第27卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.2
2007年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2007

文章编号: 1000-341X(2007)02-0437-08 **文献标识码**: **A**

$A(n,k)$ 和 $P(n,k)$ 的精确公式

吴树宏
(武汉理工大学理学院数学系，湖北 武汉 430070)
(E-mail: hustwsh@21cn.com)

摘 要: 设 $A(n,k)$ 表示不定方程 $\sum_{i=1}^{k} ix_i = n$ 的非负整数解的个数， $P(n,k)$ 为整数 n 分为 k 个部分的无序分拆的个数，每个分部不小于 1. 本文给出了 $A(n,k)$ 和 $P(n,k)$ 的精确表达式.

关键词: 不定方程；母函数；部分分式.
MSC(2000): 05A17
中图分类: O157.2

1 引 言

设 $A(n,k)$ 表示不定方程 $\sum_{i=1}^{k} ix_i = n$ 的非负整数解的个数， $P(n,k)$ 为整数 n 分为 k 个部分的无序分拆的个数. $A(n,3)$ 的精确值在文献 [1] 中已作为习题给出，即 $A(n,3)=\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{7}{72}+(-1)^n\frac{1}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}$. 基本原理是 $A(n,k)$ 作为母函数 $p^{(\le k)}(t)=\frac{1}{(1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^k)}$ 的展开式中幂 t^n 的系数，由部分分式给出. 文献 [2] 叙述了从 Euler,Caylay,MacMahon 等用不同的方法来求 $p^{(\le k)}(t)$ 展开式系数的方法，并导出 De. Morgan 的结果： $A(n,3)=\langle\frac{(n+3)^2}{12}\rangle$, 这里 $\langle x\rangle$ 表示最靠近 x 的整数. 文献 [3] 给出了 $A(n,4)$ 与 $A(n,5)$ 的精确公式及求对应简单公式的方法. 文献 [4] 给出了 $P(n,k)$ 的降部恒等式，文献 [5] 建立了 $A(n,k)$ 与 $P(n,k)$ 的联系，文献 [6],[7],[8] 给出了快速计算 $P(n,k)$ 的一些方法. 本文给出了 $A(n,k)$ 和 $P(n,k)$ 的精确表达式；作为算例，给出了 $A(n,6)$ 和 $P(n,6)$ 的表达式.

2 主要结论及其证明

下设 $\omega_m=e^{2\pi i/m},\Omega=\{1,2,\ldots,k\},\langle x\rangle$ 表示与 x 最接近的整数.

引理 1[5] $A(n,k)=P(n+k,k)$.

引理 2 若 $g(t)=\sum_{n=0}^{k}a_n(t-a)^n$ $(a_0\ne 0)$, $k+1\ge m\ge 1$, $0\le p\le m-1$, $\alpha=(a_0,a_1,\ldots,a_k)$, $I_0(\alpha)=1$, $I_1(\alpha)=a_1$, 当 $m-1\ge p\ge 2$ 时,

$$I_p(\alpha)=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ a_{p-1} & a_{p-2} & a_{p-3} & \ldots & a_1 & a_0\\ a_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \ldots & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

收稿日期: 2005-02-28; **接受日期**: 2005-12-13

则存在不以 a 为极点的亚纯函数 $h(t)$, 满足

$$\frac{1}{g(t)(t-a)^m}=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{b_n}{(t-a)^{m-n}}+h(t),$$

其中

$$b_0=\frac{1}{a_0},b_1=-\frac{a_1}{a_0^2},\ldots,b_p=(-1)^p\frac{I_p(\alpha)}{a_0^{p+1}},b_{m-1}=(-1)^{m-1}\frac{I_{m-1}(\alpha)}{a_0^m}.$$

证明 因 $((t-a)^m,g(t))=1$, 存在多项式 $u(t),v(t)$ (其中 $v(t)$ 的最高次数不大于 $m-1$), 满足 $(t-a)^m u(t)+g(t)v(t)=1$, 若将 $g(t)v(t)$ 在 a 点展开为幂级数, 则其常数项为 1, $(t-a)^n$ $(1\le n\le m-1)$ 的系数为 0. 令 $v(t)=\sum_{n=0}^k b_n(t-a)^n$, 则

$$g(t)v(t)=\sum_{n=0}^{2k}z^n\sum_{i+j=n}a_ib_j.$$

故有下述以 $b_0,b_1,\ldots,b_{m-1}$ 为未知数的线性方程组成立:

$$\begin{cases}a_0b_0=1,\\ a_1b_0+a_0b_1=0,\\ a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2=0,\\ \cdots,\\ a_{m-1}b_0+a_{m-2}b_1+\cdots+a_0b_{m-1}=0,\end{cases}$$

因 $D=a_0^m$, $D_0=a_0^{m-1}$, $D_1=-a_0^{m-2}I_1(\alpha),\ldots,D_p=(-1)^pa_0^{m-p-1}I_p(\alpha),\ldots,D_{m-1}=(-1)^{m-1}I_{m-1}(\alpha)$. 故

$$b_0=\frac{D_0}{D}=\frac{1}{a_0},\ldots,b_p=\frac{D_p}{D}=(-1)^p\frac{I_p(\alpha)}{a_0^{p+1}},\ldots,b_{m-1}=\frac{D_{m-1}}{D}=(-1)^{m-1}\frac{I_{m-1}(\alpha)}{a_0^m}.$$

从而有

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(t)(t-a)^m}&=\frac{(t-a)^mu(t)+g(t)v(t)}{g(t)(t-a)^m}=\frac{v(t)}{(t-a)^m}+\frac{u(t)}{g(t)}\\ &=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{b_n}{(t-a)^{m-n}}+\sum_{n=m}^{k}b_n(t-a)^{n-m}+\frac{u(t)}{g(t)}.\end{aligned}$$

令

$$h(t)=\sum_{n=m}^{k}b_n(t-a)^{n-m}+\frac{u(t)}{g(t)},$$

显然 h 是不以 a 为极点的亚纯函数.

引理 3 记 $\alpha(m,r)=\Big(c([\frac{k}{m}],m,r),c([\frac{k}{m}]+1,m,r),\ldots,c(\frac{k(k+1)}{2},m,r)\Big)$, 其中

$$c(n,m,r)=\sum_{I\subseteq\Omega}(-1)^{|I|}\begin{pmatrix}\sum\limits_{i\in I}i\\ n\end{pmatrix}\omega_m^{\,r(-n+\sum\limits_{i\in I}i)},$$

则

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^k)}=\sum_{\substack{(m,r)=1,0\le p\le[\frac{k}{m}]-1,\\ 1\le r\le m\le k.}}(-1)^p\frac{I_p(\alpha(m,r))}{c^{p+1}([\frac{k}{m}],m,r)(t-\omega_m^r)^{[\frac{k}{m}]-p}}.$$

证明　因为

$$(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^k)=\prod_{1\le r\le m\le k,(m,r)=1}(\omega_m^r-t)^{[\frac{k}{m}]},$$

$$\prod_{s=1}^{k}(1-t^s)=\sum_{I\subseteq\Omega}(-1)^{|I|}t^{\sum\limits_{i\in I}i}=\sum_{n=0}^{\frac{k(k+1)}{2}}(t-a)^n\sum_{I\subseteq\Omega}(-1)^{|I|}\left(\begin{array}{c}\sum\limits_{i\in I}i\\ n\end{array}\right)a^{-n+\sum\limits_{i\in I}i},$$

再由引理 2 即得结论.

定理　按引理 3 记号,

$$A(n,k)=\sum_{\substack{(m,r)=1,0\le p\le[\frac{k}{m}]-1,\\ 1\le r\le m\le k.}}\frac{I_p(\alpha(m,r))}{c^{p+1}([\frac{k}{m}],m,r)\omega_m^{r(n+[\frac{k}{m}]-p)}}\left(\begin{array}{c}n+[\frac{k}{m}]-p-1\\ n\end{array}\right),$$

$$P(n,k)=\sum_{\substack{(m,r)=1,0\le p\le[\frac{k}{m}]-1,\\ 1\le r\le m\le k.}}(-1)^{[\frac{k}{m}]}\frac{I_p(\alpha(m,r))}{c^{p+1}([\frac{k}{m}],m,r)\omega_m^{r(n-k+[\frac{k}{m}]-p)}}\left(\begin{array}{c}n-k+[\frac{k}{m}]-p-1\\ n-k\end{array}\right).$$

证明　因为

$$\frac{1}{(1-t)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}m+n-1\\ n\end{array}\right)t^n,\tag{1}$$

$A(n,k)$ 为 $p^{(\le k)}(t)=\frac{1}{(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^k)}$ 的 n 次幂系数，由引理 3 及 (1) 式，有

$$\begin{aligned}A(n,k)&=\sum_{\substack{(m,r)=1,0\le p\le[\frac{k}{m}]-1,\\ 1\le r\le m\le k.}}(-1)^p\frac{I_p(\alpha(m,r))}{c^{p+1}([\frac{k}{m}],m,r)(-\omega_m^r)^{[\frac{k}{m}]-p}}\left(\begin{array}{c}n+[\frac{k}{m}]-p-1\\ n\end{array}\right)\omega_m^{-rn}\\ &=\sum_{\substack{(m,r)=1,0\le p\le[\frac{k}{m}]-1,\\ 1\le r\le m\le k.}}(-1)^{[\frac{k}{m}]}\frac{I_p(\alpha(m,r))}{c^{p+1}([\frac{k}{m}],m,r)\omega_m^{r(n+[\frac{k}{m}]-p)}}\left(\begin{array}{c}n+[\frac{k}{m}]-p-1\\ n\end{array}\right),\end{aligned}$$

再由引理 1, $P(n,k)=A(n-k,k)$, 得

$$P(n,k)=\sum_{\substack{(m,r)=1,0\le p\le[\frac{k}{m}]-1,\\ 1\le r\le m\le k.}}(-1)^{[\frac{k}{m}]}\frac{I_p(\alpha(m,r))}{c^{p+1}([\frac{k}{m}],m,r)\omega_m^{r(n-k+[\frac{k}{m}]-p)}}\left(\begin{array}{c}n-k+[\frac{k}{m}]-p-1\\ n-k\end{array}\right).$$

引理 4　若 $(m,r)=1$, $1\le r\le m\le k$, 则

$$c([\frac{k}{m}],m,r)=(-1)^{[\frac{k}{m}]}m^{2[\frac{k}{m}]}[\frac{k}{m}]!\,\omega_m^{-r[\frac{k}{m}]}\prod_{n=[\frac{k}{m}]m+1}^{k}(1-\omega_m^{rn}).$$

证明 注意文献 [9], p45 定理 2, 有 $t^m-1=(t-1)\prod_{n=1}^{m-1}(t-\omega_m^{rn})$. 从而

$$\prod_{n=1}^{m-1}(1-\omega_m^{rn})=\lim_{t\to 1}\frac{t^m-1}{t-1}=m,$$

$$\begin{aligned}c([\frac{k}{m}],m,r)&=\lim_{t\to\omega_m^r}\frac{\prod\limits_{n=1}^{k}(1-t^n)}{(t-\omega_m^r)^{[\frac{k}{m}]}}\\&=[\prod_{n=1}^{m-1}(1-\omega_m^{rn})]^{[\frac{k}{m}]}\prod_{n=[\frac{k}{m}]m+1}^{k}(1-\omega_m^{rn})\prod_{n=1}^{[\frac{k}{m}]}\lim_{t\to\omega_m^r}\frac{1-t^{nm}}{t-\omega_m^r}\\&=m^{[\frac{k}{m}]}\prod_{n=[\frac{k}{m}]m+1}^{k}(1-\omega_m^{rn})\prod_{n=1}^{[\frac{k}{m}]}(-nm\omega_m^{r(nm-1)})\\&=(-1)^{[\frac{k}{m}]}m^{2[\frac{k}{m}]}[\frac{k}{m}]!\,\omega_m^{-r[\frac{k}{m}]}\prod_{n=[\frac{k}{m}]m+1}^{k}(1-\omega_m^{rn}).\end{aligned}$$

引理 5 $I_p(\alpha)=\sum_{n=1}^{p}(-1)^{n+1}a_0^{n-1}a_nI_{p-n}(\alpha)$.

证明 记 $I_{p,i}(\alpha)$ 为 $I_p(\alpha)$ 的第一列用 $a_{i+1},a_{i+2},\ldots,a_{i+p}$ 替换后所得的行列式. 则有

$$\begin{aligned}I_p(\alpha)&=a_1I_{p-1}(\alpha)-a_0I_{p-1,1}(\alpha)\\&=a_1I_{p-1}(\alpha)-a_0[a_2I_{p-2}(\alpha)-a_0I_{p-2,2}(\alpha)]\\&=a_1I_{p-1}(\alpha)-a_0a_2I_{p-2}(\alpha)+a_0^2[a_3I_{p-3}(\alpha)-a_0I_{p-3,3}(\alpha)]\\&=\cdots\\&=\sum_{n=1}^{p}(-1)^{n+1}a_0^{n-1}a_nI_{p-n}(\alpha).\end{aligned}$$

引理 6 若 $1<r<m,(m,r)=1,0\le n\le\frac{k(k+1)}{2},c(n,m,1)=\sum_{j=0}^{m-1}a_{j,m}\omega_m^j$ (其中 $a_{j,m}(0\le j\le m-1)$ 为实数), 则 $c(n,m,r)=\sum_{j=0}^{m-1}a_{j,m}\omega_m^{jr}$.

证明 设 $m=pq\ (p,q\ge 1)$, 则 $t^m-1=(t^p-1)\sum_{j=0}^{q-1}t^{pj}$. 故 $\sum_{j=0}^{q-1}\omega_m^{pj}=0$. $1,\omega_m,\ldots,\omega_m^{m-1}$ 之间的任何线性关系可由满足上述条件 $m=pq\ (p,q\ge 1)$ 的所有式子线性导出. 由文献 [9] 结论, 有

$$\sum_{j=0}^{q-1}\omega_m^{rpj}=\sum_{j=0}^{q-1}\omega_m^{pj}=0.$$

设 $\frac{1}{n!}[\prod_{j=1}^{k}(1-t^j)]^{(n)}=\sum_{j=0}^{\frac{k(k+1)}{2}-n}b_jt^j$. 因为

$$c(n,m,1)=\frac{1}{n!}[\prod_{j=1}^{k}(1-t^j)]^{(n)}\Big|_{t=\omega_m}=\sum_{j=0}^{\frac{k(k+1)}{2}-n}b_j\omega_m^j=\sum_{j=0}^{m-1}a_{j,m}\omega_m^j.$$

故

$$c(n,m,r)=\frac{1}{n!}[\prod_{j=1}^{k}(1-t^j)]^{(n)}\Big|_{t=\omega_m^r}=\sum_{j=0}^{\frac{k(k+1)}{2}-n}b_j\omega_m^{rj}=\sum_{j=0}^{m-1}a_{j,m}\omega_m^{rj}.$$

引理 7 当 $n \geq 5$ 时,

$$A(n,k)=\left\langle \sum_{\substack{(m,r)=1,\,0\leq p\leq [\frac{k}{m}]-1,\\ 1\leq r\leq m\leq k-2.}} \frac{I_p(\alpha(m,r))}{c^{p+1}([\frac{k}{m}],m,r)\omega_m^{r(n+[\frac{k}{m}]-p)}} \begin{pmatrix} n+[\frac{k}{m}]-p-1 \\ n \end{pmatrix} \right\rangle;$$

当 $n \geq 11$ 时,

$$P(n,k)=\left\langle \sum_{\substack{(m,r)=1,\,0\leq p\leq [\frac{k}{m}]-1,\\ 1\leq r\leq m\leq k-2.}} (-1)^{[\frac{k}{m}]}\frac{I_p(\alpha(m,r))}{c^{p+1}([\frac{k}{m}],m,r)\omega_m^{r(n-k+[\frac{k}{m}]-p)}} \begin{pmatrix} n-k+[\frac{k}{m}]-p-1 \\ n-k \end{pmatrix} \right\rangle.$$

证明 当 $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $|\sin x| \geq \frac{2}{\pi}|x|$, 等号当且仅当 $|x| = \frac{\pi}{2}$ 时成立. 故当 $r \leq [\frac{m}{2}]$ 时,

$$|1-\omega_m^r| = \sqrt{(1-\cos\frac{2\pi r}{m})^2+\sin^2\frac{2\pi r}{m}} = \sqrt{2-2\cos\frac{2\pi r}{m}} = 2|\sin\frac{\pi r}{m}| \geq \frac{4r}{m}.$$

由引理 4 及文献 [9] 结论,

$$\left| \sum_{\substack{(m,r)=1,\,m=k-1,k,\\ 1\leq r\leq m.}} \frac{1}{c(1,m,r)\omega_m^{r(n+1)}} \right| = \left| \sum_{\substack{(m,r)=1,\,m=k-1,k,\\ 1\leq r\leq m.}} \frac{-1}{m^2\omega_m^{rn}\prod\limits_{n=m+1}^{k}(1-\omega_m^{rn})} \right|$$

$$= \left| \sum_{\substack{(m,r)=1,\,m=k-1,k,\\ 1\leq r\leq \frac{m}{2}.}} \frac{2}{m^2\omega_m^{rn}\prod\limits_{n=1}^{k-m}(1-\omega_m^{rn})} \right| \leq \left| \sum_{\substack{(m,r)=1,\,m=k-1,k,\\ 1\leq r\leq \frac{m}{2}.}} \frac{2}{m^2\prod\limits_{n=1}^{k-m}\frac{4|rn-m\langle\frac{rn}{m}\rangle|}{m}} \right|$$

$$\leq \frac{k-1}{k^2}+\frac{1}{k-1}\sum_{p=1}^{[\frac{k-2}{2}]}\frac{1}{p} < \frac{1}{k}+\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{[\frac{k}{2}]-\frac{1}{2}}\frac{1}{t}dt}{k-1} \leq \frac{1}{k}+\frac{\ln\left(2[\frac{k}{2}]-1\right)}{k-1} \leq \frac{1}{5}+\frac{\ln 3}{4} < \frac{1}{2}.$$

再由定理及引理 1 结论可得, 当 $n \geq 5$ 时,

$$A(n,k)=\left\langle \sum_{\substack{(m,r)=1,\,0\leq p\leq [\frac{k}{m}]-1,\\ 1\leq r\leq m\leq k-2.}} \frac{I_p(\alpha(m,r))}{c^{p+1}([\frac{k}{m}],m,r)\omega_m^{r(n+[\frac{k}{m}]-p)}} \begin{pmatrix} n+[\frac{k}{m}]-p-1 \\ n \end{pmatrix} \right\rangle;$$

当 $n \geq 11$ 时,

$$P(n,k)=\left\langle \sum_{\substack{(m,r)=1,\,0\leq p\leq [\frac{k}{m}]-1,\\ 1\leq r\leq m\leq k-2.}} (-1)^{[\frac{k}{m}]}\frac{I_p(\alpha(m,r))}{c^{p+1}([\frac{k}{m}],m,r)\omega_m^{r(n-k+[\frac{k}{m}]-p)}} \begin{pmatrix} n-k+[\frac{k}{m}]-p-1 \\ n-k \end{pmatrix} \right\rangle.$$

注 1 上面的方法对求 Diophantine 方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_kx_k=n$ $(1\leq a_1<a_2<\cdots<a_k)$ 的非负整数解的个数亦有效.

注 2 $I_n(\alpha)$ 可利用引理 5 递归求出．由引理 6, $c(n,m,r)$ 仅须求出 $c(n,m,1)$ 即可．引理 3 中 $c(n,m,r)$ 的求法仅具理论意义，实际运算并不方便．除 $c([\frac{k}{m}],m,r)$ 可用引理 4 求出外，当 $[\frac{k}{m}]$ 较大时，可用下面的公式进行计算：

$$c(n,m,r)=\frac{1}{(n-[\frac{k}{m}])!}\left(\frac{\prod\limits_{p=1}^{k}(1-t^p)}{(t-\omega_m^r)^{[\frac{k}{m}]}}\right)^{(n-[\frac{k}{m}])}\Bigg|_{t=\omega_m^r}; \tag{2}$$

当 $[\frac{k}{m}]$ 较小时，可用下面的公式进行计算：

$$c(n,m,r)=\frac{1}{n!}\left[\prod_{p=1}^{k}(1-t^p)\right]^{(n)}\Bigg|_{t=\omega_m^r}. \tag{3}$$

(2),(3) 式中的连乘积可用多项式的竖式乘法求出．若

$$\prod_{p=1}^{k}(1-t^p)=\sum_{p=0}^{\frac{k(k+1)}{2}}b_pt^p,$$

则

$$c(n,m,r)=\sum_{p=n}^{\frac{k(k+1)}{2}}\frac{b_pp\,!\,\omega_m^{r(p-n)}}{n!(p-n)!};\quad c(n+1,m,r)=\sum_{p=n+1}^{\frac{k(k+1)}{2}}\frac{b_pp\,!\,\omega_m^{r(p-n-1)}}{(n+1)!(p-n-1)!};$$

因 $c(n,m,r)$ 和 $c(n+1,m,r)$ 的求和式的对应项有倍数关系，故可递归求出．由引理 7,$A(n,k)$ 、$P(n,k)$ 的最后两项可不算 (由下例可看出，引理 7 的结论还可进一步改善)．最后的合并可用 Mathematica 4.0 解决．

注 3 当 k 稍大时， $A(n,k)$, $P(n,k)$ 的具体表达式手算不易求出 (下例为笔者用计算器算出), 可用计算机计算，计算量是 k 的多项式时间．因文献 [8] 是用公式 $P(n,k)=P(n-1,k-1)+P(n-k,k)$ 造表的， $P(n,k)$ 的计算量是 k,n 的多项式时间．由此看出当 n 很大时，计算单个的 $A(n,k)$, $P(n,k)$ ，本文的方法较好．

例

$$\begin{aligned}A(n,6)=\langle&\frac{12n^5+630n^4+12320n^3+110250n^2+439810n+598731}{1036800}+\\&\frac{(-1)^n(n^2+21n+97)}{768}+\frac{(n+11)\cos\frac{2n\pi}{3}}{81}\rangle,\\P(n,6)=\langle&\frac{12n^5+270n^4+1520n^3-1350n^2-19190n-9081}{1036800}+\\&\frac{(-1)^n(n^2+9n+7)}{768}+\frac{(n+5)\cos\frac{2n\pi}{3}}{81}\rangle.\end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{6}(1-t^n)=&(t-1)^6(t+1)^3(t-\omega_3)^2(t-\omega_3^2)^2(t-\omega_4)(t-\omega_4^3)(t-\omega_5)(t-\omega_5^2)(t-\omega_5^3)\cdot\\&(t-\omega_5^4)(t-\omega_6)(t-\omega_6^5).\end{aligned}$$

因为

$$\frac{\prod_{n=1}^{6}(1-t^n)}{(t-1)^6}=\prod_{n=1}^{5}\sum_{i=0}^{n}t^i=1+5t+14t^2+29t^3+49t^4+71t^5+90t^6+101t^7+$$
$$101t^8+90t^9+71t^{10}+49t^{11}+29t^{12}+14t^{13}+5t^{14}+t^{15}.$$

由 (2) 式可求得

$$c(6,1,1)=720,\ c(7,1,1)=5400,\ c(8,1,1)=20100,\ c(9,1,1)=48750,$$
$$c(10,1,1)=85514,\ c(11,1,1)=114257.$$

由引理 5 递推可求得

$$I_2[\alpha(1,1)]=17\cdot 2^5\cdot 3^3\cdot 10^3,\ I_3[\alpha(1,1)]=17\cdot 2^6\cdot 3^5\cdot 10^5,$$
$$I_4[\alpha(1,1)]=31037\cdot 2^9\cdot 3^7\cdot 10^3,\ I_5[\alpha(1,1)]=85823\cdot 2^{11}\cdot 3^9\cdot 10^4.$$

因为

$$\frac{\prod_{n=1}^{6}(1-t^n)}{(t+1)^3}=1-4t+8t^2-13t^3+19t^4-25t^5+31t^6-35t^7+37t^8-38t^9+$$
$$37t^{10}-35t^{11}+31t^{12}-25t^{13}+19t^{14}-13t^{15}+8t^{16}-4t^{17}+t^{18}.$$

仿上述方法，类似地，有

$$c(3,2,1)=3\cdot 2^7,\ c(4,2,1)=-3^3\cdot 2^7,\ c(5,2,1)=511\cdot 2^5.\ I_2(\alpha(2,1))=2^{12}\cdot 3\cdot 461.$$
$$\prod_{n=1}^{6}(1-t^n)=1-t-t^2+t^5+2t^7-t^9-t^{10}-t^{11}-t^{12}+2t^{14}+t^{16}-t^{19}-t^{20}+t^{21}.$$
$$c(2,3,1)=2\cdot 3^4\omega_3,\ c(3,3,1)=3^3(59+4\omega_3).\ c(2,3,2)=2\cdot 3^4\omega_3^2,$$
$$c(3,3,2)=3^3(59+4\omega_3^2),\ c(1,4,1)=2^5(1+i),\ c(1,4,3)=2^5(1-i).$$
$$c(1,5,1)=25(1-\omega_5^4),\ c(1,5,2)=25(1-\omega_5^3),\ c(1,5,3)=25(1-\omega_5^2),$$
$$c(1,5,4)=25(1-\omega_5).\ c(1,6,1)=-36\omega_6^5,\ c(1,6,5)=-36\omega_6.$$

由定理并整理得：

$$A(n,6)=\frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5^2\cdot 2^7\cdot 3^3}+\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{2^8\cdot 3^2}+$$
$$\frac{17(n+3)(n+2)(n+1)}{2^5\cdot 3^4}+\frac{85(n+2)(n+1)}{2^6\cdot 3^3}+\frac{31037(n+1)}{5^2\cdot 2^8\cdot 3^3}+$$
$$\frac{85823}{5^2\cdot 2^9\cdot 3^3}+\frac{(-1)^n(n+20)(n+1)}{2^8\cdot 3}+\frac{(-1)^n 461}{2^9\cdot 3^2}+$$
$$\frac{6n+65}{2\cdot 3^5}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{2\cos\frac{2(n-1)\pi}{3}}{3^5}-\frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{2}-\cos\frac{n\pi}{2}}{2^5}-$$

$$\frac{2[-2\cos\frac{4n\pi}{5}+2\cos\frac{2(2n+2)\pi}{5}-\cos\frac{2(2n+3)\pi}{5}+\cos\frac{2(2n+4)\pi}{5}]}{5^3}-$$
$$\frac{2[-2\cos\frac{2n\pi}{5}+2\cos\frac{2(n+1)\pi}{5}+\cos\frac{2(n+2)\pi}{5}-\cos\frac{2(n+4)\pi}{5}]}{5^3}+\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2\cdot 3^2}$$
$$=\langle\frac{12n^5+630n^4+12320n^3+110250n^2+439810n+598731}{1036800}+$$
$$\frac{(-1)^n(n^2+21n+97)}{768}+\frac{(n+11)\cos\frac{2n\pi}{3}}{81}\rangle.$$

由引理 1 及上结论并整理得：

$$P(n,6)=\langle\frac{12n^5+270n^4+1520n^3-1350n^2-19190n-9081}{1036800}+$$
$$\frac{(-1)^n(n^2+9n+7)}{768}+\frac{(n+5)\cos\frac{2n\pi}{3}}{81}\rangle.$$

可以验证，上公式与文献 [8] 中的相应数据符合得很好.

参考文献：

[1] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京：科学出版社， 1957, 12–13.
HUA Luo-geng. *Introduction to Number Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1957, 12–13. (in Chinese)

[2] 柯召，魏万迪. 组合论 (上册) [M]. 北京：科学出版社， 1981, 294–304.
KE Zhao, WEI Wan-di. *Combinatorial Theory (Vol.1)* [M]. Beijing: Science Press, 1981, 294–304. (in Chinese)

[3] 蔺大正. $A(n,4)$ 与 $A(n,5)$ 的精确公式与简单公式 [J]. 四川大学学报， 1998, **35**(5): 660–663.
LIN Da-zheng. *Accurate and simple formulas for $A(n,4)$ and $A(n,5)$* [J]. Sichuan Daxue Xuebao, 1998, **35**(5): 660–663. (in Chinese)

[4] 伍启期. $P(n,k)$ 的一个降部恒等式 [J]. 数学实践与认识， 1993, **4**: 50–55.
Wu Qi-qi. *A descending identity for $P(n,k)$* [J]. Math. Practice Theory, 1993, **4**: 50–55. (in Chinese)

[5] 伍启期. $P(n,4)$ 与 $A(n,4)$ 的简单统一显式 [J]. 科学通报， 1996, **41**(10): 959.
Wu Qi-qi. *On the simple unified exlicit formulas for $P(n,4)$ and $A(n,4)$* [J]. Chinese Sci. Bull., 1996, **41**(10): 959. (in Chinese)

[6] WU Qi-qi. *Remarks on direct computation for $P(n,k)$* [J]. Southeast Asian Bull. Math., 1995, **19**(1): 69–73.

[7] 伍启期. $P(n,k)$ 的计数及其良域 [J]. 数学研究与评论， 2001, **21**(2): 281–286.
WU Qi-qi. *The calculation of $P(n,k)$ and its good field* [J]. J. Math. Res. Exposition, 2001, **21**(2): 281–286. (in Chinese)

[8] 伍启期. 快速造 $P(n,k)$ 大表的左肩法则和斜线法则 [J]. 数学学报， 2001, **44**(5): 891–897.
WU Qi-qi. *On the law of left shoulder and the law of oblique line for constructing a large table of $P(n,k)$ quickly* [J]. Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 2001, **44**(5): 891–898. (in Chinese)

[9] 闵嗣鹤，严士健. 初等数论 [M]. 北京：人民教育出版社， 1982.
MIN Si-he, YAN Shi-jian. *Elementary Theory of Numbers* [M]. Beijing: Peoples's Education Press, 1982. (in Chinese)

Accurate Formulae of $A(n,k)$ and $P(n,k)$

WU Shu-hong
(Department of Mathematics, Wuhan University of Technology, Hubei 430070, China)

Abstract: Let $A(n,k)$ denote the number of nonnegative integer solutions of Diophantine equation $\sum_{i=1}^{k} ix_i = n$, and $P(n,k)$ denote the number of unordered partitions of an integer n into k parts with each part ≥ 1. In this paper, accurate formulae of $A(n,k)$ and $P(n,k)$ are established.

Key words: Diophantine equation; generating function; partial fraction.