文章编号: 1000-341X(2007)02-0391-06　　**文献标识码**: **A**

一般生长曲线模型中共同均值参数线性估计的泛容许性

刘刚[1]，张尚立[2]
(1. 中国人民大学信息学院，北京 100872; 2. 北京交通大学理学院，北京 100044)
(E-mail: liugang@ruc.edu.cn)

摘　要: 本文研究一般生长曲线模型中共同均值参数的估计问题，给出了共同均值参数线性估计的泛容许定义，并在较特殊的齐次与非齐次线性估计类中得到了泛容许的充要条件.

关键词: 生长曲线模型；共同均值参数；泛容许性；线性估计.
MSC(2000): 62C15; 62F30
中图分类: O212.4

1 引 言

设 A,B 均为方阵， $A\geq 0$ 表示 A 是半正定的； $A\geq B$ 表示 $A-B\geq 0$; A^+,A^- 分别表示 A 的 Moore-Penrose 逆矩阵与 A 的广义逆矩阵； $\mathrm{tr}(A)$ 表示 A 的迹； $\vec{A}$ 是 A 的按列拉直; $\mu(A)$ 记矩阵 A 的列向量张成的线性空间； $A\otimes B$ 表示 A 和 B 的 Kronecker 乘积.

文献 [1],[2] 分别讨论了线性模型与多元模型中共同均值线性估计的可容许性，本文考虑更一般的生长曲线模型

$$\begin{cases} Y_i=ABC+e_i, & i=1,\ldots,m \\ E(e_i)=0, & \mathrm{Cov}(\vec{e_i})=\sigma_i^2\cdot\Sigma\otimes V \\ \mathrm{Cov}(e_i,e_j)=0, & i,j=1,\ldots,m,\, i\neq j \end{cases} \tag{1}$$

其中 $Y_i,e_i,\, i=1,\ldots,m$ 均为 $p\times n$ 阶随机矩阵， $A_{p\times q}$ 及 $C_{k\times n}$ 为已知的设计阵，矩阵 $B_{q\times k}$ 及 $\sigma_i^2>0,\, i=1,\ldots,m$ 是未知参数， $n\times n$ 阶矩阵 $\Sigma\geq 0$ 及 $p\times p$ 阶矩阵 $V\geq 0$ 均已知.

假定线性函数 $K_{t\times q}BL_{k\times l}$ 可估 (即 $\mu(K')\subseteq\mu(A')$ 且 $\mu(L)\subseteq\mu(C)$), 取损失函数

$$L(d,KBL)=(d-KBL)(d-KBL)'. \tag{2}$$

在模型 (1) 及 (2) 下，由于风险函数是矩阵，有关矩阵大小的比较可有许多不同的标准. 为了将这些标准统一起来，仿照 Kiefer[3] 在优良设计中所作的那样，谢民育，张尧庭 [4] 提出了泛容许性的概念，用于评价估计的一般标准.

用 $\mathcal{M}$ 表示所有 m 阶非负定矩阵 M 组成的集合， Φ 是定义在 $\mathcal{M}$ 上取非负实数值的函数，且满足如下 4 个合理性条件

(i) $\Phi(M)=0$ 当且仅当 $M=0$;

(ii) 如果 $M_1\leq M_2$, 则 $\Phi(M_1)\leq\Phi(M_2)$;

(iii) $\Phi(rM)=r^{q(M)}\Phi(M)$, r 是非负实数， $q(M)>0$ 是 $\mathcal{M}$ 上的实函数;

收稿日期: 2005-04-29; **接受日期**: 2005-07-19
基金项目: 国家自然科学基金 (10501052).

(iv) $\Phi(M)$ 是 M 的 $\frac{m(m+1)}{2}$ 个变量的连续函数.

我们记 $R(d,KBL)=EL(d,KBL)$, $\Theta=\{(B,\sigma^2):\sigma_i^2>0,\ i=1,\ldots,m,\ B\in R^{q\times k}\}$.

定义 假设 d_1 和 d_2 是 KBL 的两个估计, 如果对一切 $(B,\sigma^2)\in\Theta$, 有

$$\Phi(R(d_1,KBL))\le\Phi(R(d_2,KBL))$$

且存在某组 (B,σ^2) 使严格不等号成立, 则称 d_1 比 $d_2\Phi$ 优 (或泛优). 如果在某个估计类 E 中不存在 Φ 优于 d 的估计, 则称 d 是 KBL 在估计类 E 中的 Φ 容许性估计, 记为 $d(Y)\underset{E}{\overset{\Phi}{\sim}}KBL$.

本文讨论齐次与非齐次线性估计类 $\mathcal{HL}_1$ 及 $\mathcal{L}_1$ 中的泛容许性, 这里

$$\mathcal{HL}_1=\{\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i:\ D_i\text{ 及 }F_i\text{ 分别为 }t\times p,n\times l\text{ 常数阵},\quad D_iA=K,\ i=1,\ldots,m\},$$

$$\mathcal{L}_1=\{\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i+M:\ \sum_{i=1}^m D_iY_iF_i\in\mathcal{HL}_1, M\text{ 为 }t\times l\text{ 常数阵}\}$$

相应得到了线性估计泛容许的充要条件.

2 主要结果

引理 1 对任意的 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i\in\mathcal{HL}_1$, $\sum_{i=1}^m D_iP_AY_iP'_{C'}F_i\in\mathcal{HL}_1$, 记 $F=\sum_{i=1}^m F_i$, 对一切 (B,σ^2), 有

$$\begin{aligned}R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i,KBL)&=\sum_{i=1}^m\sigma_i^2\mathrm{tr}(F_i'\Sigma F_i)D_iVD_i'+KB(CF-L)(CF-L)'B'K'\\ \ge R(\sum_{i=1}^m D_iP_AY_iP'_{C'}F_i,KBL)&=\sum_{i=1}^m\sigma_i^2\mathrm{tr}(F_i'\Sigma P'_{C'}F_i)D_iP_AVD_i'+KB(CF-L)(CF-L)'B'K'\\ &=(K(A'T^+A)^+K'-KK')\cdot\sum_{i=1}^m\sigma_i^2\mathrm{tr}(F_i'\Sigma P'_{C'}F_i)+KB(CF-L)(CF-L)'B'K'\end{aligned}$$

且等号成立的充要条件为

$$\Sigma F_i=\Sigma P'_{C'}F_i,\quad D_iV=D_iP_AV,\quad i=1,\ldots,m,\tag{3}$$

其中 $P_A=A(A'T^+A)^-A'T^+$, $P'_{C'}=E^+C'(CE^+C')^-C$, $T=V+AA'$, $E=\Sigma+CC'$.

考虑线性模型

$$X=C'\beta+e,\quad E(e)=0,\quad \mathrm{Cov}(e)=\sigma^2\Sigma\tag{4}$$

和二次损失

$$L(d(X),L'\beta,\sigma^2)=(d(X)-L'\beta)'(d(X)-L'\beta).\tag{5}$$

由文献 [5] 知如下引理 2 及附注 1 成立.

引理 2 在模型 (4) 和 (5) 下, 若 $L'\beta$ 可估 (事实上, 因 KBL 可估, $L'\beta$ 必可估), 则 $F'X\sim L'\beta$ ($F=\sum_{i=1}^m F_i$) 的充要条件为

$$\Sigma F=\Sigma P'_{C'}F,\tag{6}$$

$$F'C'((CE^+C')^- - I)L \geq F'\Sigma F, \tag{7}$$

$$rk((CF-L)'((CE^+C')^- - I)C) = rk((CF-L)'). \tag{8}$$

附注 1 当 $\Sigma > 0$ 时，(8) 式自然成立，而 (6) 与 (7) 式分别为

$$F = \Sigma^{-1}C'(C\Sigma^{-1}C')^- CF,$$

$$F'C'(C\Sigma^{-1}C')^- L \geq F'\Sigma F.$$

引理 3 若 KBL 可估且 (3) 式成立，则 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i \underset{\mathcal{HL}_1}{\overset{\Phi}{\sim}} KBL$ 的充要条件为

$$\Sigma F_i = k_i \Sigma F,\ k_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^m k_i = 1,\ i = 1, \ldots, m \tag{9}$$

且在模型 (4) 和 (5) 下，$F'X \sim L'\beta$.

由引理 1– 引理 3, 我们有如下结论：

定理 1 在模型 (1) 和 (2) 下, 若 KBL 可估，则 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i \underset{\mathcal{HL}_1}{\overset{\Phi}{\sim}} KBL$ 的充要条件为 (3), (7)–(9) 式成立.

附注 2 特别地，当 $m=1, \Sigma = I, V = G > 0$ 时，即可得到文献 [6] 中的定理 1.

引理 4 若 K 列满秩，则对任意 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i + M \in \mathcal{L}_1$, 有

$$R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i + M, KBL) = R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i, K(B+M_0)L) + M(I - P_{(CF-L)'})M',$$

其中 M_0 满足 $MP_{(CF-L)'} = KM_0(CF-L)$, $P_{(CF-L)'}$ 是 $\mu((CF-L)')$ 上的投影阵.

引理 5 若 KBL 可估，且 K 列满秩，则 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i + M \underset{\mathcal{L}_1}{\overset{\Phi}{\sim}} KBL$ 的充要条件为

$$\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i \underset{\mathcal{HL}_1}{\overset{\Phi}{\sim}} KBL \text{ 且 } M = MP_{(CF-L)'}.$$

由引理 5 及定理 1, 立即可得

定理 2 若 KBL 可估且 K 列满秩，则 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i + M \underset{\mathcal{L}_1}{\overset{\Phi}{\sim}} KBL$ 的充要条件为 $M = MP_{(CF-L)'}$ 且 (3), (7)–(9) 式成立.

附注 3 当 $m=1, \Sigma = I, V = G > 0$ 时，可以得到文献 [6] 中的定理 2.

3 引理的证明

引理 1, 引理 4 是容易验证的，略.

引理 3 的证明 先证若 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i \underset{\mathcal{HL}_1}{\overset{\Phi}{\sim}} KBL$, 则必有 (9) 式成立.

由于 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i \underset{\mathcal{HL}_1}{\overset{\Phi}{\sim}} KBL$, 则在 $\mathrm{tr}(F_i'\Sigma F_i) = c_i$, $i = 2, \ldots, m$, $F = \sum_{i=1}^m F_i$ 固定的条件下，$\mathrm{tr}(F_1'\Sigma F_1)$ 必须达到最小值．容易计算

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(F_1'\Sigma F_1) &= \mathrm{tr}(F - \sum_{i=2}^m F_i)'\Sigma(F - \sum_{i=2}^m F_i)\\ &= \mathrm{tr}(F'\Sigma F) - 2\sum_{i=2}^m \mathrm{tr}(F'\Sigma F_i) + \sum_{i=2}^m \mathrm{tr}(F_i'\Sigma F_i) + \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j\neq 1}} \mathrm{tr}(F_i'\Sigma F_j).\end{aligned}$$

作辅助函数 $H(F_2,\dots,F_m;\lambda_2,\dots,\lambda_m)=\mathrm{tr}(F_1'\Sigma F_1)+\sum_{i=2}^m\lambda_i(\mathrm{tr}(F_i'\Sigma F_i)-c_i)$,

$$\frac{\partial H}{\partial F_i'}=-2F'\Sigma+2F_i'\Sigma+2\sum_{j\neq 1,i}F_j'\Sigma+2\lambda_iF'\Sigma=0,\quad i=2,\dots,m$$

$$\mathrm{tr}(F_i'\Sigma F_i)=c_i,\quad F=\sum_{i=1}^m F_i.$$

由此可得 $\Sigma F_i=k_i\Sigma F$, $i=2,\dots,m$, $\Sigma F_1=k_1\Sigma F$, $k_1=1-\sum_{i=2}^m k_i$.

若某个 $k_l<0$, 取 $F_i^{(1)}=\frac{k_i}{\sum_{j\neq l}k_j}F$, $i\neq l$, $F_l^{(1)}=0$, 则有

$$\mathrm{tr}(F_i^{(1)'}\Sigma F_i^{(1)})\le \mathrm{tr}(F_i'\Sigma F_i),\ i\neq l,\ \mathrm{tr}(F_l^{(1)'}\Sigma F_l^{(1)})\le\mathrm{tr}(F_l'\Sigma F_l).$$

此时容易证明 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i^{(1)}\Phi$ 优于 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i$, 故 (9) 式成立.

下面只需证明在 (9) 式成立的条件下, $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i \underset{\mathcal{HL}_1}{\overset{\Phi}{\sim}} KBL\Longleftrightarrow F'X\sim L'\beta$.

$$R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i,KBL)=\sum_{i=1}^m k_i^2\sigma_i^2\mathrm{tr}(F'\Sigma F)D_iVD_i'+KB(CF-L)(CF-L)'B'K'.$$

若在模型 (4) 和 (5) 下，存在 $F^{(1)'}X$ 一致地优于 $F'X$, 则有

$$\mathrm{tr}(F^{(1)'}\Sigma F^{(1)})\le\mathrm{tr}(F'\Sigma F),\tag{10}$$

$$(CF^{(1)}-L)(CF^{(1)}-L)'\le(CF-L)(CF-L)'\tag{11}$$

且至少有一式等号不成立. 注意到

$$F'\Sigma F-F'\Sigma P_{C'}'F=F'(I-P_{C'})\Sigma(I-P_{C'})'F\ge 0,$$

$$DVD'-DP_AVD'=D(I-P_A)V(I-P_A)'D'\ge 0,$$

取 $F_i^{(1)}=k_iF^{(1)}$, $i=1,\dots,m$, 容易验证对一切 $(B,\sigma^2)\in\Theta$, 有

$$\begin{aligned}&\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_iP_AY_iP_{C'}'F_i^{(1)},KBL))\\&=\Phi(\sum_{i=1}^m k_i^2\sigma_i^2\mathrm{tr}(F^{(1)'}\Sigma P_{C'}'F^{(1)})D_iP_AVD_i'+KB(CF^{(1)}-L)(CF^{(1)}-L)'B'K')\\&\le\Phi(\sum_{i=1}^m k_i^2\sigma_i^2\mathrm{tr}(F'\Sigma F)D_iVD_i'+KB(CF-L)(CF-L)'B'K')\\&=\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i,KBL)).\end{aligned}\tag{12}$$

若 (10) 式中不等号成立，由合理性条件 (i), (iii), 容易证明在 $B=0$ 处， (12) 式等号不成立. 若 (11) 式等号不成立，则存在向量 β, 使得

$$\beta'(CF^{(1)}-L)(CF^{(1)}-L)'\beta<\beta'(CF-L)(CF-L)'\beta.$$

由于 $K=(K_1,\ldots,K_q)\neq 0$, 不妨设 $K_1\neq 0$, 取 $B_0=(\beta,0,\ldots,0)'$, 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\sigma_i^2\to 0\\ i=1,\ldots,m}}\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_iP_AY_iP'_{C'}F_i^{(1)},KB_0L))=\Phi(KB_0(CF^{(1)}-L)(CF^{(1)}-L)'B_0'K')\\
&=\Phi(\beta'(CF^{(1)}-L)(CF^{(1)}-L)'\beta\cdot K_1K_1')=(\beta'(CF^{(1)}-L)(CF^{(1)}-L)'\beta)^{q(K_1K_1')}\Phi(K_1K_1')\\
&<(\beta'(CF-L)(CF-L)'\beta)^{q(K_1K_1')}\Phi(K_1K_1')=\Phi(\beta'(CF-L)(CF-L)'\beta\cdot K_1K_1')\\
&=\Phi(KB_0(CF-L)(CF-L)'B_0'K')=\lim_{\substack{\sigma_i^2\to 0\\ i=1,\ldots,m}}\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i,KB_0L)),
\end{aligned}$$

因此必存在 (B,σ^2) 使 (12) 式等号不成立，于是 $\sum_{i=1}^m D_iP_AY_iP'_{C'}F_i^{(1)}\Phi$ 优于 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i$.

若 $\sum_{i=1}^m D_i^{(1)}Y_iF_i^{(1)}$ Φ 优于 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i$, 不妨假定 $F_i^{(1)}$ 满足 (9) 式，记 $F^{(1)}=\sum_{i=1}^m F_i^{(1)}$, 则对一切 $(B,\sigma^2)\in\Theta$, 有

$$\begin{aligned}
&\Phi(\sum_{i=1}^m s_i^2\sigma_i^2\mathrm{tr}(F^{(1)'}\Sigma F^{(1)})D_i^{(1)}VD_i^{(1)'}+KB(CF^{(1)}-L)(CF^{(1)}-L)'B'K')\\
&\quad\leq\Phi(\sum_{i=1}^m k_i^2\sigma_i^2\mathrm{tr}(F'\Sigma F)D_iP_AVD_i'+KB(CF-L)(CF-L)'B'K')
\end{aligned}$$

且存在 (B_0,σ_0^2) 使严格不等号成立. 注意到 $\sum_{i=1}^m s_i=\sum_{i=1}^m k_i=1$, $k_i,s_i\geq 0$, $i=1,\ldots,m$, 仿上可证必有 (10) 与 (11) 式成立，且两式中至少有一式等号不成立，于是 $F^{(1)'}X$ 一致地优于 $F'X$.

引理 5 的证明.

必要性. 若 $M\neq MP_{(CF-L)'}$, 则 $\Phi(M(I-P_{(CF-L)'})M')>0$, 于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\sigma_i^2\to 0\\ B=-M_0}}\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i+MP_{(CF-L)'},KBL))=0<\Phi(M(I-P_{(CF-L)'})M')\\
&=\lim_{\substack{\sigma_i^2\to 0\\ B=-M_0}}\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i+M,KBL)).
\end{aligned}$$

且容易验证，对一切 $(B,\sigma^2)\in\Theta$, 有

$$\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i+MP_{(CF-L)'},KBL))\leq\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i+M,KBL)),$$

于是 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i+MP_{(CF-L)'}\Phi$ 优于 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i+M$.

若存在 $\sum_{i=1}^m D_i^{(1)}Y_iF_i^{(1)}\Phi$ 优于 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i$, 则对一切 $(B,\sigma^2)\in\Theta$, 有

$$\begin{aligned}
&\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_i^{(1)}Y_iF_i^{(1)}+KM_0(CF^{(1)}-L),KBL))=\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_i^{(1)}Y_iF_i^{(1)},K(B+M_0)L))\\
&\quad\leq\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i,K(B+M_0)L))=\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i+M,KBL)),
\end{aligned}$$

且存在 (B_0-M_0,σ_0^2) 使严格不等号成立，这与 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i+M \underset{\mathcal{L}_1}{\overset{\Phi}{\sim}} KBL$ 矛盾.

充分性. 若 $\sum_{i=1}^m D_i^{(1)}Y_iF_i^{(1)}+M^{(1)}\Phi$ 优于 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i+M$, 不妨设 $M^{(1)}=M^{(1)}P_{(CF^{(1)}-L)'}$, 则有

$$\begin{aligned}\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_i^{(1)}Y_iF_i^{(1)}+M^{(1)},KBL))&=\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_i^{(1)}Y_iF_i^{(1)},K(B+M_0^{(1)})L))\\ \le\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i+M,KBL))&=\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i,K(B+M_0)L))\end{aligned}$$

且存在 (B_0,σ_0^2) 使严格不等号成立， $M_0^{(1)}$ 满足 $M^{(1)}P_{(CF^{(1)}-L)'}=KM_0^{(1)}(CF^{(1)}-L)$.

取 $B=-M_0$ 且 $\sigma_i^2\to 0$, $i=1,\ldots,m$, 则有

$$\Phi(K(M_0^{(1)}-M_0)(CF^{(1)}-L)(CF^{(1)}-L)'(M_0^{(1)}-M_0)'K')=0.$$

由合理性条件 (i), 有 $KM_0^{(1)}(CF^{(1)}-L)=KM_0(CF^{(1)}-L)$, 于是

$$\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_i^{(1)}Y_iF_i^{(1)},K(B+M_0)L))\le\Phi(R(\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i,K(B+M_0)L)),$$

且在 (B_0,σ_0^2) 处，严格不等号成立，这与 $\sum_{i=1}^m D_iY_iF_i \underset{\mathcal{HL}_1}{\overset{\Phi}{\sim}} KBL$ 矛盾.

参考文献:

[1] 胡飞芳. 线性模型中共同均值的线性估计的可容许性 [J]. 应用概率统计, 1991, **7**(3): 275–282.
HU Fei-fang. *Admissibility of linear estimators for the common mean vector in a linear model* [J]. J. Appl. Probab. Statist., 1991, **7**(3): 275–282. (in Chinese)

[2] 陈清平. 多元线性模型中共同均值参数的线性估计的可容许性 [J]. 应用概率统计, 1995, **11**(1): 44–51.
CHEN Qing-ping. *Admissibility of linear estimators of the common mean vector in multivariate linear model* [J]. J. Appl. Probab. Statist., 1995, **11**(1): 44–51. (in Chinese)

[3] KIEFER J. *General equivalence theory for optimum designs* [J]. Ann. Statist., 1974, **2**: 849–879.

[4] 谢民育, 张尧庭. 泛优良性与均值矩阵线性估计的泛容许性 [J]. 科学通报, 1993, **38**(7): 590–592.
XIE Min-yu, ZHANG Yao-ting. *General optimality and general admissibility of linear estimates on the mean matrix* [J]. Chinese Sci. Bull., 1993, **38**(7): 590–592. (in Chinese)

[5] 吴启光. 一般 Gauss-Markoff 模型中回归系数线性估计的可容许性 [J]. 应用数学学报, 1986, **9**(2): 251–256.
WU Qi-guang. *Admissibility of linear estimators of regression coefficients in a general Gauss-Markov model* [J]. Acta Math. Appl. Sinica, 1986, **9**(2): 251–256. (in Chinese)

[6] 覃红. 增长曲线模型回归系数线性估计的泛容许性 [J]. 应用概率统计, 1994, **10**(3): 265–271.
QIN Hong. *Universal admissibility of linear estimates of regression coefficients in growth curve models* [J]. J. Appl. Probab. Statist., 1994, **10**(3): 265–271. (in Chinese)

General Admissibility of Linear Estimates of Common Mean in Growth Curve Model

LIU Gang[1], *ZHANG Shang-li*[2]

(1. School of Information, Renming University of China, Beijing 100872, China;
2. School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: In this paper, the admissibility of linear estimates of common mean in the general growth curve model is discussed. The definition of general admissibility is given and the necessary and sufficient conditions for the linear estimates to be general admissible is obtained among some linear classes.

Key words: growth curve model; common mean; general admissibility; linear estimate.