文章编号: 1000-341X(2007)02-0408-05 **文献标识码**: **A**

关于一类实二次域的类数与基本单位的上界

杨仕椿
(阿坝师范高等专科学校数学系, 四川 汶川 623000)
(E-mail: ysc1020@sina.com)

摘 要: 设素数 $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}4)$, h,ε 分别表示实二次域 $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ 类数和基本单位. 本文改进了类数 h 和基本单位 ε 的上界, 证明了: $h\log\varepsilon<\frac{1}{4}(\sqrt{p}+6)\log(2e\sqrt{p})$, 并得到了几个重要的推论.

关键词: 实二次域; 类数; 基本单位; 上界; 素数.
MSC(2000): 11R11; 11R27; 11R29
中图分类: O156.5

1 引言及主要结果

设 N,P 表示正全体正整数与全体素数组成的集合, $p\in P$, Δ,h,ε 分别表示实二次域 $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ 的判别式, 类数和基本单位, 其中 $\Delta=\begin{cases} p, p\equiv 1\ (\mathrm{mod}4)\\ 4p, p\equiv 3\ (\mathrm{mod}4)\end{cases}$. 关于类数和基本单位的确定以及上界的估计, 一直是代数数论中最基本和最引人注目的经典课题之一. 对于 h 的上界, 1942 年, 华罗庚 [1] 证明了: $h<\sqrt{p}=p^{\frac{1}{2}}$, 而且指数 $\frac{1}{2}$ 是不能改进的; 随后, M.Newman[2] 改进了其系数, 证明了: $h<\frac{2}{3}\sqrt{p}$; T.Agoh[3] 证明了, 当 $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}4)$ 时, 对于任意的 $\nu>\frac{1}{2}$, 除了有限多个 p 以外, 必有 $h<\nu\sqrt{p}$; T.Ono[4] 和乐茂华 [5] 去掉了以上的限制条件, 各自独立的证明了 $h<\frac{1}{2}\sqrt{p}$, 而且文献 [5] 的方法是初等的. 文献 [6] 还得到了当 $p\equiv 3\ (\mathrm{mod}4)$ 时, 若 $p=b^2\pm 2$, 则 $h<[\frac{\sqrt{p}}{3}]+1$, 否则 $h<[\frac{\sqrt{p}+1}{4}]+1$, 其中 $[x]$ 是 x 的整数部分. 对于 ε 的上界, 根据 I. Schur[7] 的结果可得, $\log\varepsilon<\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}(\log\Delta+\log\log\Delta+2)$. 而华罗庚 [1] 进一步证明了 $\log\varepsilon<\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}(\log\Delta+2)$. 1964 年, 王元 [8] 利用解析数论的方法证明了, 对于任意的正数 δ, 存在与 δ 有关的常数 $c(\delta)$, 使得当 $\Delta>c(\delta)$ 时, $\log\varepsilon<(\theta+\delta)\sqrt{\Delta}\log\Delta$, 其中 $\theta=\frac{1}{4}$. 此后, D.A.Burgess [9], P.J.Stephens[10] 等人分别对上述结果中的 θ 作了改进. 然而这些结果的证明都要用到非常艰深的解析方法, 而且常数 $c(\delta)$ 是不能有效计算的. 文献 [6] 改进了以上结果, 得到了当 $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}4)$ 时, $\log\varepsilon<\frac{1}{4}\sqrt{\Delta}\log\frac{e^2}{4}(\Delta+2\sqrt{\Delta}+2)$; 当 $p\equiv 3\ (\mathrm{mod}4)$ 时, $\log\varepsilon<\frac{1}{8}(\sqrt{\Delta}+10)\log\frac{e^2}{4}(\Delta+2\sqrt{\Delta}+9)$.

本文研究了当 $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}4)$ 时的情形, 进一步改进了实二次域 $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ 的类数和基本单位的上界, 得到了以下结论

定理 若奇素数 $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}4)$, 则

$$h\log\varepsilon<\frac{1}{4}(\sqrt{p}+6)\log(2e\sqrt{p}). \tag{1}$$

收稿日期: 2004-08-09; **接受日期**: 2005-11-25
基金项目: 四川省教育厅自然科学基金 (2004B025).

2 一些引理

引理 1 设 χ 是模 Δ 的实原特征，则实二次域 $\mathbf{Q}(\sqrt{\mathbf{p}})$ 的类数 h 和基本单位 ε 满足

$$h\log\varepsilon=\mid\sum_{1\leq k<\Delta/2}\chi(k)\log\sin\frac{k\pi}{\Delta}\mid=\frac{1}{2}\mid\sum_{1\leq k<\Delta}\chi(k)\log\sin\frac{k\pi}{\Delta}\mid. \tag{2}$$

证明 见文献 [12], [13].

引理 2 $\prod_{k=1}^{t-1}\sin\frac{k\pi}{t}=\frac{t}{2^{t-1}}$.

证明 利用数学归纳法易得.

引理 3 设 $\zeta=e^{2\pi i/\Delta}, i=\sqrt{-1}$,

$$s_n=\sum_{\chi(k)=-1,1\leq k<\Delta}\zeta^{nk}, \bar{s}_n=\sum_{\chi(k)=1,1\leq k<\Delta}\zeta^{nk},$$

则

$$|s_n|=\begin{cases}\sqrt{\Delta}/2, & 2\dagger n,\\ 1, & 2\mid n.\end{cases} \tag{3}$$

证明 由于 $p\dagger n$, 则利用文献 [11] 中的定理 7.43,7.44 和 7.58 可得

$$s_n+\bar{s}_n=\begin{cases}0, & 2\dagger n,\\ 2\cdot(-1)^{n/2+1}, & 2\mid n\end{cases}$$

以及

$$-s_n+\bar{s}_n=\chi(n)\sqrt{\Delta},$$

由上两式即可得 (3) 式成立.

引理 4 设 a_1,a_2 是正数，且数列 $\{u_m\},\{v_m\}$ 分别适合

$$u_0=1, mu_m=a_1\sum_{2\dagger j,1\leq j\leq m}u_{m-j}+a_2\sum_{2|j,1\leq j\leq m}u_{m-j}, m\geq 1$$

以及

$$v_m=\sum_{j=0}^{m}u_m, m\geq 1,$$

则必有

$$v_m=\sum_{j=0}^{m}\binom{(a_1-a_2)/2}{j}\binom{(a_1+a_2)/2+m-j}{m-j},\quad m\geq 1, \tag{4}$$

其中 $\binom{a}{n}$ 是广义二项式系数.

证明 见文献 [5], [6].

引理 5 若 $1\leq k\leq\frac{n}{2}$, 则

$$\binom{n}{k}<(1+\frac{1}{6n})\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}(\frac{n}{k})^k(\frac{n}{n-k})^{n-k}. \tag{5}$$

证明 见文献 [13].

引理 6 设 $a\in N, p\in P$, 且 $p\equiv(\mathrm{mod}4)$, 如果 $p=a^2+4$, 则 $\varepsilon=\frac{a+\sqrt{p}}{2}$; 如果 $p=a^2+1$, 则 $\varepsilon=a+\sqrt{p}$; 否则 $\varepsilon>5\sqrt{p}-1$.

证明 见文献 [6].

3 定理的证明

由于 $p\equiv 1(\mathrm{mod}4)$, 则 $\Delta=p$. 设 χ 是模 Δ 的实原特征，由实原特征的性质以及引理 1 可得

$$\varepsilon^h=(\prod_{\chi(k)=-1,1\le k<\Delta}\sin\frac{k\pi}{\Delta})/(\prod_{(k,\Delta)=1,1\le k<\Delta}\sin\frac{k\pi}{\Delta})^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

由引理 2 得

$$\prod_{(k,\Delta)=1,1\le k<\Delta}\sin\frac{k\pi}{\Delta}=\frac{p}{2^{p-1}},$$

则

$$\varepsilon^h=\frac{2^{(p-1)/2}}{\sqrt{p}}\prod_{\chi(k)=-1,1\le k<\Delta}\sin\frac{k\pi}{\Delta}. \tag{7}$$

设 $\zeta=e^{2\pi i/\Delta}, i=\sqrt{-1}$,

$$f(x)=\prod_{\chi(k)=-1,1\le k<\Delta}(x-\zeta^k),$$

因为 $\chi(-1)=1$, 则 $\chi(-k)=\chi(k)$, 于是可知 $f(x)$ 是 $\frac{p-1}{2}$ 次对称多项式，且

$$f(x)=\sigma_0x^{(p-1)/2}-\sigma_1x^{(p-3)/2}+\cdots-\sigma_{(p-3)/2}x+\sigma_{(p-1)/2}, \tag{8}$$

其中

$$\sigma_0=\sigma_{(p-1)/2}=1, \sigma_j=\sigma_{(p-1)/2-j}, j=1,\ldots,(p-3)/2. \tag{9}$$

由于 $|1-\zeta^k|=2\sin\frac{k\pi}{\Delta}$, 因此由 (7)–(9) 式可得

$$\varepsilon^h=\frac{1}{\sqrt{p}}|f(1)|=\frac{1}{\sqrt{p}}|\sigma_0-\sigma_1+\cdots-\sigma_{(p-3)/2}+\sigma_{(p-1)/2}|\le\frac{2}{\sqrt{p}}\sum_{j=0}^{(p-1)/4}|\sigma_j|. \tag{10}$$

设数列 $\{u_m\},\{v_m\}$ 分别适合

$$u_0=1, mu_m=|s_1|u_{m-1}+|s_2|u_{m-2}+\cdots+|s_m|u_0, v_m=\sum_{j=0}^{m}u_m,\quad m\ge 1. \tag{11}$$

而当 n 满足 $0\le n\le\frac{p-1}{4}$ 时， $|s_n|$ 适合引理 3 中的 (3) 式，则由引理 4 可得

$$v_m=\sum_{j=0}^{m}\binom{(\sqrt{p}-2)/4}{j}\binom{(\sqrt{p}+2)/4+m-j}{m-j},\quad 1\le m\le\frac{p-1}{4}. \tag{12}$$

又利用多项式的根与系数的 Newton 公式，由式 (8), (9) 式以及引理 3 可知， σ_m 满足

$$\sigma_0 = 1, m\sigma_m = s_1\sigma_{m-1} - s_2\sigma_{m-2} + \cdots + (-1)^{m+1}s_m\sigma_0, \quad m \geq 1. \tag{13}$$

比较 (11), (13) 式可得

$$|\sigma_m| \leq u_m, 0 \leq m \leq \frac{p-1}{4}. \tag{14}$$

于是由 (10), (12), (14) 式则可得

$$\varepsilon^h \leq \frac{2}{\sqrt{p}}v_m. \tag{15}$$

设 $Q(j) = |\binom{(\sqrt{p}-2)/4}{j}\binom{(\sqrt{p}+p+1)/4-j}{(p-1)/4-j}|, b = [(\sqrt{p}+2)/4]$, 由文献 [7] 的引理 2 知，当 $b \leq j \leq (p-1)/4$ 时，有 $Q(j) > Q(j+1)$, 而且当 $1 \leq j \leq b-1$ 时， $\binom{b}{j} \leq 2^{b-1}$, 则由 (12), (15) 式以及引理 5 可得

$$\begin{aligned}
\varepsilon^h &\leq \frac{2}{\sqrt{p}} \sum_{j=0}^{(p-1)/4} \binom{(\sqrt{p}-2)/4}{j}\binom{(\sqrt{p}+p+1)/4-j}{(p-1)/4-j} \\
&= \frac{2}{\sqrt{p}}(\sum_{j=0}^{b-1} Q(j) + \sum_{j=b}^{(p-1)/4} Q(j)) < \frac{2}{\sqrt{p}}\sum_{j=0}^{b-1} Q(j) \\
&= \frac{2}{\sqrt{p}}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{(\sqrt{p}-2)/4}{j}\binom{(\sqrt{p}+p+1)/4-j}{(p-1)/4-j} \\
&< \frac{2}{\sqrt{p}}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b}{j}\binom{b+1+(p-1)/4-j}{(p-1)/4-j} = \frac{2}{\sqrt{p}}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b}{j}\binom{b+1+(p-1)/4-j}{b+1} \\
&< \frac{2^b}{\sqrt{p}}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b+1+(p-1)/4-j}{b+1} = \frac{2^b}{\sqrt{p}}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{(p+7)/4+j}{b+1} \\
&< \frac{2^b}{\sqrt{p}}\binom{(p+7)/4+b}{b+2} < \frac{2^b}{\sqrt{p}}\cdot(1+\frac{1}{6((p+7)/4+b)})\cdot \\
&\quad \sqrt{\frac{(p+7)/4+b}{2\pi(b+2)(p-1)/4}}\cdot(\frac{(p+7)/4+b}{b+2})^{b+2}\cdot(\frac{(p+7)/4+b}{(p-1)/4})^{(p-1)/4}.
\end{aligned} \tag{16}$$

由于当 $p < 100$ 时，由文献 [11], [12] 中的类数表可知，此时 (1) 式成立，因此只需考虑 $p > 100$ 的情形，此时有

$$\frac{1}{6((p+7)/4+b)} < \frac{1}{100}, \quad \sqrt{\frac{(p+7)/4+b}{2\pi(b+2)(p-1)/4}} < \sqrt{\frac{1}{\pi(b+2)}} < \frac{1}{4},$$

$$\frac{(p+7)/4+b}{b+2} < \frac{p+\sqrt{p}+5}{\sqrt{p}+6} < \sqrt{p},$$

$$(\frac{(p+7)/4+b}{(p-1)/4})^{(p-1)/4} = (1+\frac{b+2}{(p-1)/4})^{(p-1)/4} < e^{b+2}.$$

所以

$$\varepsilon^h < 2^{b-1}\cdot(\sqrt{p})^{b+1}\cdot e^{b+2} < (2e\sqrt{p})^{b+1} < (2e\sqrt{p})^{(\sqrt{p}+6)/4}. \tag{17}$$

于是定理得证.

4 推论

推论 1 设 $a \in N, p \in P, p \equiv 1 \pmod 4$, 若 $p = a^2+4$, 则 $h < (\sqrt{p}+6)\log(2e\sqrt{p})/(4\log\sqrt{p-4})$; 若 $p = a^2+1$, 则 $h < (\sqrt{p}+6)\log(2e\sqrt{p})/(4\log 2\sqrt{p-1})$; 否则 $h < (\sqrt{p}+6)\log(2e\sqrt{p})/(4\log 5\sqrt{p})$.

证明 由定理以及引理 6 即可得.

推论 2 当素数 $p \equiv 1 \pmod 4$ 时，有 $\log\varepsilon < \frac{1}{8}(\sqrt{\Delta}+6)\log(4e^2\Delta)$.

证明 由于 $\Delta = p$, 且 $h \geq 1$, 由定理直接可得.

致谢 笔者衷心感谢湛江师范学院数学系乐茂华教授的悉心指导与热情鼓励！

参考文献:

[1] HUA Luo-geng. *On the lerst solution of Pell's equation* [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1942, **48**(1): 731–735.

[2] NEWMAN M. *Bounds for class number* [J]. Amer. Math. Soc., Proc. Symp. Pure. Math., 1965, **8**(1): 70–77.

[3] AGOH T. *A note on unit and class number of real quadratic fields* [J]. Acta Math. Sinica (N.S.), 1989, **5**(3): 281–288.

[4] ONO T. *A deformation of Dirichlet's class number formula* [J]. Algebraic Analysis, Vol. II, 659–666, Academic Press, Boston, MA, 1988.

[5] 乐茂华. 关于实二次域类数的上下界 [J]. 数学学报, 1994, **37**(5): 695–701.
LE Mao-hua. *The upper bounds and the lower bounds of the class number of the real quadratic field* [J]. Acta Math. Sinica, 1994, **37**(5): 695–701. (in Chinese)

[6] 乐茂华. 实二次域类数的上界 [J]. 数学学报, 2000, **43**(1): 27–32.
LE Mao-hua. *The upper bounds of the class number of the real quadratic field* [J]. Acta Math. Sinica, 2000, **43**(1): 27–32(in Chinese).

[7] SCHUR I. *Einige Bemerkungen zu drei vorstehenden Arbriten des Herrn G* [J]. Polya. Gottingen Nachr., 1918, **1**: 30–36.

[8] 王元. 关于特征和的估计及其应用 [J]. 数学进展, 1964, **7**(1): 78–83.
WANG Yuan. *Estimate and its applications in character sum* [J]. Adv. Math. (China), 1964, **7**(1): 78–83. (in Chinese)

[9] BURGESS D A. *Estimation of character sums modulo a prime* [J]. Proc. London Math. Soc.(3), 1966, **17**: 101–108.

[10] STEPHENS P J. *Optimizing the size of $L(1,x)$* [J]. Proc. London Math. Soc.(3), 1972, **24**: 1–14.

[11] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京：科学出版社, 1979.
HUA Luo-geng. *The Introduction of Number Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1979. (in Chinese)

[12] 冯克勤. 代数数论 [M]. 北京：科学出版社, 1998.
FENG Ke-qin. *Algebraic Number Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1998. (in Chinese)

[13] LI Xian-hua, WANG Da-jing. *A quantitative oroperty of the sporadic simple groups* [J]. J. Group Theory, 2002, **5**: 41–52.

Upper Bounds of the Class Number and the Fundamental Unit of Real Quadratic Field $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$

YANG Shi-chun
(ABa Teachers College, Wenchuan 623000, China)

Abstract: Let p be an odd prime. Let h and ε denote the class number and the fundamental unit of the real quadratic field $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$, respectively. This paper proves that if $p \equiv 1 \pmod 4$, then $h\log\varepsilon < \frac{1}{4}(\sqrt{p}+6)\log(2e\sqrt{p})$.

Key words: real quadratic field; class number; fundamental unit; upper bound; prime.