文章编号: 1000-341X(2007)03-0591-10 **文献标识码**: A

一类变换半群的正则元和 Green 关系

孙垒[1], 裴惠生[2,3], 程正兴[1]
(1. 西安交通大学理学院, 陕西 西安 710049; 2. 信阳师范学院数学与信息科学学院,
河南 信阳 464000; 3. 河南省计算中心, 河南 郑州 450008)
(E-mail: sunlei97@163.com; sunlei97@126.com)

摘 要: 设 $\mathcal{T}_X$ 为 X 上的全变换半群, E 为 X 上的等价关系. 令

$$T_E(X)=\{f\in\mathcal{T}_X:\forall\,(x,y)\in E,(f(x),f(y))\in E\},$$

则 $T_E(X)$ 是 $\mathcal{T}_X$ 的子半群. 如果 X 是一个全序集, E 是 X 上的一个凸等价关系, 设 $OP_E(X)$ 为 $T_E(X)$ 中所有保向映射作成的半群. 对于有限全序集 X 上一类特殊的凸等价关系 E, 本文刻画了半群 $OP_E(X)$ 的正则元的特征, 并且描述了这个半群上的 Green 关系.

关键词: 变换半群; 等价关系; 正则元; Green 关系; 保向映射.
MSC(2000): 20M20
中图分类: O152.7

1 引言和准备

设 S 是半群, 对于 S 中的元素 a, 若存在 $b\in S$, 使 $a\,b\,a=a$, 则称 a 是 S 的正则元. 若 S 中的每个元素都是正则元, 则称 S 是正则半群. 半群的 Green 关系 [1], 即 $\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{H},\mathcal{D},\mathcal{J}$, 在半群代数理论的形成和发展过程中起着重要作用, 对于揭示半群的代数结构有重要意义.

然而, 某些变换半群的 Green 关系的刻画是相当困难的. 比如, 拓扑空间 X 上所有连续自映射 (关于映射的复合运算) 所成的半群 $S(X)$ 的 Green 关系的刻画就非常困难. Magill 与 Subbiah 在文献 [2] 中颇为艰难地描述了 $S(X)$ 中正则元的 Green 关系. 而一般元素的 Green 关系至今仍没有圆满解决.

设 $X(|X|\geq 3)$ 是一个集合, $\mathcal{T}_X$ 为 X 上的全变换半群. 对于 X 上的一个等价关系 E, 文献 [6] 中考察了 $\mathcal{T}_X$ 的由等价关系 E 决定的子半群

$$T_E(X)=\{f\in\mathcal{T}_X:\forall\,(x,y)\in E,(f(x),f(y))\in E\}.$$

证明了若将 X 带上由所有 E- 类作为拓扑基的拓扑, 使 X 成为拓扑空间, 则有 $T_E(X)=S(X)$. 文献 [7] 中刻画了 $T_E(X)$ 的正则元, 并描述了 $T_E(X)$ 的一般元素的 Green 关系. 从而对于一类特殊的拓扑空间 X, 给出了半群 $S(X)$ 中一般元素 Green 关系的描述.

若 $X=\{1,2,\ldots,n\}$ 为全序集 (按照通常序), 我们设想把 X 的元素按照通常序顺时针排列在圆周上, 使每个 i $(1\leq i<n)$ 介于 $i-1$ 和 $i+1$ 之间, n 介于 $n-1$ 和 1 之间. 并且约定在模 $n(2n)$ 的意义上有 $n+1=1,\,n+2=2,\ldots,n+n=n(2n+1=1,\,2n+2=2,\ldots,2n+2n=2n)$, 这里

收稿日期: 2006-02-15; **接受日期**: 2006-12-12
基金项目: 河南省自然科学基金 (0511010200).

$n(2n)$ 是 X 的长度. 设 Y 是 X 的子集, $x,y \in X$, 如果 $x \le y$, 定义 $[x,y]=\{z\in X: x\le z\le y\}$; 如果 $y<x$, 定义 $[x,y]=\{z\in X: x\le z\le n$ 或 $1\le z\le y\}$. 称 $[x,y]$ 为 X 的闭区间. 容易看出, 这样定义的区间是顺时针的. 类似可以定义其它类型的区间, 如 $[x,y),(x,y],(x.y)$. 设 $Y\subseteq X$, 且对于任意 $x,y\in Y$, 都有 $[x,y]\subseteq Y$ 或 $[y,x]\subseteq Y$, 则称 Y 是 X 的凸子集. 称全序集 X 上一个等价关系 E 为凸的, 如果每个 E- 类都是 X 的凸子集.

设 $X=\{1,2,\ldots,n\}$ 是全序集, $f\in\mathcal{T}_X$. 对于任意 $x,y\in X$, 若 $x\le y$ 蕴含 $f(x)\le f(y)$, 则称 f 是保序映射. X 上的所有保序映射 (关于映射的复合运算) 作成的半群记为 $\mathcal{O}_n$[3]. 设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ 是一个整数序列, 若至多存在一个 i, 使 $a_i>a_{i+1}$, 则称 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ 是一个循环序列. 对于映射 $f\in\mathcal{T}_X$, 若 $(f(1),f(2),\ldots,f(n))$ 是一个循环序列, 则称 f 是一个保向映射. 换句话说, f 是保向映射当且仅当存在 $j\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, 使得

$$f(j+1)\le f(j+2)\le\cdots\le f(n)\le f(1)\le\cdots\le f(j)$$

(若 $j=0$, 则 $f(1)\le f(2)\le\cdots\le f(n)$). X 上的所有保向映射 (关于映射的复合运算) 作成的半群记为 OP_n[4,5]. 显然若 f 是保序映射, 则 f 也是保向映射.

设 E 是全序集 X 上一个凸等价关系, 则

$$\mathcal{O}_E(X)=\{f\in T_E(X): \forall\, x,\, y\in X, x\le y\Rightarrow f(x)\le f(y)\}$$

是 $T_E(X)$ 的子半群, 其中的运算是映射的复合. 设全序集 (按照通常序)$X=\{1,2,\ldots,mn\}$ $(m\ge 2,\, n\ge 2)$, 等价关系 $E=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup\cdots\cup(A_m\times A_m)$, 其中

$$A_1=\{1,2,\ldots,n\},\, A_2=\{n+1,n+2,\ldots,2n\},\,\ldots,A_m=\{(m-1)n+1,(m-1)n+2,\ldots,mn\}.$$

在这些假设之下, 文献 [8] 讨论了 $\mathcal{O}_E(X)$ 的正则元的条件, 并描述了一般元素的 Green 关系.

对于有限全序集 X, 用 $OP_E(X)$ 表示 $T_E(X)$ 中所有保向映射 (关于映射的复合运算) 作成的半群. 显然 $OP_E(X)$ 也是 $T_E(X)$ 的子半群, 并且 $\mathcal{O}_E(X)\subseteq OP_E(X)$. 自然地, 我们会考虑如何刻画 $OP_E(X)$ 的正则元和描述 $OP_E(X)$ 的 Green 关系. 但是, 对于一般情形, 即对于任意有限全序集 X 和 X 上的任意等价关系, 我们很难描述半群 $OP_E(X)$ 的 Green 关系. 因此, 我们先考虑一种特殊情形. 没有特别说明, 按照通常序, 本文总是假设全序集 $X=\{1,2,\ldots,2n\}$ $(n\ge 2)$. 而等价关系是 $E=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)$, 其中 $A_1=\{1,2,\ldots,n\}$, $A_2=\{n+1,n+2,\ldots,2n\}$. 文中出现的每个区间都是顺时针方向的. 如

$$[2,5]=\{2,3,4,5\};\ (2n-2,3)=\{2n-1,2n,1,2\}.$$

在上述关于全序集 X 和凸等价关系 E 的假设下, 本文刻画了半群 $OP_E(X)$ 的正则元, 描述了 $OP_E(X)$ 的一般元素的 Green 关系, 得到了任意两个元素 $\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{H},\mathcal{D}$ 相关的条件.

下面介绍本文将要用到的符号和引理. 用 X/E 表示 X 上由等价关系 E 决定的商集. 对每个 $f\in\mathcal{T}_X$, 令 $\pi(f)$ 表示由 f 决定的 X 的分解, 即 $\pi(f)=\{f^{-1}(x):x\in f(X)\}$.

设 $A\subseteq X$, 令 $\pi_A(f)=\{M\in\pi(f): M\cap A\ne\emptyset\}$. 显然有下面的结果.

引理 1.1[7] 设 $f\in\mathcal{T}_X$, A,B 是 X 的子集, 当且仅当 $\pi_A(f)\subseteq\pi_B(f)$, 则 $f(A)\subseteq f(B)$.

引理 1.2[7] 设 $f\in T_E(X)$, 对于每个 E- 类 A, 存在 $B\in X/E$, 使 $f(A)\subseteq B$. 从而对于每个 E- 类 A, $f^{-1}(A)$ 或是空集或是一些 E- 类的并.

文中没有作说明的符号，参看文献 [4], [7].

2 $OP_E(X)$ 的正则元

本节将描述半群 $OP_E(X)$ 的正则元的条件.

引理 2.1 设 $f \in OP_E(X)$, 则每个 $P \in \pi(f)$ 是 X 的凸子集.

证明 设 $f \in OP_E(X)$, 于是存在 $j \in \{0,1,\dots,2n-1\}$, 使

$$f(j+1) \le f(j+2) \le \cdots \le f(2n) \le f(1) \cdots \le f(j).$$

设 $P \in \pi(f)$, $i,k \in P$ 且 $i<k$, 于是 $f(i)=f(k)$. 若 $[i,\,k] \subseteq [j+1,\,2n]$ 或 $[i,\,k] \subseteq [1,\,j]$, 则显然对任意 $z \in [i,k]$, 有 $f(i)=f(z)=f(k)$, 故 $[i,k] \subseteq P$. 若 $j, j+1 \in [i,k]$, 那么对于任意 $z \in [k,i]$, 有 $f(k)=f(z)=f(i)$. 于是 $[k,i] \subseteq P$. 故 P 是 X 的凸子集. □

定理 2.2 设 $f \in OP_E(X)$, 则 f 是 $OP_E(X)$ 的正则元当且仅当对于每个 $A \in X/E$, 若 $A \cap f(X) \ne \emptyset$, 则存在 $B \in X/E$, 使 $A \cap f(X) = f(B)$.

证明 *必要性*. 设 f 是 $OP_E(X)$ 的正则元，则存在 $g \in OP_E(X)$, 使 $f=fgf$. 设 $A \in X/E$ 且 $A \cap f(X) \ne \emptyset$. 对于每个 $y \in A \cap f(X)$, 存在 $x \in X$, 使 $y=f(x)$. 于是

$$y=f(x)=fgf(x)=fg(y).$$

设 $g(A) \subseteq B \in X/E$, 则 $y=fg(y) \in fg(A) \subseteq f(B)$. 从而 $A \cap f(X) \subseteq f(B)$. 注意到 $f(B)$ 必包含在某个 E- 类中，于是 $A \cap f(X) = f(B)$.

充分性. 对于满足条件的保向映射 f, 需要构造 $g \in OP_E(X)$, 使 $f=fgf$. 设

$$f(j+1) \le f(j+2) \le \cdots \le f(2n) \le f(1) \le \cdots \le f(j),$$

这里 j, $j+1$ 可能在同一个 E- 类中，也可能在不同的 E- 类中．下面分两种情形定义 g.

情形 1. $(j,j+1) \in E$. 这时必有 $(f(j),f(j+1)) \in E$. 由于 E 是凸等价关系，于是 $f(X)$ 包含在某一个 E- 类 A 中．由假设知存在 $B \in X/E$, 使 $f(X)=A \cap f(X)=f(B)$. 这时还有几种可能.

(a). $A=B=A_1$ 且 j, $j+1 \in A_1$. 设 $f(X)=\{a_1,a_2,\dots,a_s\} \subseteq A_1$, 其中 $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_s \le n$. 于是存在某个 $k(1 \le k \le n)$, 使 $a_1 = f(j+1) \le f(j+2) \le \cdots \le f(n) = f(n+1) = \cdots = f(n+k) \le f(n+k+1) = \cdots = f(2n) = f(1) \le f(2) \le \cdots \le f(j) = a_s$. 对于每个 $t(1 \le t \le s)$, 令 $b_t = \max(f^{-1}(a_t) \cap B)$. 定义 $g: A \to B$

$$g(x)=\begin{cases} b_1, & x \in [\,1,\,a_1\,)\ (\text{若}\,1<a_1),\\ b_t, & x \in [\,a_t,\,a_{t+1}\,)\ (1 \le t < s),\\ b_s, & x \in [\,a_s,\,n\,]. \end{cases} \tag{*}$$

设 $f(n)=a_l$ $(1 \le l \le s)$, 那么 $b_l = \max(f^{-1}(a_l) \cap B) = n$, 并且

$$j+1 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_l = n,\ 1 \le b_{l+1} < b_{l+2} < \cdots < b_s = j.$$

于是

$$b_{l+1} < b_{l+2} < \cdots < b_s < b_1 < b_2 < \cdots < b_l.$$

对于每个 $x \in A_2$, 定义 $g(x) = b_s$. 这样在 X 上定义了 g. 显然 $g \in T_E(X)$. 记 $j' = a_{l+1} - 1$, 则 $j' + 1 = a_{l+1}$, 并且

$$g(j'+1) \le g(j'+2) \le \cdots \le g(n) = g(n+1) = g(n+2) = \cdots = g(2n) \le g(1) \le g(2) \le \cdots \le g(j'),$$

即 $g \in OP_E(X)$. 对每个 $x \in X$, 令 $f(x) = a_i$, 则 $fgf(x) = fg(a_i) = f(b_i) = a_i = f(x)$. 由 x 的任意性知 $f = fgf$.

(b). $A = B = A_1$ 且 $j, j+1 \in A_2$, 则

$$f(j+1) = f(j+2) = \cdots = f(2n) = f(1) \le f(2) \le \cdots \le f(n) = f(n+1) = \cdots = f(j).$$

如 $(*)$ 定义 $g : A \to B$. 对于每个 $x \in A_2$, 定义 $g(x) = b_1$. 于是 $1 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_s = n$. 不难验证 g 满足

$$g(n+1) = g(n+2) = \cdots = g(2n) = g(1) \le g(2) \le \cdots \le g(n),$$

即 $g \in OP_E(X)$ 且 $f = fgf$.

(c). $A = A_1$, $B = A_2$ 且 $j, j+1 \in A_1$, 则

$$f(j+1) = \cdots = f(n) = f(n+1) \le \cdots \le f(2n) = f(1) = \cdots = f(j).$$

如 $(*)$ 定义 $g : A \to B$. 对于每个 $x \in A_2$, 定义 $g(x) = b_1$. 不难验证 g 满足

$$g(n+1) = g(n+2) = \cdots = g(2n) = g(1) \le g(2) \le \cdots \le g(n),$$

即 $g \in OP_E(X)$ 且 $f = fgf$.

(d). $A = A_1$, $B = A_2$ 且 $j, j+1 \in A_2$. 于是存在某个 k $(1 \le k \le n)$, 使

$$f(j+1) \le \cdots \le f(2n) = f(1) = \cdots = f(k) \le f(k+1) = \cdots = f(n) = f(n+1) \le \cdots \le f(j).$$

这时 g 的定义与 (a) 类似.

其它没有列举的可能性的讨论类似, 这里省略. 于是在情形 1 中我们总有 $g \in OP_E(X)$, 使得 $fgf = f$ 成立.

情形 2. $(j, j+1) \notin E$. 这时有两种可能.

(a). $j = n$, $j+1 = n+1$, 则 $f(n+1) \le \cdots \le f(2n) \le f(1) \le \cdots \le f(n)$. 如果 $f(n)$, $f(n+1)$ 包含在同一个 E- 类中, 那么 $f(X)$ 包含在某个 E- 类 A 中. 由假设知存在 $B \in X/E$, 使 $f(X) = A \cap f(X) = f(B)$. 与情形 1 的讨论类似, 可以构造 $g \in OP_E(X)$, 使 $f = fgf$. 如果 $f(n)$, $f(n+1)$ 包含在不同 E- 类中, 那么 $f(A_1) \subseteq A_2$, $f(A_2) \subseteq A_1$, 即 $A_2 \cap f(X) = f(A_1)$, $A_1 \cap f(X) = f(A_2)$. 设 $f(A_1) = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\} \subseteq A_2$, $f(A_2) = \{c_1, c_2, \ldots, c_t\} \subseteq A_1$, 其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_s$, $c_1 < c_2 < \cdots < c_t$. 令 $b_i = \max(f^{-1}(a_i) \cap A_1)(1 \le i \le s)$, $d_i = \max(f^{-1}(c_i) \cap A_2)$ $(1 \le i \le t)$. 对于每个 $x \in A_2$, 定义

$$g(x) = \begin{cases} b_1, & x \in [n+1, a_1) \ (\text{若}\, n+1 < a_1), \\ b_i, & x \in [a_i, a_{i+1}) \ (1 \le i < s), \\ b_s, & x \in [a_s, 2n]. \end{cases}$$

对于每个 $x \in A_1$, 定义

$$g(x)=\begin{cases} d_1, & x\in[1,\,c_1\,)\ (\text{若}\,1<a_1),\\ d_i, & x\in[\,c_i,\,c_{i+1}\,)\ (1\le i<t),\\ d_t, & x\in[\,c_t,\,n\,].\end{cases}$$

这样在 X 上定义了 g. 由于 $b_1<b_2<\cdots<b_s<d_1<d_2<\cdots<d_t$, 于是

$$g(n+1)\le\cdots\le g(2n)\le g(1)\le g(2)\le\cdots\le g(n),$$

即 $g\in OP_E(X)$. 类似可以验证 $f=fgf$.

(b). $j=2n$, $j+1=1$ (在模 $2n$ 的意义上). 这时 f 为保序映射. 据文献 [8] 知存在保序映射 g, 使 $f=fgf$.

可见无论何种情形，总有 $g\in OP_E(X)$ 并且 $f=fgf$. 因此 f 是 $OP_E(X)$ 的正则元. □

定理 2.3 $OP_E(X)$ 不是正则半群.

证明 在 A_1 中任取两点 a,b 且 $a<b$. 定义

$$f(x)=\begin{cases} a, & x\in A_2,\\ b, & x\in A_1.\end{cases}$$

显然 $f\in OP_E(X)$ 且 $A_1\cap f(X)=\{a,b\}$. 但是不存在 E- 类 B, 使 $A_1\cap f(X)=f(B)$. 因此 f 不是 $OP_E(X)$ 的正则元. 故 $OP_E(X)$ 不是正则半群. □

注 当 $X=A_1$ 且 $E=A_1\times A_1$ 时，本文所讨论的半群就是文献 [4] 中讨论的半群 OP_n. 但是半群 $OP_E(X)$ 与半群 OP_n 却有很大的区别，例如由定理 2.3 可知， $OP_E(X)$ 不是正则半群. 由文献 [4, Theorem 3.1] 知 OP_n 却是正则半群.

3 $OP_E(X)$ 的 Green 关系

首先讨论 $\mathcal{L}$ 关系.

定义 3.1[7] 设 E 是集合 X 上的等价关系，且 $Y,\,Z\subseteq X$. 设 $\varphi:Y\to Z$ 为映射. 若 $(y,\,y')\in E$ 蕴涵 $(\varphi(y),\,\varphi(y'))\in E$, 则称 φ 是 E- 保持的. 若 $(x,\,y)\in E$ 当且仅当 $(\varphi(x),\,\varphi(y))\in E$, 称 φ 是 E^*- 保持的.

容易看出, 任意 $f\in OP_E(X)$ 是 E- 保持的, 但不必是 E^*– 保持的. 例如, 设 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$, $E=(\{1,2,3\}\times\{1,2,3\})\cup(\{4,5,6\}\times\{4,5,6\})$. 设

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&3&1&1&2\end{pmatrix},$$

则 $f\in OP_E(X)$, 但 f 不是 E^*– 保持的.

定义 3.2 设 M,N 是 X 的凸子集， $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_s\}\subseteq X$, 其中 $a_1<a_2<\cdots<a_s$. 设 $\varphi:M\to N$ 是映射，若存在 $p\in\{0,1,\ldots,s-1\}$, 使

$$\varphi(a_{p+1})\le\varphi(a_{p+2})\le\cdots\le\varphi(a_s)\le\varphi(a_1)\le\cdots\le\varphi(a_p),$$

则称 φ 是保向的. 若 φ 是保向双射，则 φ 称是保向同构.

不难验证，若 $\varphi:M\to N$ 是保向同构，则 $\varphi^{-1}:N\to M$ 也是保向同构.

忆及文献 [7] 对每个 $f\in\mathcal{T}_X$, 用 f_* 表示由 f 诱导的从 $\pi(f)$ 到 X 的映射，即对于每个 $P\in\pi(f)$, $f_*(P)=f(P)$.

定理 3.3 设 $f,g\in OP_E(X)$, 则下面说法等价.

(1) $(f,g)\in\mathcal{L}$.

(2) $\pi(f)=\pi(g)$; $|f|_E=|g|_E$, 其中 $|f|_E$ 定义为与 $f(X)$ 交非空的 E- 类的个数.

(3) 存在 E^*- 保持的保向同构 $\varphi: f(X)\to g(X)$, 满足 $g=\varphi f$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2). 设 $(f,g)\in\mathcal{L}$ ，则存在 $h,k\in OP_E(X)$, 使 $g=hf$, $f=kg$. 由 $g=hf$ 知 $\pi(f)$ 加细 $\pi(g)$, 由 $f=kg$ 知 $\pi(g)$ 加细 $\pi(f)$. 于是 $\pi(f)=\pi(g)$. 若 $|f|_E=1$, 则 $f(X)\subseteq A\in X/E$, 于是 $g(X)=hf(X)\subseteq B\in X/E$. 从而 $|g|_E=1$. 若 $|f|_E=2$, 则 $|g|_E=2$. 若不然，由 $|g|_E=1$ 可以得到 $|f|_E=1$. 这与 $|f|_E=2$ 矛盾.

(2)$\Longrightarrow$(3). 对于任意 $x\in f(X)$, 定义 $\varphi(x)=g_*(f^{-1}(x))$. 容易验证 $\varphi: f(X)\to g(X)$ 是映射且 $g=\varphi f$. 取 $x,y\in f(X)$ 且 $x\neq y$, 则 $f^{-1}(x)\neq f^{-1}(y)$. 于是 $\varphi(x)=g_*(f^{-1}(x))\neq g_*(f^{-1}(y))=\varphi(y)$. 这表明 φ 是单射. 对于任意 $y\in g(X)$, 令 $x=f_*(g^{-1}(y))$, 则 $x\in f(X)$ 且

$$\varphi(x)=g_*(f^{-1}(x))=g_*(f^{-1}(f_*(g^{-1}(y))))=g_*(g^{-1}(y))=y,$$

这表明 φ 是满射. 下面证明 φ 是 E^*- 保持的. 设 $(x,y)\in E$, 其中 $x,y\in f(X)$. 若 $|f|_E=|g|_E=1$, 则 $(\varphi(x),\varphi(y))=(g_*(f^{-1}(x)),g_*(f^{-1}(y)))\in E$. 若 $|f|_E=|g|_E=2$, 则 $(x,y)\in E$ 当且仅当 $f^{-1}(x),f^{-1}(y)$ 包含在同一个 E- 类中. 因此 $(\varphi(x),\varphi(y))=(g_*(f^{-1}(x)),g_*(f^{-1}(y)))\in E$. 故 φ 是 E^*- 保持的.

接下来证明 φ 是保向同构. 由上证明知 $\varphi: f(X)\to g(X)$ 是双射. 设 $f(X)=\{a_1,a_2,\dots,a_q\}$ 且 $g(X)=\{b_1,b_2,\dots,b_q\}$, 其中 $a_1<a_2<\cdots<a_q$, $b_t=g_*(f^{-1}(a_t))(1\leq t\leq q)$. 设 $b_p=\max g(X)$, 这里 $1\leq p\leq q$. 由于 $g\in OP_E(X)$, 于是存在 j, 使 $g(j)=b_p$ 且

$$g(j+1)\leq g(j+2)\leq\cdots\leq g(2n)\leq g(1)\leq\cdots\leq g(j).$$

注意到 $\pi(g)=\pi(f)$, 于是

$$g_*(f^{-1}(a_{p+1}))<g_*(f^{-1}(a_{p+2}))<\cdots<g_*(f^{-1}(a_q))<g_*(f^{-1}(a_1))<\cdots<g_*(f^{-1}(a_p)),$$

即

$$\varphi(a_{p+1})<\varphi(a_{p+2})<\cdots<\varphi(a_q)<\varphi(a_1)<\cdots<\varphi(a_p).$$

这表明 φ 是保向的. 因此 φ 是保向同构.

(3)$\Longrightarrow$(1). 假设条件 (3) 成立，需要构造 $h,k\in OP_E(X)$, 使 $g=hf$, $f=kg$. 设

$$f(j+1)\leq f(j+2)\leq\cdots\leq f(2n)\leq f(1)\leq\cdots\leq f(j),$$

其中 $j\in\{0,1,\dots,2n-1\}$. 设

$$f(X)=\{a_1,a_2,\dots,a_s\},\ g(X)=\{b_1,b_2,\dots,b_s\},$$

这里 $\varphi(a_t)=b_t(1\leq t\leq s)$, 且 $a_1<a_2<\cdots<a_s$. 下面我们分两种情形考虑.

情形 1. $(j,j+1)\in E$. 由于 E 是凸的且 $(f(j),f(j+1))\in E$, 于是 $f(X)\subseteq A_1$ 或者 $f(X)\subseteq A_2$. 不妨设 $f(X)\subseteq A_1$. 由于 φ 是 E^*- 保持的，于是存在 $B\in X/E$, 使 $\varphi(f(X))=g(X)\subseteq B$. 设 a_0, a_* 分别是 A_1 中的最小元与最大元. 如下定义 $h:A_1\to B$

$$h(x)=\begin{cases} b_1, & x\in[\,a_0,\,a_1\,)\ (\text{若}\,a_0<a_1),\\ b_{t-1}, & x\in[\,a_{t-1},\,a_t\,)\ (2\le t\le s),\\ b_s, & x\in[\,a_s,\,a_*\,].\end{cases} \tag{**}$$

对于每个 $x\in A_2$, 定义 $h(x)=b_s$. 这样我们在 X 上定义了 h. (若 $f(X)\subseteq A_2$, 在 A_2 上如 $(**)$ 定义 h, 对于每个 $x\in A_1$, 定义 $h(x)=b_1$)

情形 2. $(j,j+1)\notin E$. 不妨设 $j=n$ (当 $j=2n$时，f 为保序映射，则 h 的定义见文献[8]), 这时显然有 $f(A_2)\le f(A_1)$. 若 $f(X)\subseteq B\in X/E$, 则如上定义 h. 若 $A_1\cap f(X)\neq\emptyset$ 且 $A_2\cap f(X)\neq\emptyset$. 设 a_p, $a_{p+1}\in f(X)$ 满足 $\varphi(a_p)=\max g(X)$ 且 $\varphi(a_{p+1})=\min g(X)$. 由于 $\varphi: f(X)\to g(X)$ 是 E^*- 保持的, 于是 a_p, a_{p+1} 在不同的 E- 类中. 此时有 $f(A_1)\subseteq A_2$, $f(A_2)\subseteq A_1$. 设 $\{a_1,a_2,\dots,a_r\}\subseteq A_1$, $\{a_{r+1},a_{r+2},\dots,a_s\}\subseteq A_2$, 其中 $a_1<a_2<\cdots<a_r<a_{r+1}<\cdots<a_s$. 在 A_1 上如下定义 h.

$$h(x)=\begin{cases} b_1, & x\in[\,1,\,a_1\,)\ (\text{若}\,a_1>1),\\ b_i, & x\in[\,a_i,\,a_{i+1}\,)\ (1\le i<r),\\ b_r, & x\in[\,a_r,\,n\,].\end{cases}$$

在 A_2 上如下定义 h.

$$h(x)=\begin{cases} b_{r+1}, & x\in[\,n+1,\,a_{r+1}\,)\ (\text{若}\,a_{r+1}>n+1),\\ b_i, & x\in[\,a_i,\,a_{i+1}\,)\ (r+1\le i<s),\\ b_s, & x\in[\,a_s,\,2n\,].\end{cases}$$

类似与定理 2.2 中 g 的保向性的验证，我们可以验证 $h\in OP_E(X)$ 且 $g=hf$. 同理，存在 $k\in OP_E(X)$, 使 $f=kg$. 故 $(f,g)\in\mathcal{L}$. □

在讨论 $\mathcal{R}$ 关系之前先介绍一个概念.

定义 3.4[7]　设 $f,g\in T_E(X)$ 且 $\psi:\pi(f)\to\pi(g)$ 为映射. 若对于每个 E- 类 A, 存在 $B\in X/E$, 使 $\psi(\pi_A(f))\subseteq\pi_B(g)$, 则称 ψ 是 E- 容许的. 若 $\psi:\pi(f)\to\pi(g)$ 为双射，且 ψ 与 ψ^{-1} 都是 E- 容许的，则称 ψ 是 E^*- 容许的.

由定义 3.4 知，设 $\psi:\pi(f)\to\pi(g)$ 为 E- 容许映射，则对于任意 $A\in X/E$, 存在 $B\in X/E$, 使得对于任意 $P\in\pi_A(f)$, 有 $\psi(P)\cap B\neq\emptyset$.

定义 3.5　设 $f,g\in OP_E(X)$, ψ 是从 $\pi(f)$ 到 $\pi(g)$ 的映射，其中 $\pi(f)=\{P_1,P_2,\dots,P_s\}$. 若 $f_*(P_1)<f_*(P_2)<\cdots<f_*(P_s)$ 蕴含 $g_*(\psi(P_1))<g_*(\psi(P_2))<\cdots<g_*(\psi(P_s))$, 则称 ψ 是方向保持的. 若 ψ 是双射并且 ψ, ψ^{-1} 是方向保持的，则称 ψ 是方向保持的同构或保向同构.

引理 3.6　设 ψ 是从 $\pi(f)$ 到 $\pi(g)$ 的 E^*- 容许映射. 如果 $f(A_1)\neq f(X)$ 且 $f(A_2)\neq f(X)$, 那么 $\psi(\pi_{A_1}(f))=\pi_B(g)$, $\psi(\pi_{A_2}(f))=\pi_C(g)$, 其中 B, C 是两个不同的 E- 类.

证明　显然 ψ 是从 $\pi(f)$ 到 $\pi(g)$ 的 E- 容许的, 于是存在 $B\in X/E$, 使 $\psi(\pi_{A_1}(f))\subseteq\pi_B(g)$. 由于 ψ 是 E^*- 容许映射, 于是 ψ^{-1} 是 E- 容许的, 并且 $\psi\psi^{-1}$ 是单位映射. 因此存在 $C\in X/E$, 使 $\pi_{A_1}(f)\subseteq\psi^{-1}(\pi_B(g))\subseteq\pi_C(f)$. 由引理 1.1 知 $f(A_1)\subseteq f(C)$. 若 $C\neq A_1$, 则 $C=A_2$. 从而 $f(A_1)\subseteq f(C)=f(A_2)$, 这与题设 $f(A_2)=f(X)$ 矛盾. 故 $C=A_1$. 从而 $\psi(\pi_{A_1}(f))=\pi_B(g)$.

同理, $\psi(\pi_{A_2}(f))=\pi_C(g)$. 最后证明 $B\neq C$. 若 $B=C$, 由于 $\pi_{A_1}(f)\neq\pi_{A_2}(f)$, 于是 ψ 不是单射. 这与题设矛盾. 故 B, C 是两个不同的 E- 类. □

定理 3.7 设 $f,g\in OP_E(X)$, 则下列说法等价.

(1) $(f,g)\in\mathcal{R}$.

(2) 对于每个 E- 类 A, 存在 $B, C\in X/E$, 使 $f(A)\subseteq g(B)$, $g(A)\subseteq f(C)$.

(3) 存在 E^*- 容许的保向同构 $\psi:\pi(f)\to\pi(g)$, 使得 $f_*=g_*\psi$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2). 由于 $(f,g)\in\mathcal{R}$, 于是存在 $h,k\in OP_E(X)$, 使 $f=gh$, $g=fk$. 对于每个 E- 类 A, 存在 $B,C\in X/E$, 使 $h(A)\subseteq B$, $k(A)\subseteq C$, 从而 $f(A)=gh(A)\subseteq g(B)$, $g(A)=fk(A)\subseteq f(C)$.

(2)$\Longrightarrow$(3). 由 (2) 不难看出 $f(X)=g(X)$. 现定义 $\psi:\pi(f)\to\pi(g)$ 如下：对于每个 $P\in\pi(f)$, 令 $\psi(P)=g^{-1}(f_*(P))$. 容易验证 ψ 是映射且 $f_*=g_*\psi$. 设 $P, P'\in\pi(f)$ 且 $P\neq P'$, 则 $f_*(P)\neq f_*(P')$. 于是 $\psi(P)=g^{-1}(f_*(P))\neq g^{-1}(f_*(P'))=\psi(P')$, 表明 ψ 为单射. 设 $Q\in\pi(g)$, 则 $f^{-1}(g_*(Q))\in\pi(f)$, 并且

$$\psi(f^{-1}(g_*(Q)))=g^{-1}(f_*(f^{-1}(g_*(Q))))=g^{-1}(g_*(Q))=Q.$$

这表明 ψ 为满射. 下面证明 ψ 是 E^*- 容许的. 对于每个 E- 类 A, 由题设知存在 $B\in X/E$, 使 $f(A)\subseteq g(B)$. 记 $\pi_A(f)=\{P_1,P_2,\dots,P_r\}$, $x_t=f_*(P_t)(1\le t\le r)$, 故 $x_t\in f(A)\subseteq g(B)$. 于是存在 $y_t\in B$, 使 $x_t=g(y_t)$. 从而 $y_t\in B\cap g^{-1}(x_t)$. 进而对每个 $1\le t\le r$,

$$B\cap\psi(P_t)=B\cap g^{-1}(f_*(P_t))=B\cap g^{-1}(x_t)\neq\emptyset.$$

从而 ψ 是 E- 容许的. 同理 ψ^{-1} 也是 E- 容许的. 这表明 $\psi:\pi(f)\to\pi(g)$ 为 E^*- 容许映射.

其次证明 $\psi:\pi(f)\to\pi(g)$ 为保向同构. 由上可知 $\psi:\pi(f)\to\pi(g)$ 为双射. 设 $\pi(f)=\{P_1,P_2,\dots,P_s\}$ 其中 $f_*(P_1)<f_*(P_2)<\cdots<f_*(P_s)$. 由 ψ 的定义知, $\psi(P_t)=g^{-1}(f_*(P_t))(1\le t\le s)$. 于是 $g_*(\psi(P_1))<g_*(\psi(P_2))<\cdots<g_*(\psi(P_s))$. 因此 ψ 是方向保持的. 同理, ψ^{-1} 也是方向保持的. 故 $\psi:\pi(f)\to\pi(g)$ 是保向同构.

(3)$\Longrightarrow$(1). 需建立从 X 到自身的映射 $h,k\in OP_E(X)$, 使 $f=gh$, $g=fk$. 下面分两种情形考虑.

情形 1. 若存在 $A\in X/E$, 使 $f(A)=f(X)$, 则 $\pi_A(f)=\pi(f)$. 由于 ψ 是 E^*- 容许的, 于是存在 $B\in X/E$, 使 $\psi(\pi_A(f))\subseteq\pi_B(g)$. 设 $\pi(f)=\{P_1,P_2,\dots,P_r\}$, 其中 $f_*(P_1)<f_*(P_2)<\cdots<f_*(P_r)$. 注意到 $\psi(P_t)\cap B\neq\emptyset(1\le t\le r)$, 对于任意 $1\le t\le r$, 在 $\psi(P_t)\cap B$ 中任取一点 y_t, 定义 $h(P_t)=y_t$. 这样便在 X 上定义了 h. 显然 $h\in T_E(X)$. 下面验证 h 是保向映射. 由于 $f\in OP_E(X)$, 则存在 $l(0\le l\le r-1)$, 使

$$P_{l+1}\cap A<P_{l+2}\cap A<\cdots<P_r\cap A<P_1\cap A<\cdots<P_l\cap A.$$

令 $j=\max P_r$, 那么

$$f(j+1)\le f(j+2)\le\cdots\le f(2n)\le f(1)\le\cdots\le f(j).$$

由 ψ 是保向同构知 $g_*(\psi(P_1))<g_*(\psi(P_2))<\cdots<g_*(\psi(P_r))$, 从而存在 $q(0\le q\le r-1)$, 使

$$\psi(P_{q+1})\cap B<\psi(P_{q+2})\cap B<\cdots<\psi(P_r)\cap B<\psi(P_1)\cap B<\cdots<\psi(P_q)\cap B.$$

因此

$$y_{q+1} < y_{q+2} < \cdots < y_r < y_1 < \cdots < y_q.$$

记 $j' = \max P_q$, 则 $j'+1 = \min P_{q+1}$(若 $j' = 2n$, 则 $j'+1$ 是 1). 因此,

$$h(j'+1) \le h(j'+2) \le \cdots \le h(2n) \le h(1) \le h(2) \le \cdots \le h(j').$$

故 $h \in OP_E(X)$.

情形 2. 若 $f(A_1) \neq f(X)$ 且 $f(A_2) \neq f(X)$. 由引理 3.6 知 $\psi(\pi_{A_1}(f)) = \pi_B(g)$, $\psi(\pi_{A_2}(f)) = \pi_C(g)$, $\{B, C\} = \{A_1, A_2\}$. 设 $\pi_{A_1}(f) = \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$, 其中 $P_1 \cap A_1 < P_2 \cap A_1 < \cdots < P_r \cap A_1$. 令 y_1 是 $\psi(P_1) \cap A_1$ 中的最大元, y_r 是 $\psi(P_r) \cap A_1$ 中的最小元. 对于 $2 \le i \le r-1$, 在 $\psi(P_i) \cap A_1$ 中任取一点 y_i, 定义 $h: A_1 \to B$, 使 $h(P_i \cap A_1) = y_i$, 其中 $1 \le i \le r$. 类似的，设 $\pi_{A_2}(f) = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_s\}$, 其中 $Q_1 \cap A_2 < Q_2 \cap A_2 < \cdots < Q_s \cap A_2$. 令 z_1 是 $\psi(Q_1) \cap A_2$ 中的最大元, z_s 是 $\psi(Q_s) \cap A_2$ 中的最小元. 对于 $2 \le i \le s-1$, 在 $\psi(Q_i) \cap A_2$ 中任取一点 z_i, 定义 $h: A_2 \to C$, 使 $h(Q_i \cap A_2) = z_i$, 其中 $1 \le i \le s$. 这样在 X 上定义了 h. 显然 $h \in T_E(X)$. 下面验证 $h \in OP_E(X)$. 设

$$f(j+1) \le f(j+2) \le \cdots \le f(2n) \le f(1) \le \cdots \le f(j),$$

其中 $j \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$, 这时我们断言 $(j, j+1) \notin E$. 事实上，若 $(j, j+1) \in E$. 注意到 $f(j) = \max f(X)$, $f(j+1) = \min f(X)$, 于是 $f(X) \subseteq f(A)$, 即 $f(A) = f(X)$. 这与情形 2 的假设矛盾. 因此 $(j, j+1) \notin E$. 设 $j = n$ $(j+1 = n+1)$. 若 $B = A_1, C = A_2$. 则 z_s 是 $h(X)$ 中的最大元, y_1 是 $h(X)$ 中的最小元. 这时有

$$h(1) \le h(2) \le \cdots \le h(n) \le h(n+1) \le \cdots \le h(2n),$$

从而 $h \in OP_E(X)$. 若 $B = A_2, C = A_1$, 则 y_r 是 $h(X)$ 中的最大元, z_1 是 $h(X)$ 中的最小元. 于是

$$h(n+1) \le h(n+2) \le \cdots \le h(2n) \le h(1) \le \cdots \le h(n).$$

同样有 $h \in OP_E(X)$. 类似的，若 $j = 2n (j+1 = 1)$, 也有 $h \in OP_E(X)$.

最后验证 $f = gh$. 对于 X 中的任意一点 $x \in A$, 设 $x \in P \in \pi_A(f)$. 于是 $h(x) = y \in \psi(P) \cap A \subseteq \psi(P)$. 因此 $gh(x) = g_*(\psi(P)) = f_*(P) = f(x)$. 从而 $f = gh$. 同理存在 $k \in OP_E(X)$, 使 $g = fk$. 故 $(f, g) \in \mathcal{R}$. □

作为定理 3.3 和定理 3.7 的推论，立即可得

定理 3.8 设 $f, g \in OP_E(X)$, 则下面说法等价.

(1) $(f, g) \in \mathcal{H}$.

(2) $\pi(f) = \pi(g)$, $|f|_E = |g|_E$, 并且对于每个 E- 类 A, 存在 $B, C \in X/E$, 使 $f(A) \subseteq g(B)$, $g(A) \subseteq f(C)$.

(3) 存在 E^*- 保持的保向同构 $\varphi: f(X) \to g(X)$, 且存在 E^*- 容许的保向同构 $\psi: \pi(f) \to \pi(g)$, 满足 $g = \varphi f$, $f_* = g_* \psi$.

由于 $OP_E(X)$ 是有限半群，故 $\mathcal{J} = \mathcal{D}$. 下面考虑最后一个 Green 关系 $\mathcal{D}$.

定理 3.9 设 $f, g \in OP_E(X)$, 则下面说法等价.

(1) $(f,g)\in\mathcal{D}$.

(2) 存在 E^*- 容许的保向同构 $\psi:\pi(f)\to\pi(g)$ 和 E^*- 保持的保向同构 $\varphi:f(X)\to g(X)$, 使得 $\varphi f_*=g_*\psi$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2). 设 $(f,g)\in\mathcal{D}$, 则存在 $h\in OP_E(X)$, 使 $(f,h)\in\mathcal{L}$, $(h,g)\in\mathcal{R}$. 由定理 3.3 知 $\pi(f)=\pi(h)$ 且存在 E^*- 保持的保向同构 $\varphi:f(X)\to h(X)$, 满足 $h=\varphi f$. 由定理 3.7 知 $h(X)=g(X)$ 且存在 E^*- 容许的保向同构 $\psi:\pi(h)\to\pi(g)$, 满足 $h_*=g_*\psi$. 用 $g(X)$ 替换 $h(X)$, 用 $\pi(f)$ 替换 $\pi(h)$, 则 $\varphi:f(X)\to g(X)$ 和 $\psi:\pi(f)\to\pi(g)$ 即为所求的映射. 由 $\pi(f)=\pi(h)$ 和 $h=\varphi f$ 知 $h_*=\varphi f_*$. 因此 $\varphi f_*=h_*=g_*\psi$.

(2)$\Longrightarrow$(1). 对每个 $x\in X$, 令 $h(x)=\varphi(f(x))$. 则 $h=\varphi f$. 由于 $f\in OP_E(X)$ 且 φ 是 E^*- 保持的保向同构, 所以 $h\in OP_E(X)$. 于是 $\pi(f)=\pi(h), h_*=\varphi f_*=g_*\psi$. 由定理 3.7 知 $(h,g)\in\mathcal{R}$, 从而 $h(X)=g(X)$. 因此 $\varphi:f(X)\to h(X)$ 为 E^*- 保持的保向同构. 由定理 3.3 知 $(f,h)\in\mathcal{L}$, 故 $(f,g)\in\mathcal{D}$. □

参考文献:

[1] HOWIE JM, *Fundamentals of semigroup theory* [M]. Oxford University Press, 1995.

[2] MAGILL K D JR, SUBBIAH S. *Green's relations for regular elements of semigroups of endomorphisms* [J]. Canad. J. Math., 1974, **26**: 1484–1497.

[3] GOMES G M S, HOWIE J M. *On the ranks of certain semigroups of order-preserving transformations* [J]. Semigroup Forum, 1992, **45**(3): 272–282.

[4] CATARINO P M, HIGGINS P M. *The monoid of orientation-preserving mappings on a chain* [J]. Semigroup Forum, 1999, **58**(2): 190–206.

[5] CATARINO P M. *Monoids of orientation-preserving transformations of a finite chain and their presentations* [C]. Semigroups and applications (St. Andrews, 1997), 39–46, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998.

[6] PEI Hui-sheng. *Equivalences, α-semigroups and α-congruences* [J]. Semigroup Forum, 1994, **49**(1): 49–58.

[7] PEI Hui-sheng. *Regularity and Green's relations for semigroups of transformations that preserve an equivalence* [J]. Comm. Algebra, 2005, **33**(1): 109–118.

[8] PEI Hui-sheng, ZOU Ding-yu. *Green's equivalences on semigroups of transformations preserving order and an equivalence relation* [J]. Semigroup Forum, 2005, **71**(2): 241–251.

Regularity and Green's Relations on a Special Transformation Semigroup

SUN Lei[1], *PEI Hui-sheng*[2,3], *CHENG Zheng-xing*[1]

(1. School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Shaanxi 710049, China;
2. College of Mathematics and Information Science, Xinyang Normal University, Henan 464000, China;
3. Institute of Mathematics, Henan Computer Center, Henan 450008, China)

Abstract: Let $\mathcal{T}_X$ be the full transformation semigroup on a set X, and E an equivalence on X. Let

$$T_E(X)=\{f\in\mathcal{T}_X:\forall\,(x,y)\in E,(f(x),f(y))\in E\}.$$

Then $T_E(X)$ forms a subsemigroup of $\mathcal{T}_X$. If X is a totally ordered set and E is a convex equivalence on X, then let $OP_E(X)$ be a semigroup consisting of all the orientation-preserving maps in $T_E(X)$. In this paper, for the special convex equivalence E on a finite totally ordered set X, we describe the regular elements and characterize Green's relations on the semigroup $OP_E(X)$.

Key words: transformation semigroup; equivalence; regular element; Green's relations; orientation-preserving map.