}{T^2}$. 本文在文献 [5] 的基础上，利用 Sobolev 不等式和 Wirtinger 不等式，将 α 的上界放宽到 $\alpha < \frac{4\sqrt{3}\pi^2}{(\pi+\sqrt{3})T^2}$, 且对方程 (1) 的阻尼项 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{grad}F(x)$ 不作限制，从而改进了文献 [4] 和 [5] 的结果.

2 主要结果和证明

定理 1 假设

(H_1) 存在常数 $\alpha > 0, \beta \geq 0$, 使得 $|\mathrm{grad}G(x)| \leq \alpha|x| + \beta$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$;

(H_2) 存在常数 $M > 0$, 使得当 $|x_i| > M (i = 1, 2, \ldots, n)$ 时，有

$$x_i(\frac{\partial G(x)}{\partial x_i} - \overline{p_i}) < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad 或 \quad x_i(\frac{\partial G(x)}{\partial x_i} - \overline{p_i}) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

收稿日期: 2004-04-30; **接受日期**: 2005-08-13
基金项目: 中国矿业大学青年科研基金 (A200403); 中国矿业大学基础科学预研基金 (A03–06).

成立，其中 $\overline{p_i}=\frac{1}{T}\int_0^T p_i(t)\mathrm{d}t$. 则当 $\alpha<\frac{4\sqrt{3}\pi^2}{(\pi+\sqrt{3})T^2}$ 时，方程 (1) 至少存在一个 T- 周期解.

为了证明定理的需要，先引入几个符号和引理.

本文用 $(\cdot,\cdot)$ 和 $|\cdot|$ 分别表示 $\mathbf{R}^n$ 中的内积和 Euclidean 范数，$\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p([0,T],\mathbf{R}^n)$ 中的范数，记

$$\overline{p}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t,\quad p(t)=(p_1(t),p_2(t),\ldots,p_n(t))^{\mathrm{T}};$$

考虑空间 $C^1([0,T],\mathbf{R}^n)$, 当 $x\in C^1([0,T],\mathbf{R}^n)$ 时，记 $\|x\|_\infty=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|$ 且 $\|x\|=\max\{\|x\|_\infty,\|x'\|_\infty\}$.

设 Y 和 Z 为 Banach 空间，$L:\mathrm{dom}L\subset Y\longrightarrow Z$ 为零指标的 Fredholm 线性算子；令投影算子 $P:Y\longrightarrow Y, Q:Z\longrightarrow Z$, 使得 $\mathrm{Im}P=\ker L,\ker Q=\mathrm{Im}L, Y=\ker L\bigoplus\ker P, Z=\mathrm{Im}L\bigoplus\mathrm{Im}Q$, 则 $L|_{\mathrm{dom}L\bigcap\ker P}:\mathrm{dom}L\bigcap\ker P\longrightarrow\mathrm{Im}L$ 是可逆的，记这个广义逆为 K_p; 让 Ω 为 Y 中的有界开子集，使得 $\mathrm{dom}L\bigcap\Omega\neq\emptyset$; 称算子 $N:Y\longrightarrow Z$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L- 紧的，如果 $QN(\overline{\Omega})$ 有界且 $K_p(I-Q)N:\overline{\Omega}\longrightarrow Y$ 是紧的，有关详细讨论参见文献 [6].

引理 1[6] 令 L 为零指标的 Fredholm 算子，N 在 $\overline{\Omega}$ 上 L- 紧，假设以下条件成立

(A_1) $Lx\neq\lambda Nx,\ \ \forall(x,\lambda)\in[(\mathrm{dom}L\setminus\ker L)\bigcap\partial\Omega]\times(0,1)$;

(A_2) $Nx\notin\mathrm{Im}L,\ \ \forall x\in\ker L\bigcap\partial\Omega$;

(A_3) $\deg(QN|_{\ker L},\ker L\bigcap\Omega,0)\neq 0$.

则方程 $Lx=Nx$ 在 $\mathrm{dom}L\bigcap\overline{\Omega}$ 上至少存在一个解.

为了利用引理 1 证明方程 (1) 调和解的存在性，令 $Z=Y=\{x\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^n):x(t+T)=x(t),t\in\mathbf{R}\}$, 则 $(Y,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间；定义线性算子 $L:\mathrm{dom}L\to Z$, $Lx=x''$, $x\in\mathrm{dom}L$, 其中，$\mathrm{dom}L=\{x\in Y:x\in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)\}$, 则 L 的广义逆 $K_p:\mathrm{Im}L\to\mathrm{dom}L\bigcap\ker P$ 可以写成

$$K_py=-\frac{1}{T}\int_0^T(1-\frac{t}{T})\int_0^t\int_0^s y(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\mathrm{d}t-\frac{t}{T}\int_0^T\int_0^s y(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^s y(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s.$$

易证 L 是零指标的 Fredholm 算子，有关详细讨论参见文献 [5].

定义算子 $N:Y\to Z$

$$N(x)(t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{grad}F(x)-\mathrm{grad}G(x(t-\tau))+p(t),\quad t\in[0,T];$$

定义投影算子 $P:Y\to\ker L, Q:Z\to\mathrm{Im}Q$

$$Py=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{d}t,\quad Qz=\frac{1}{T}\int_0^T z(t)\mathrm{d}t.$$

考虑方程 (1) 的同伦方程

$$x''=-\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{grad}F(x)-\lambda\mathrm{grad}G(x(t-\tau))+\lambda p(t),\quad \lambda\in[0,1],\tag{2}$$

则方程 (2) 可以转化为算子方程 $Lx=\lambda Nx$, $\lambda\in[0,1]$. 令 $\Omega_1=\{x\in\mathrm{dom}L\setminus\ker L:Lx=\lambda Nx,\lambda\in(0,1]\}$, 有如下引理

引理 2 在定理 1 条件下，集合 Ω_1 有界.

证明 对方程 (1) 两边从 0 到 T 积分，有

$$\int_0^T \mathrm{grad}G(x(t-\tau))\mathrm{d}t = \int_0^T p(t)\mathrm{d}t, \tag{3}$$

即

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{grad}G(x(t-\tau))\mathrm{d}t = \overline{p},$$

而

$$\int_0^T \mathrm{grad}G(x(t-\tau))\mathrm{d}t = \int_0^T \mathrm{grad}G(x(t))\mathrm{d}t,$$

因此

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial G(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}t = \overline{p_i}, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

由条件 (H_2) 知，对 $\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$, 存在 $t_i\in[0,T]$, 使得 $|x_i(t_i)|\le M$.

由方程 (2) 知

$$(x'',x) = -\lambda(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{grad}F(x),x) - \lambda(\mathrm{grad}G(x(t-\tau)),x) + \lambda(p(t),x), \tag{4}$$

而

$$(x'',x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x',x) - (x',x'),$$

$$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{grad}F(x),x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{grad}F(x),x) - (\mathrm{grad}F(x),x'),$$

所以，对式 (4) 两边从 0 到 T 积分得到

$$\int_0^T |x'(t)|^2\mathrm{d}t = \lambda\int_0^T (\mathrm{grad}G(x(t-\tau)) - p(t), x(t))\mathrm{d}t. \tag{5}$$

记 $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $u(t)=(u_1(t),u_2(t),\ldots,u_n(t))$, 其中 $a_i=\frac{1}{T}\int_0^T x_i(t)\mathrm{d}t$, $x_i(t)=a_i+u_i(t)$, 显然 $\int_0^T u_i(t)\mathrm{d}t=0$ 且 $u_i(t)$ 为 T- 周期函数，则由 Sobolev 不等式知

$$|a_i| \le |x_i(t_i)| + |u_i(t_i)| \le M + \|u_i\|_\infty \le M + \sqrt{\frac{T}{12}}(\int_0^T |u_i'(t)|^2\mathrm{d}t)^{1/2}.$$

由 (5) 知

$$\begin{aligned}\int_0^T |u'(t)|^2\mathrm{d}t &= \int_0^T |x'(t)|^2\mathrm{d}t = \lambda\int_0^T (\mathrm{grad}G(x(t-\tau)) - p(t), x(t))\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^T (\mathrm{grad}G(x(t-\tau)) - p(t), a)\mathrm{d}t + \int_0^T (\mathrm{grad}G(x(t-\tau)) - p(t), u(t))\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

而由 (3) 可以得到

$$\int_0^T (\mathrm{grad}G(x(t-\tau)) - p(t), a)\mathrm{d}t = 0,$$

则由条件 (H_1) 知

$$\begin{aligned}\int_0^T |u'(t)|^2\mathrm{d}t &\le \int_0^T (\mathrm{grad}G(x(t-\tau))-p(t),u(t))\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^T (\|p\|_\infty+|\mathrm{grad}G(x(t-\tau))|)|u(t)|\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^T (\|p\|_\infty+\beta+\alpha|x(t-\tau)|)|u(t)|\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^T (\|p\|_\infty+\beta+\alpha|a|+\alpha|u(t-\tau)|)|u(t)|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

记 $D=\|p\|_\infty+\beta+\alpha|a|$, 有

$$\begin{aligned}\int_0^T |u'(t)|^2\mathrm{d}t &\le \int_0^T D|u(t)|\mathrm{d}t+\alpha\int_0^T |u(t-\tau)||u(t)|\mathrm{d}t\\ &\le D\int_0^T |u(t)|\mathrm{d}t+\alpha(\int_0^T |u(t-\tau)|^2\mathrm{d}t)^{1/2}(\int_0^T |u(t)|^2\mathrm{d}t)^{1/2},\end{aligned}$$

而

$$\int_0^T |u(t-\tau)|^2\mathrm{d}t=\int_{-\tau}^{T-\tau} |u(t)|^2\mathrm{d}t=\int_0^T |u(t)|^2\mathrm{d}t,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^T |u'(t)|^2dt &\le D\int_0^T |u(t)|dt+\alpha\int_0^T |u(t)|^2\mathrm{d}t\\ &\le \sqrt{T}D(\int_0^T |u(t)|^2\mathrm{d}t)^{1/2}+\alpha\int_0^T |u(t)|^2\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{6}$$

由 Wirtinger 不等式

$$\int_0^T |u_i(t)|^2\mathrm{d}t\le \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |u_i'(t)|^2\mathrm{d}t,\quad i=1,2,\dots,n$$

知

$$\int_0^T |u(t)|^2\mathrm{d}t=\int_0^T\sum_{i=1}^n u_i^2(t)\mathrm{d}t\le\frac{T^2}{4\pi^2}\sum_{i=1}^n\int_0^T |u_i'(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |u'(t)|^2\mathrm{d}t.\tag{7}$$

结合 (6) 和 (7) 有

$$\int_0^T |u'(t)|^2\mathrm{d}t\le\sqrt{T}D\cdot\frac{T}{2\pi}(\int_0^T |u'(t)|^2\mathrm{d}t)^{1/2}+\alpha\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |u'(t)|^2\mathrm{d}t,$$

即

$$\|u'\|_2^2\le\frac{\sqrt{T}DT}{2\pi}\|u'\|_2+\frac{\alpha T^2}{4\pi^2}\|u'\|_2^2.$$

因为 $\alpha<\frac{4\sqrt{3}\pi^2}{(\pi+\sqrt{3})T^2}<\frac{4\pi^2}{T^2}$, 则

$$\|u'\|_2\le\frac{2\sqrt{T}\pi DT}{4\pi^2-\alpha T^2}.\tag{8}$$

另一方面，由于 $|a|=(\sum_{i=1}^n|a_i|^2)^{1/2}$ 及 $|a_i|\le M+\sqrt{\frac{T}{12}}\|u_i'\|_2$, 则由 Minkowski 不等式知

$$\begin{aligned}|a|&\le\{\sum_{i=1}^n(M+\sqrt{\frac{T}{12}}\|u_i'\|_2)^2\}^{1/2}\le(\sum_{i=1}^n M^2)^{1/2}+(\sum_{i=1}^n\frac{T}{12}\|u_i'\|_2^2)^{1/2}\\&=\sqrt{n}M+\sqrt{\frac{T}{12}}(\sum_{i=1}^n\|u_i'\|_2^2)^{1/2}=\sqrt{n}M+\sqrt{\frac{T}{12}}\|u'\|_2,\end{aligned}$$

结合 (8) 可以得到

$$|a|\le\sqrt{n}M+\sqrt{\frac{T}{12}}\cdot\frac{2\sqrt{T}\pi DT}{4\pi^2-\alpha T^2}=\sqrt{n}M+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi DT^2}{4\pi^2-\alpha T^2}.$$

又因为 $D=\|p\|_\infty+\beta+\alpha|a|$, 所以

$$|a|\le\sqrt{n}M+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi T^2}{4\pi^2-\alpha T^2}(\|p\|_\infty+\beta+\alpha|a|),$$

故由 $\alpha<\frac{4\sqrt{3}\pi^2}{(\pi+\sqrt{3})T^2}$ 知

$$|a|\le\frac{\sqrt{n}M+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi T^2}{4\pi^2-\alpha T^2}\cdot(\|p\|_\infty+\beta)}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha\cdot\frac{\pi T^2}{4\pi^2-\alpha T^2}}:=M_1.$$

则由 (8) 知，对 $\forall x(t)\in\Omega_1$ 有

$$\|x'\|_2=\|u'\|_2\le\frac{2\sqrt{T}\pi T(\|p\|_\infty+\beta+\alpha M_1)}{4\pi^2-\alpha T^2}:=M_2,\tag{9}$$

显然， $M_2>0$ 且与 λ 无关.

因为

$$\begin{aligned}|x_i(t)|&=|x_i(t_i)+\int_{t_i}^t x_i'(s)ds|\le M+\int_0^T|x_i'(s)|\mathrm{d}s\\&\le M+\sqrt{T}\left[\int_0^T|x_i'(s)|^2\mathrm{d}s\right]^{1/2}\le M+\sqrt{T}\|x_i'\|_2\\&\le M+\sqrt{T}\|x'\|_2,\quad i=1,2,\ldots,n,\ \forall t\in[0,T],\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|x(t)|^2&=\sum_{i=1}^n(x_i(t))^2\le\sum_{i=1}^n(M+\sqrt{T}\|x'\|_2)^2\\&\le[\sum_{i=1}^n(M+\sqrt{T}\|x'\|_2)]^2=(nM+n\sqrt{T}\|x'\|_2)^2,\end{aligned}$$

即

$$|x(t)|\le nM+n\sqrt{T}\|x'\|_2,\quad\forall t\in[0,T],$$

结合 (9) 得到

$$\|x\|_\infty \le nM + n\sqrt{T}\|x'\|_2 \le nM + n\sqrt{T}M_2 := M_3.$$

下面证明 $x'(t)$ 有先验界.

因为 $F(x), G(x) \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), p(t) \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$, 所以必存在正常数 M_4, M_5, M_6, 使得

$$|\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}| \le M_4, \quad |\mathrm{grad}G(x(t-\tau))| \le M_5, \quad |p(t)| \le M_6,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^T |x''(t)|\mathrm{d}t &\le \int_0^T |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{grad}F(x)|\mathrm{d}t + \int_0^T |\mathrm{grad}G(x(t-\tau))|\mathrm{d}t + \int_0^T |p(t)|\mathrm{d}t \\ &\le (M_5+M_6)T + \int_0^T |\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}| \cdot |x'(t)|\mathrm{d}t \\ &\le (M_5+M_6)T + M_4\sqrt{T}[\int_0^T |x'(t)|^2\mathrm{d}t]^{1/2} \\ &\le (M_5+M_6)T + M_2M_4\sqrt{T} := M_7.\end{aligned}$$

又 $x_i(0) = x_i(T)$, 则必存在 $\xi_i \in (0,T)$, 使得 $x_i'(\xi_i) = 0$, 所以

$$\begin{aligned}|x_i'(t)| &= |\int_{\xi_i}^t x_i''(s)\mathrm{d}s| \le \int_0^T |x_i''(s)|\mathrm{d}s \\ &\le \int_0^T |x''(s)|\mathrm{d}s \le M_7, \quad i = 1,2,\ldots,n, \ \forall t \in [0,T],\end{aligned}$$

因此

$$|x'(t)| = [\sum_{i=1}^n (x_i'(t))^2]^{1/2} \le (nM_7^2)^{1/2} = \sqrt{n}M_7, \quad \forall t \in [0,T],$$

故

$$\|x'\|_\infty \le \sqrt{n}M_7 := M_8, \quad \forall x(t) \in \Omega_1.$$

取 $M_9 = \max\{M_3, M_8\} + 1$, 显然 M_9 为正常数且与 λ 无关，所以

$$\|x\| = \max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\} \le \max\{M_3, M_8\} < M_9, \quad \forall x \in \Omega_1,$$

从而 Ω_1 是有界集.

令 $\Omega_2 = \{x \in \ker L : Nx \in \mathrm{Im}L\}$, 有如下引理

引理 3 在定理 1 条件下，集合 Ω_2 有界.

证明 对 $\forall x \in \Omega_2$, 有 $QNx = 0$, 从而

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{grad}G(x(t-\tau))\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t,$$

又由于 $x(t)$ 是周期的，所以

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{grad}G(x(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t,$$

因此

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial G(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}t=\overline{p_i},\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{10}$$

又因为 $x\in\Omega_2, x\in\ker L=\{x: x=d, d\in\mathbf{R}^n\}$, 所以 $\|x\|=\max\{\|x\|_\infty,\|x'\|_\infty\}=|d|$, 因此可以断定 $|d_i|\le M(i=1,2,\ldots,n)$. 否则，若存在某个 $i_0\in\{1,2,\ldots,n\}$, 使得 $|x_{i_0}|=|d_{i_0}|>M$, 那么由条件 (H_2) 知

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial G(x)}{\partial x_{i_0}}\mathrm{d}t\ne\overline{p_{i_0}},$$

这与 (10) 矛盾，所以由 $|d|=(\sum_{i=1}^n|d_i|^2)^{1/2}$ 知 $|d|$ 有界，从而 Ω_2 是有界集.

对 $\forall d\in\mathbf{R}^n, x=d\in\ker L$, 有

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial G(x)}{\partial x_i}|_{x=d}\mathrm{d}t=\frac{\partial G(x)}{\partial x_i}|_{x=d},\quad i=1,2,\ldots,n,$$

所以由条件 (H_2) 知，当 $|d_i|>M,(i=1,2,\ldots,n)$ 时，或者对 $\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$ 成立

$$d_i[\overline{p_i}-\frac{\partial G(x)}{\partial x_i}|_{x=d}]<0, \tag{11}$$

或者对 $\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$ 成立

$$d_i[\overline{p_i}-\frac{\partial G(x)}{\partial x_i}|_{x=d}]>0, \tag{12}$$

不失一般性，假设 (11) 成立 $(\forall i\in\{1,2,\ldots,n\})$, 则令

$$\Omega_3=\{x\in\ker L: -\lambda\Lambda x+(1-\lambda)QNx=0,\quad \lambda\in[0,1]\},$$

其中 $\Lambda:\ker L\to \mathrm{Im}Q$ 是代数拓扑同构，且 $\Lambda(d)=d,\forall d\in\mathbf{R}^n$, 有如下引理

引理 4 在定理 1 条件下，集合 Ω_3 有界.

证明 对 $\forall x=d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)\in\Omega_3$, 可以断定 $|d_i|\le M,(i=1,2,\ldots,n)$. 否则，对某个 $\overline{x}=\overline{d}=(\overline{d_1},\overline{d_2},\ldots,\overline{d_n})\in\Omega_3$, 存在 $i_0\in\{1,2,\ldots,n\}$, 使得 $|\overline{d_{i_0}}|>M$, 那么由 $\overline{x}=\overline{d}\in\Omega_3$ 知，$-\overline{\lambda}\Lambda(\overline{d})+(1-\overline{\lambda})QN(\overline{d})=0, \overline{\lambda}\in[0,1]$, 而

$$\begin{aligned}QN(\overline{d})&=\frac{1}{T}\int_0^T[p(t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{grad}F(x)|_{x=\overline{d}}-\mathrm{grad}G(x(t-\tau))|_{x=\overline{d}}]\mathrm{d}t\\&=\overline{p}-\mathrm{grad}G(x)|_{x=\overline{d}},\end{aligned}$$

所以

$$-\overline{\lambda}\,\overline{d_i}+(1-\overline{\lambda})(\overline{p_i}-\frac{\partial G(x)}{\partial x_i}|_{x=\overline{d}})=0,\quad i=1,2,\ldots,n,$$

特别地

$$-\overline{\lambda}\,\overline{d_{i_0}}+(1-\overline{\lambda})(\overline{p_{i_0}}-\frac{\partial G(x)}{\partial x_{i_0}}|_{x=\overline{d}})=0.$$

由上式，显然 $\overline{\lambda}\ne1$, 否则 $\overline{d_{i_0}}=0$ 与 $|\overline{d_{i_0}}|>M$ 矛盾. 从而由 $|\overline{d_{i_0}}|>M$ 和 (11) 式知，上式左边不可能等于 0, 故矛盾. 所以，对 $\forall x=d\in\Omega_3,\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$, 有 $|d_i|\le M$, 故 $|d|=(\sum_{i=1}^n|d_i|^2)^{1/2}\le\sqrt{n}M$, 因此 Ω_3 是有界集.

下面证明引理 1 的所有条件被满足，从而证明方程 (1) T- 周期解的存在性.

定理 1 的证明 让 $\Omega \subset Y$ 是有界开集，且 $\bigcup_{i=1}^{3} \overline{\Omega_i} \subset \Omega$, 由 Arzela-Ascoli 定理易证 K_p 是紧的，映射 N 连续且将有界集映成有界集，从而 N 在 Ω 上是 L- 紧的，于是由引理 2 和引理 3 知

(A$_1$) $Lx \neq \lambda Nx, \quad \forall (x,\lambda) \in [(\mathrm{dom}L \setminus \ker L) \bigcap \partial\Omega] \times (0,1);$

(A$_2$) $Nx \notin \mathrm{Im}L, \quad \forall x \in \ker L \bigcap \partial\Omega$

成立.

另一方面，令 $H(x,\lambda) = -\lambda \Lambda x + (1-\lambda) QNx$, 由引理 4 知 $H(x,\lambda) \neq 0, \forall x \in \ker L \cap \partial\Omega, \lambda \in [0,1]$, 所以，由拓扑度的同伦不变性知

$$\begin{aligned}\deg(QN|_{\ker L}, \ker L \cap \Omega, 0) &= \deg(H(\cdot,0), \ker L \cap \Omega, 0) = \deg(H(\cdot,1), \ker L \cap \Omega, 0) \\ &= \deg(-\Lambda, \ker L \cap \Omega, 0) \neq 0,\end{aligned}$$

从而引理 1 的条件 (A$_3$) 被满足. 由引理 1 知，算子方程 $Lx = Nx$ 在 $\mathrm{dom}L \bigcap \overline{\Omega}$ 上至少有一个解，即方程 (1) 至少有一个 T- 周期解.

参考文献:

[1] GE Wei-gao. *Harmonic solutions of n-dimensional Liénard equations* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 1990, **11**(3): 297–307. (in Chinese)

[2] GE Wei-gao. *On the existence of harmonic solutions of Liénard systems* [J]. Nonlinear Anal., 1991, **16**(2): 183–190.

[3] WANG Gen-qing, CHENG Sui-sun. *A priori bounds for periodic solutions of a delay Rayleigh equation* [J]. Appl. Math. Lett., 1999, **12**: 41–44.

[4] HUANG Xian-kai. *The existence of harmonic solutions for the n-dimensional Li'enard equation with delay* [J]. J. Systems Sci. Math. Sci., 1999, **19**(3): 328–335. (in Chinese)

[5] LIU Bin, YU Jian-she. *On the existence of harmonic solutions for the n-dimensional Liénard equations with delay* [J]. Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed., 2002, **22**(3): 323–331. (in Chinese)

[6] MAWHIN J. *Topological Degree and Boundary Value Problems for Nonlinear Differential Equations* [M]. Topological methods for ordinary differential equations (Montecatini Terme, 1991), 74–142, Lecture Notes in Math., 1537, Springer, Berlin, 1993.

[7] DEIMLING K. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. New York: Springer-Verlag, 1985.

[8] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, PÓLYA G. *Inequalities* [M]. Cambridge University Press, 1952.

Existence of Harmonic Solutions for n-Dimensional Liénard Equations with Delay

ZHANG Jian-jun, CHEN Tai-yong, LIU Wen-bin, ZHANG Hui-xing

(Department of Mathematics, China University of Mining and Technology, Jiangsu 221008, China)

Abstract: In this paper, the existence of harmonic solutions for the n-dimensional Liénard equations with delay is studied by using coincidence degree theory. Sufficient conditions to guarantee the existence of harmonic solutions for the equation are obtained without restriction on the damping forces and some known results are improved.

Key words: Liénard equations; delay; harmonic solutions; coincidence degree.