**文章编号**: 1000-341X(2007)02-0413-05 **文献标识码**: **A**

# 矩阵空间之间的保幂线性映射

曹重光[1], 皇甫明[2]
(1. 黑龙江大学数学科学学院，黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 大连交通大学数理系，辽宁 大连 116028)
(E-mail: minghf_98@163.com)

**摘 要**: 在本文中, 设 $C$ 是复数域, $n$ 和 $m$ 是正整数, $k$ 为固定的自然数, 且 $k \geq 2$. 设 $M_m(C)$ 为 $C$ 上 $m$ 阶全矩阵空间, $S_n(C)$ 为 $C$ 上 $n$ 阶对称矩阵空间. 本文分别刻画了从 $S_n(C)$ 到 $M_m(C)$ 和 $S_n(C)$ 到 $S_m(C)$ 上的保矩阵 $k$ 次幂的线性映射.

**关键词**: 复数域；幂保持；线性映射.
**MSC(2000)**: 15A03
**中图分类**: O151.21

## 1 引言与引理

近年来，线性保持问题的研究开始关注不相同的矩阵空间之间的不变量保持 [4−7], 设 $C$ 是复数域, $n$ 和 $m$ 是正整数, $M_m(C)$ 为 $C$ 上 $m$ 阶全矩阵空间, $S_n(C)$ 为 $C$ 上 $n$ 阶对称矩阵空间. 设 $f$ 是从 $S_n(C)$ 到 $M_m(C)$ 上的线性映射, $k$ 是任意固定正整数 $(k \geq 2)$. 若 $f$ 满足 $f(X)^k = f(X^k)$, $\forall X \in S_n(C)$, 则称 $f$ 为保 $k$ 次幂的，并将所有这样的映射集合记为 $L(S_n(C), M_m(C))$. 同样，将 $f$ 是从 $S_n(C)$ 到 $S_m(C)$ 上的保 $k$ 次幂的线性映射集合记为 $L(S_n(C), S_m(C))$. 对这类问题的研究已有结果 [1−3,8], 但均讨论 $m = n$ 的情形. 本文分别刻画了 $L(S_n(C), M_m(C))$ 和 $L(S_n(C), S_m(C))$ 中元素的形式.

定义 $GL_n(C)$ 为 $C$ 上 $n$ 阶一般线性群, $E_{ij}$ 为 $(i,j)$ 位置为 1, 其余位置为 0 的 $n$ 阶矩阵, $D_{ij}$ 记 $E_{ij} + E_{ji}$, $I_n$ 记 $n$ 阶单位矩阵, $0_j$ 记 $j$ 阶零矩阵. 用 $A \otimes B$ 记矩阵 $A$ 与 $B$ 的 Kronecker 积, $A \oplus B$ 记矩阵 $A$ 与 $B$ 的直和. 设 $\delta_1, \delta_2$ 为非负整数，且 $\delta_1 < \delta_2$ 则 $[\delta_1, \delta_2]$ 记集 $\{\delta_1, \delta_1+1, \ldots, \delta_2\}$. 矩阵 $A$ 与 $B$ 称正交，即 $AB = BA = 0$.

**引理 1**[1,3] 设 $f \in L(S_n(C), M_m(C))$, $A, B \in S_n(C)$, 则

(i) $\sum_{p=0}^{k-1} f(A)^p f(B) f(A)^{k-1-p} = \sum_{p=0}^{k-1} f(A^p B A^{k-1-p})$;

(ii) 当 $A$ 与 $B$ 正交，且 $A^k = A$ 时，有 $f(A)$ 与 $f(B)$ 也正交.

**引理 2** 设 $f \in L(S_n(C), M_m(C))$. 若存在 $i \in [1, n]$ 满足 $f(E_{ii}) = 0$, 则 $f = 0$.

证明见 [1], [3] 相应部分.

**引理 3**[5] $f$ 是从 $S_n(C)$ 到 $M_m(C)$ 上的保幂等线性映射，当且仅当 $f$ 有下述之一成立

(i) $f = 0$;

(ii) $f(X) = P(X \otimes I_r \oplus 0_s)P^{-1}, \forall X \in S_n(C), P \in GL_m(C), m = nr + s.$

**引理 4**[3] $A_1, \ldots, A_t \in M_m(C)$ 彼此正交，且 $A_i^k = A_i (i = 1, \ldots, t)$, 若 $t > m$, 则存在 $j \in [1, t]$ 使得 $A_j = 0$.

**收稿日期**: 2005-02-28; **接受日期**: 2005-12-13
**基金项目**: 国家自然科学基金 (10271021).

**引理 5** 设 $f\in L(S_n(C),M_m(C))$, 且 $f\neq 0$, 则存在 $P\in GL_m(C)$ 使

$$f(E_{ii})=P[(E_{ii}\otimes D)\oplus 0_s]P^{-1}, \tag{1}$$

$$f(D_{ij})=P[(E_{ij}\otimes A_{ij}+E_{ji}\otimes A_{ji})\oplus 0_s]P^{-1},$$

其中 $D=\varepsilon_1 I_{r_1}\oplus\cdots\oplus\varepsilon_t I_{r_t},\forall i\in[1,n]$, $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_t$ 为互不相同的 $k-1$ 次单位根. $A_{ij}=\mathrm{diag}(B_{11}^{(ij)},\ldots,B_{tt}^{(ij)})$, $A_{ji}=\mathrm{diag}(C_{11}^{(ji)},\ldots,C_{tt}^{(ji)})$, $B_{hh}^{(ij)},C_{hh}^{(ji)}$ 为 $r_h$ 阶阵, $\forall i,j\in[1,n],h\in[1,t]$.

**证明** 由 $f(E_{ii})^k=f(E_{ii})$ 知, $g(\lambda)=\lambda^k-\lambda$ 是 $f(E_{ii})$ 的化零多项式. 因 $f(E_{ii})$ 的最小多项式整除 $g(\lambda)$, 且 $g(\lambda)$ 无重根知 $f(E_{ii})$ 相似于对角阵. 设 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{k-1}$ 为 $k-1$ 次互不相同的单位根. 由引理 1(ii) 知 $f(E_{ii})$, $f(E_{jj})$ 正交，不难证得存在一个 $P\in GL_m(F)$, 使

$$f(E_{ii})=P\{[E_{ii}\otimes(\varepsilon_1 I_{1_i}\oplus\cdots\oplus\varepsilon_{k-1}I_{k-1_i})]\oplus 0_s\}P^{-1},\quad \forall i\in[1,n], \tag{2}$$

其中，记 $I_{l_i}$ 的阶为 $l_i$, $l\in[1,k-1]$, 约定 $l_i=0$ 时该项不出现，记 $s_i=\sum_{l=1}^{k-1}l_i$ 且 $m=ns_i+s$. 在引理 1(i) 中，选取 $A=E_{ii},B=D_{ij}$ 得

$$\sum_{p=0}^{k-1}f(E_{ii})^p f(D_{ij})f(E_{ii})^{k-1-p}=\sum_{p=0}^{k-1}f(E_{ii}^p D_{ij}E_{ii}^{k-1-p})=f(D_{ij}). \tag{3}$$

在引理 1(i) 中选取 $A=E_{jj},B=D_{ij}$ 得

$$\sum_{p=0}^{k-1}f(E_{jj})^p f(D_{ij})f(E_{jj})^{k-1-p}=\sum_{p=0}^{k-1}f(E_{jj}^p D_{ij}E_{jj}^{k-1-p})=f(D_{ij}). \tag{4}$$

应用 (2) 式，并将 (3) 和 (4) 两式经过分块计算可得

$$f(D_{ij})=P[(E_{ij}\otimes A_{ij}+E_{ji}\otimes A_{ji})\oplus 0_s]P^{-1}, \tag{5}$$

其中 $A_{ij}$ 为 $s_i\times s_j$ 阶阵, $A_{ji}$ 为 $s_j\times s_i$ 阶阵.

设 $n$ 为正整数，则 $H=\frac{1}{n^2+1}E_{ii}+\frac{n^2}{n^2+1}E_{jj}+\frac{n}{n^2+1}D_{ij}$ 为幂等阵，所以 $H^k=H$. 因此，有 $f(H)^k=f(H)$, 故

$$[f(E_{ii})+n^2f(E_{jj})+nf(D_{ij})]^k=(n^2+1)^{k-1}f(E_{ii})+(n^2+1)^{k-1}n^2f(E_{jj})+(n^2+1)^{k-1}nf(D_{ij}).$$

对比两端 $n^{2k-2}$ 项的系数，并注意 $f(E_{ii})f(E_{jj})=0$ 有

$$\sum_{0\le p+q\le k-2}f(E_{jj})^p f(D_{ij})f(E_{jj})^q f(D_{ij})f(E_{jj})^{k-2-p-q}=(k-1)f(E_{jj})+f(E_{ii}). \tag{6}$$

不妨令 $D_i=\varepsilon_1 I_{1_i}\oplus\cdots\oplus\varepsilon_{k-1}I_{k-1_i}, f(E_{ii})=(E_{ii}\otimes D_i)\oplus 0_s$ 将 (2) 和 (5) 代入 (6) 式可得

$$A_{ij}D_j^{k-2}A_{ji}=D_i,$$

即

$$A_{ij}D_j^{-1}A_{ji}=D_i. \tag{7}$$

又因 $H_1=\frac{n^2}{n^2+1}E_{ii}+\frac{1}{n^2+1}E_{jj}+\frac{n}{n^2+1}D_{ij}$ 为幂等阵，同理可得 $A_{ji}D_i^{-1}A_{ij}=D_j$. 因此 $A_{ij},A_{ji}$ 可逆.

(a) 若 $k$ 为偶数，则

$$f(D_{ij})^k=f(D_{ij}^k)=f(E_{ii})+f(E_{jj}).$$

将 (5) 式代入上式得

$$(A_{ij}A_{ji})^{\frac{k}{2}}=D_i,(A_{ji}A_{ij})^{\frac{k}{2}}=D_j. \tag{8}$$

由 (7) 及 (8) 前式可得

$$(A_{ji}A_{ij})^{\frac{k}{2}-1}=D_j^{-1},$$

结合 (8) 式的后一式，可得 $D_j^2=A_{ji}A_{ij}$. 同理 $A_{ij}A_{ji}=D_i^2$, 这样可得到

$$A_{ji}D_i^2=D_j^2A_{ji}. \tag{9}$$

设 $A_{ji}=\left[\begin{array}{ccc} C_{11}^{(ji)} & \dots & C_{1k-1}^{(ji)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ C_{k-11}^{(ji)} & \dots & C_{k-1k-1}^{(ji)} \end{array}\right]$, 且 $C_{ll}^{(ji)}$ 为 $l_i$ 阶阵， $l\in[1,k-1]$. 由 $A_{ji}$ 可逆及 (9) 式对比两端，可推出 $C_{lh}^{(ji)}=0,\forall l\neq h$, 并且 $l_i=l_j,\forall l\in[1,k-1]$. 因此 $D_i^2=D_j^2$, 又因 $k-1$ 为奇数，故 $D_i=D_j$.

(b) 当 $k$ 为奇数时，在引理 1(i) 中选取 $A=D_{ij},B=E_{ii}$ 得

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{k-1}f(D_{ij})^pf(E_{ii})f(D_{ij})^{k-1-p}&=\frac{k+1}{2}f(E_{ii})+\frac{k-1}{2}f(E_{jj})\\&=\frac{k+1}{2}(E_{ii}\otimes D_i)\oplus 0_s+\frac{k-1}{2}(E_{jj}\otimes D_j)\oplus 0_s.\end{aligned}$$

将 (2) 和 (5) 式代入得

$$\sum_{p=2l+1,l\in[0,\frac{k-3}{2}]}(A_{ji}A_{ij})^{\frac{p-1}{2}}A_{ji}D_i(A_{ij}A_{ji})^{\frac{k-2-p}{2}}A_{ij}=\frac{k-1}{2}D_j, \tag{10}$$

$$\sum_{p=2l,l\in[0,\frac{k-1}{2}]}(A_{ij}A_{ji})^{\frac{p}{2}}D_i(A_{ij}A_{ji})^{\frac{k-1-p}{2}}=\frac{k+1}{2}D_i. \tag{11}$$

在 (10) 式左边分别乘 $A_{ij}$, (11) 式右边分别乘 $A_{ij}$, 两式相减得

$$D_i(A_{ij}A_{ji})^{\frac{k-1}{2}}A_{ij}=\frac{k+1}{2}D_iA_{ij}-\frac{k-1}{2}A_{ij}D_j.$$

又因 $f(D_{ij})^k=f(D_{ij})$ 知 $(A_{ij}A_{ji})^{\frac{k-1}{2}}=I$, 因此 $D_iA_{ij}=A_{ij}D_j$. 此时，与 $k$ 为偶数时的证明类似，同样可得 $D_i=D_j$.

综合 (a) 和 (b), 不妨设 $1_i,2_i,\dots,t_i$ 都不为零， $(t+1)_i=\dots=(k-1)_i=0$. 令 $D=\varepsilon_1I_{r_1}\oplus\dots\oplus\varepsilon_tI_{r_t},r_h=h_i,\forall h\in[1,t]$. 当 $k$ 为偶数时有 $A_{ji}D^2=D^2A_{ji}$ 成立，且对比两端可得

$A_{ji}=\mathrm{diag}(C_{11}^{(ji)},\ldots,C_{tt}^{(ji)}),C_{hh}^{(ji)}$ 为 $r_h$ 阶阵，同理有 $A_{ij}=\mathrm{diag}(B_{11}^{(ij)},\ldots,B_{tt}^{(ij)})$, $B_{hh}^{(ij)}$ 为 $r_h$ 阶阵. 同理当 $k$ 为奇数时， $A_{ij},A_{ji}$ 亦为对角块阵.

## 2 主要结论

**定理 1** 设 $m,n$ 为正整数， $f\in L(S_n(C),M_m(C))$, 当且仅当下述之一成立

(i) $f=0$;

(ii) $n\le m$, 且存在 $R\in GL_m(C)$ 使

$$f(X)=R\{[\bigoplus_{i=1}^{t}(X\otimes\varepsilon_iI_{p_i})]\oplus 0_s\}R^{-1},\forall X\in S_n(C),$$

其中 $m=n\sum\limits_{i=1}^{k-1}p_i+s$, $p_i$ 为正整数.

**证明** 首先， $n>m$ 时，由引理 4 知存在某 $i\in[1,n]$, 使 $f(E_{ii})=0$, 再由引理 2 知 $f=0$ . 故若 $f\neq 0$, 则 $n\le m$, 且由引理 5 知对任意的 $X\in S_n(C)$ 有

$$P^{-1}f(X)P=\begin{bmatrix}
\alpha_{11}\varepsilon_1I_{r_1} & \cdots & \cdots & & \alpha_{1n}B_{11}^{(1n)} & & & \\
 & \ddots & & & & \ddots & & \\
 & & \alpha_{11}\varepsilon_tI_{r_t} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1n}B_{tt}^{(1n)} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\alpha_{n1}C_{11}^{(n1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{nn}\varepsilon_1I_{r_1} & & & \\
 & \ddots & & & & \ddots & & \\
 & & \alpha_{n1}C_{tt}^{(n1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{nn}\varepsilon_tI_{r_t} & \\
 & & & & & & & 0_s
\end{bmatrix}.$$

令

$$f_i(X)=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\varepsilon_iI_{r_i} & \cdots & \alpha_{1n}B_{ii}^{(1n)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{ni}C_{ii}^{(n1)} & \cdots & \alpha_{nn}\varepsilon_iI_{r_i}\end{bmatrix},\quad \forall i\in[1,t].$$

易见

$$f(X)=P(f_1(X)\oplus f_2(X)\oplus\cdots\oplus f_t(X)\oplus 0_s)P^{-1}(s=m-ns_i),\tag{12}$$

因此 $f_i$ 是保 $k$ 次幂的，且 $\varepsilon_i^{-1}f_i(I_n)=I_{nr_i}$.

下证 $\frac{1}{\varepsilon_i}f_i$ 为保幂等的线性映射.

事实上，对任意的幂等矩阵 $B=B^2$, 有 $B=B^2=\cdots=B^k$, 对任意的 $x\in C$, 有

$$f_i((I+xB)^k)=C_k^0x^kf_i(B)+C_k^1x^{k-1}f_i(B)+\cdots+C_k^{k-2}x^2f_i(B)+C_k^{k-1}xf_i(B)+C_k^kf_i(I).$$

另一方面有

$$\begin{aligned}(f_i(I+xB))^k=&(f_i(I)+xf_i(B))^k=(\varepsilon_iI+xf_i(B))^k\\ =&C_k^0x^kf_i(B)^k+\varepsilon_iC_k^1x^{k-1}f_i(B)^{k-1}+\cdots+\\ &\varepsilon_i^{k-2}C_k^{k-2}x^2f_i(B)^2+\varepsilon_i^{k-1}C_k^{k-1}xf_i(B)+\varepsilon_i^kC_k^kf_i(I).\end{aligned}$$

又因 $f_i((I+xB)^k)=(f_i(I+xB))^k$, 对比 $x^2$ 的系数得 $(f_i(B))^2=\varepsilon_i f_i(B)$, 这样一来对每个 $\frac{1}{\varepsilon_i}f_i$ 均可引用引理 3, 然后应用 (12) 式不难推得本定理结论.

**定理 2** 设 $m,n$ 为正整数， $f\in L(S_n(C),S_m(C))$, 则 $f$ 有定理 1 的形式，其中 $R^{\mathrm{T}}R=[\bigoplus_{i=1}^{t}(I\otimes V_i)]\oplus V_0$, 且 $V_0,V_1,\ldots,V_t$ 均对称可逆.

**证明** 由 $f(X)$ 对称知，有 $R^{\mathrm{T}}R\{[\bigoplus_{i=1}^{t}(X\otimes\varepsilon_i I_{p_i})]\oplus 0_s\}=\{[\bigoplus_{i=1}^{t}(X\otimes\varepsilon_i I_{p_i})]\oplus 0_s\}R^{\mathrm{T}}R$ 成立，因此可推得本定理的结论.

## 参考文献:


[1] 曹重光，张显．幂保持加法映射．数学进展 [J]. 2004, **33**(1): 103–109.
CAO Chong-guang, ZHANG Xian. *Power-preserving additive maps* [J]. Adv. Math. (China), 2004, **33**(1): 103–109. (in Chinese)

[2] BRĚSAR M, ŠEMRL P. *Linear transformations preserving potent matrices* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1993, **119**(1): 81–86.

[3] 张显，曹重光．保不变量的矩阵加群同态 [M], 哈尔滨：哈尔滨出版社， 2001.
ZHANG Xian, CAO Chong-guang. *Homomorphisms between Additive Matrix Groups which Preserve Some Invariances* [M]. Harbin: Harbin Press, 2001. (in Chinese)

[4] 曹重光．某些环上矩阵模的保幂等线性映射 [J]. 黑龙江大学自然科学学报， 1999, **16**(1): 1–4.
CAO Chong-guang. *Linear maps preserving idempotence of matrix modules over certain rings* [J]. Heilongjiang Daxue Ziran Kexue Xuebao, 1999, **16**(1): 1–4. (in Chinese)

[5] 佟鑫，曹重光．域上从对称矩阵空间到全矩阵空间保幂等的线性算子 [J]. 黑龙江大学自然科学学报， 2003, **20**(3): 25–28.
TONG Xin, CAO Chong-guang. *Idempotent-preserving linear operators from symmetric matrix spaces to arbitrary matrix spaces over a field* [J]. Heilongjiang Daxue Ziran Kexue Xuebao, 2003, **20**(3): 25–28. (in Chinese)

[6] LI Chi-Kwong, RODMAN L, ŠEMRL P. *Linear transformations between matrix spaces that map one rank specific set into another* [J]. Linear Algebra Appl., 2002, **357**: 197–208.

[7] TANG Xiao-min. *Linear operators preserving adjoint matrix between matrix spaces* [J]. Linear Algebra Appl., 2003, **372**: 287–293.

[8] CHAN Gin-Hor, LIM Ming-Huat. *Linear preservers on powers of matrices* [J]. Linear Algebra Appl., 1992, **162/164**: 615–626.


# Power-Preserving Linear Maps between Matrix Spaces


*CAO Chong-guang*[1], *HUANGFU Ming*[2]

(1. Department of Mathematicas, Heilongjiang University, Heilongjiang, 150080, China;
2. Department of Mathematics and Physics, Dalian Jiaotong University, Liaoning 116028, China )



**Abstract**: Let $C$ be a complex field. Let $m$ and $n$ be positive integers. $k$ is a fixed positive integer and $k\geq 2$. Let $M_m(C)$ and $S_n(C)$ be the vector spaces of all $m\times m$ matrices and $n\times n$ symmetric matrices over $C$, respectively. We characterize the linear maps preserving $k$-power from $S_n(C)$ to $M_m(C)$ and $S_n(C)$ to $S_m(C)$, respectively.



**Key words**: complex field; power-preserving; linear map.