第27卷第4期 数学研究与评论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0709-06 **文献标识码**: A

一类非光滑广义分式规划的 Kuhn-Tucker 型最优性必要条件

吴惠仙 [1], 罗和治 [2]

(1. 杭州电子科技大学数学系, 浙江 杭州 310018; 2. 浙江工业大学应用数学系, 浙江 杭州 310032)
(E-mail: luohezhi@tom.com)

摘 要: 考虑一类非线性不等式约束的非光滑 minimax 分式规划问题: 目标函数中的分子是可微函数与凸函数之和形式而分母是可微函数与凸函数之差形式, 且约束函数是可微的. 在 Arrow-Hurwicz-Uzawa 约束品性下, 给出了这类规划的最优解的 Kuhn-Tucker 型必要条件. 所得结果改进和推广了已有文献中的相应结果.

关键词: 非光滑 minimax 分式规划; Kuhn-Tucker 型必要条件; 约束品性.
MSC(2000): 90C30
中图分类: O221.6

1 引 言

本文考虑如下的非光滑 minimax 分式规划:

$$\text{(P)} \qquad \min F(x)=\max_{y\in Y}\ \frac{f(x,y)+\varphi(x)}{h(x,y)-\psi(x)}$$
$$\text{s.t.}\quad g(x)=(g_1(x),\ldots,g_m(x))\le 0,\ x\in X,$$

其中 Y 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧子集, X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空开子集, $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $\nabla_x f(x,y)$ 和 $\nabla_x h(x,y)$ 存在且关于 (x,y) 连续, $f(x,y)$ 和 $-h(x,y)$ 关于 y 在 Y 上是上半连续的, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是连续可微函数, $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 和 $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为凸函数, $f(x,y)-\varphi(x)\ge 0$ 且 $h(x,y)-\psi(x)>0, \forall(x,y)\in\mathbb{R}^n\times Y$.

近三十多年来, 许多学者研究了一类目标函数中带有不可微项如 $(x^{\mathrm T}Bx)^{1/2}$ 的非线性规划问题 [1−6]. 如: 当 $\varphi(x)=(x^{\mathrm T}Bx)^{1/2}$, $\psi(x)=(x^{\mathrm T}Dx)^{1/2}(B,D\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称半正定阵), $X=\mathbb{R}^n$ 时 (P) 为文献 [1,2] 所研究的问题; 当 $\varphi(x)=(x^{\mathrm T}Bx)^{1/2}$, $\psi(x)=0$, $X=\mathbb{R}^n$ 时 (P) 为文献 [4] 所研究的问题. 若去掉不可微项 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$, 则 (P) 变为相应的可微广义分式规划问题 [7,8]. 因此, 研究此类问题则更具一般性.

在讨论这类目标函数中带有不可微项 $(x^{\mathrm T}Bx)^{1/2}$ 的规划问题的最优性必要条件时, 一般都给出一个类似集合, 并以 "此集合为空集" 作为一个前提条件. 如: 文献 [2]–[6] 对所研究的问题均给出一个集合 $Q_{\bar y_0}(x_0)$, 并以 " $Q_{\bar y_0}(x_0)$ 为空集" 作为一个前提条件 (其中 x_0 为问题的最优解), 导出问题的 Kuhn-Tucker 型最优性必要条件. 基于这些必要条件, 文献 [1]–[6] 皆讨论了最优性充分条件和对偶. 文献 [9] 指出文献 [2,4] 中 " $Q_{\bar y_0}(x_0)$ 为空集" 这个条件太强, 并证明了这个条件本身就可推出问题的 Kuhn-Tucker 型最优性必要条件, 而不必要求 " x_0 为问题的最优解" 的条件. 因此, 对这类问题寻找一个比较简单而实用的约束品性就显得极为重要了.

收稿日期: 2005-01-26; **接受日期**: 2006-07-03
基金项目: 国家自然科学基金 (60473097; 60673177).

众所周知，对不等式约束的可微非线性规划，在文献 [10] 中给出的 Kuhn-Tucker 约束品性和 Arrow-Hurwicz-Uzawa 约束品性是最具有代表性的两个约束品性．对于这类目标函数含有不可微项的规划问题，在这两个约束品性下的 Kuhn-Tucker 型必要条件在某些相关的文献中不多见且研究也不甚详尽．这可能是目标函数非光滑性使得许多学者没有将有关问题和可微的问题联系起来．文献 [11] 对当 $\varphi(x)=\|Ax\|_{p_1}$, $\psi(x)=\|Cx\|_{p_2}$ $(A,C\in\mathbb{R}^{m\times n},\, p_1,p_2\geq 1)$ 时的问题 (P), 仅在 Kuhn-Tucker 约束品性下建立了其 Kuhn-Tucker 型最优性必要条件．本文的目的就是在 Arrow-Hurwicz-Uzawa 约束品性下给出问题 (P) 的最优解的 Kuhn-Tucker 型必要条件．同时指出, 文献 [7,8] 的相关结果的证明都是利用文献 [12] 关于 $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\max_{y\in Y} f(x,y)$ s.t. $g(x)\leq 0$ 的结果, 而这里的证明只是利用非光滑分析及广义分式规划中的基本工具, 并且本文的可微性假设也较文献 [2,4] 弱.

2 预备知识

设 $x\in X$, 记

$$S=\{x\in\mathbb{R}^n: g(x)\leq 0\},\quad I(x)=\{i: g_i(x)=0, i=1,\ldots,m\},$$
$$Z(x)=\{d\in\mathbb{R}^n:\nabla g_i(x)^{\mathrm{T}}d\leq 0,\ \ i\in I(x)\},$$
$$Y(x)=\{y\in Y:\frac{f(x,y)+\varphi(x)}{h(x,y)-\psi(x)}=\max_{z\in Y}\frac{f(x,z)+\varphi(x)}{h(x,z)-\psi(x)}\}.$$

定义 1[10] 称 g 在 $x^*\in S\cap X$ 处满足 Arrow-Hurwicz-Uzawa 约束品性，若下面系统

$$\nabla g_i(x^*)^{\mathrm{T}}d<0,\ \ i\in W,\ \ \nabla g_i(x^*)^{\mathrm{T}}d\leq 0,\ \ i\in V$$

关于 $d\in\mathbb{R}^n$ 有解，其中 $V=\{i: g_i(x^*)=0,\, g_i$ 是凹的 $\}$, $W=\{i: g_i(x^*)=0,\, g_i$ 是非凹的 $\}$.

定义 2[13] 局部 Lipschitz 函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在 $x\in\mathbb{R}^n$ 处沿方向 $d\in\mathbb{R}^n$ 的 Clarke 的广义方向导数和广义梯度分别定义为

$$f^{\circ}(x,d)=\limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}}\frac{f(y+td)-f(y)}{t},$$
$$\partial f(x)=\{\xi\in\mathbb{R}^n: f^{\circ}(x,d)\geq\xi^{\mathrm{T}}d,\ \ \forall d\in\mathbb{R}^n\}.$$

文献 [13] 证明了若 f 为连续可微的，则 $\partial f(x)=\{\nabla f(x)\}$; 若 f 为凸的，则 f 在 x 处的 Clarke 广义梯度与凸分析意义下的次梯度是一致的.

引理 1[13] 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为局部 Lipschitz 函数，则 (i). $\partial f(x)$ 为非空紧凸集； (ii). 对 $\forall d\in\mathbb{R}^n$, $f^{\circ}(x,d)=\max\{\xi^{\mathrm{T}}d:\xi\in\partial f(x)\}$.

引理 2[11] 设 $A\subseteq\mathbb{R}^n$ 为非空紧凸集，$C\subseteq\mathbb{R}^n$ 为凸集. 若 $\forall d\in C$, $\exists\xi_d\in A$, 使得 $\xi_d^{\mathrm{T}}d\geq 0$, 则存在 $\exists\xi\in A$ 使得 $\xi^{\mathrm{T}}d\geq 0$, $\forall d\in C$.

引理 3[14] 设 $Y\subseteq\mathbb{R}^m$ 为非空紧集， $f(x,y):\mathbb{R}^n\times Y\to\mathbb{R}$, $\nabla_x f(x,y)$ 存在且关于 (x,y) 连续．若记 $g(x)=\max_{y\in Y}f(x,y)$, 则 $\partial g(x)=Co\{\nabla_x f(x,y): y\in M(x)\}$, 其中 $M(x)=\{y\in Y: f(x,y)=g(x)\}$, Co 表示集的凸包.

对于给定的 $k\in\mathbb{R}$, 对 (P) 引入如下的辅助参数规划：

$$(\mathrm{P}_k)\qquad \min_{x\in X\cap S}\Phi(x,k)=\max_{y\in Y}\{f(x,y)+\varphi(x)-k[h(x,y)-\psi(x)]\}.$$

引理 4[15] (i). 若 x^* 是 (P) 的最优解且 $k^* = F(x^*)$, 则 x^* 是 (P_{k^*}) 的最优解且 $\Phi(x^*, k^*) = 0$; (ii). $\{i : y_i \in Y(x^*)\} = \{i : f(x^*, y_i) + \varphi(x^*) - k^*[h(x^*, y_i) - \psi(x^*)] = 0\}$.

3 主要结果

定理 1 设 x^* 是问题 (P) 的最优解，且 g 在 x^* 处满足 Arrow-Hurwicz-Uzawa 约束品性，则存在 $s^* \in N$, $1 \le s^* \le n+1$, $t^* \in \mathbb{R}^{s^*}$, $\lambda^* \in \mathbb{R}^m_+$, $k^* \in \mathbb{R}_+$, $y_i^* \in Y(x^*)$, $i = 1, \ldots, s^*$, 使得

$$0 \in \sum_{i=1}^{s^*} t_i^* \left[\nabla_x f(x^*, y_i^*) - k^* \nabla_x h(x^*, y_i^*)\right] + \partial\varphi(x^*) + \partial\psi(x^*) k^* + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla g_j(x^*), \tag{1}$$

$$f(x^*, y_i^*) + \varphi_i(x^*) - k^*[h(x^*, y_i^*) - \psi_i(x^*)] = 0, \quad i = 1, \ldots, s^*, \tag{2}$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$t_i^* \ge 0, \quad i = 1, \ldots, s^*, \quad \sum_{i=1}^{s^*} t_i^* = 1, \tag{4}$$

其中 ∂ 为凸分析意义下的次微分算子.

证明 任给定 $d \in Z(x^*)$, 则

$$\nabla g_i(x^*)^{\mathrm{T}} d \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad d \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

由 Arrow-Hurwicz-Uzawa 约束品性知存在 $\hat{d} \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\nabla g_i(x^*)^{\mathrm{T}} \hat{d} < 0,\ i \in W, \quad \nabla g_i(x^*)^{\mathrm{T}} \hat{d} \le 0,\ i \in V. \tag{6}$$

定义 $\alpha_s(t) = x^* + t(d + s\hat{d})$, 其中 s 和 t 为数. 显然， $\alpha_s(0) = x^*$, $\frac{\mathrm{d}\alpha_s(0)}{\mathrm{d}t} = d + s\hat{d}$. 现证明对任意的 $s > 0$, 存在 $\delta = \delta(s) > 0$, 使得

$$\alpha_s(t) \in S \cap X, \quad t \in [0, \delta]. \tag{7}$$

固定 $s > 0$, 由于 X 是开的，对充分小的 $t > 0$ 有 $\alpha_s(t) \in X$. 对 $i \in V$, 由于 $g_i(x^*) = 0$ 且 g_i 是凹的，结合 (5) 和 (6), 对 $\forall t > 0$, 有 $g_i(\alpha_s(t)) = g_i(\alpha_s(t)) - g_i(\alpha_s(0)) \le \nabla g_i(x^*)^{\mathrm{T}}(td + ts\hat{d}) \le 0$. 对 $i \in W$, 因为 $\frac{dg_i(\alpha_s(0))}{dt} = \nabla g_i(x^*)^{\mathrm{T}}(d + s\hat{d}) < 0$, 对充分小的 $t > 0$, 有

$$g_i(\alpha_s(t)) < 0. \tag{8}$$

再对 $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash (V \cup W)$, 显然不等式 (8) 对充分小的 $t > 0$ 仍成立，因为 $g_i(\alpha_s(0)) = g_i(x^*) < 0$ 和 $\alpha_s(t)$ 关于 t 是连续的. 因此， (7) 式成立.

因 x^* 是问题 (P) 的最优解，记其最优值为 k^*, 故由引理 4(i) 知 x^* 是 (P_{k^*}) 的最优解，且 $\Phi(x^*, k^*) = 0$. 从而由 (7) 和 $\alpha_s(0) = x^*$ 知 $t = 0$ 必为问题 $\min_{t\in[0,\delta]} \Phi(\alpha_s(t), k^*)$ 的解，且 $\Phi(\alpha_s(0), k^*) = 0$. 注意到由问题 (P) 中的条件知 $k^* \ge 0$. 由于 $\nabla_x f(x, y)$ 和 $\nabla_x h(x, y)$ 存在且关于 (x, y) 连续及 φ 和 ψ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数，不难验证 $\Phi(\alpha_s(t), k^*)$ 关于 t 在 $[0, \delta]$ 上是局部 Lipschitz 的. 若记 $\theta(t) = \Phi(\alpha_s(t), k^*)$, 则 $t = 0$ 是 $\min_{t\in[0,\delta]} \theta(t)$ 的解，而 1 是 $t = 0$ 处的可行方向，根据广义方向导数的定义知 $\theta^\circ(0; 1) \ge 0$; 再依引理 1 (ii) 得 $\max\{\eta \cdot 1 : \eta \in \partial\theta(0)\} \ge 0$. 由 $\partial\theta(0)$ 为非空紧凸集知存在 $\eta_{d,s} = \eta(d, s) \in \partial\theta(0)$ 且 $\eta_{d,s} \ge 0$. 再利用关于复合函数的广

义梯度法则 (参见文献 [13] 的定理 2.3.9), $\alpha_s(t)$ 的定义及 $\alpha_s(0)=x^*$, $\frac{d\alpha_s(0)}{dt}=d+s\hat{d}$ 知存在 $\xi_{d,s}=\xi(d,s)\in\partial_x\Phi(x^*,k^*)$, 使得 $\xi_{d,s}^{\mathrm{T}}(d+s\hat{d})=\eta_{d,s}\geq 0$. 因 $\partial_x\Phi(x^*,k^*)$ 是非空紧凸集且集 $s\hat{d}+Z(x^*)=\{d+s\hat{d}:d\in Z(x^*)\}$ 为凸集, 利用引理 2 (记 $\partial_x\Phi(x^*,k^*)=A$, $s\hat{d}+Z(x^*)=C$), 可知: 对每个 $s>0$, 存在 $\xi_s=\xi(s)\in\partial_x\Phi(x^*,k^*)$, 使得

$$\xi_s(d+s\hat{d})\geq 0,\quad \forall d\in Z(x^*). \tag{9}$$

因 $\partial_x\Phi(x^*,k^*)$ 是紧集, 故序列 $\{\xi_s\}$ 有一个收敛的子列 $\{\xi_{s_k}\}$ 且 $\xi_{s_k}\to\xi\in\partial_x\Phi(x^*,k^*)$. 并且由 (9) 式得 $\xi_{s_k}(d+s_k\hat{d})\geq 0$, $\forall d\in Z(x^*)$. 在此不等式中固定 d, 令 $s_k\to 0$, 得

$$\xi^{\mathrm{T}}d\geq 0,\quad \forall d\in Z(x^*). \tag{10}$$

不等式 (10) 等价于下系统

$$\begin{cases}\xi^{\mathrm{T}}d<0,\\ \nabla g_i(x^*)^{\mathrm{T}}d\leq 0,\quad i\in I(x^*)\end{cases} \tag{11}$$

关于 $d\in\mathbb{R}^n$ 无解. 于是, 利用文献 [10] 中的 Farkas 引理, 系统 (11) 关于 $d\in\mathbb{R}^n$ 无解等价于: 存在 $\lambda_i^*\geq 0$, $i\in I(x^*)$ 使得

$$\xi+\sum_{i\in I(x^*)}\lambda_i^*\nabla g_i(x^*)=0. \tag{12}$$

另外, 由于 $\Phi(x,k^*)=\max\limits_{y\in Y}\{f(x,y)-k^*h(x,y)\}+\varphi(x)+k^*\psi(x)$, 利用文献 [13] 中的命题 2.3.3, 引理 3 和 4(ii), 计算 $\Phi(x,k^*)$ 在 x^* 处的广义梯度, 便得: 存在 $t^*\in\mathbb{R}$, $\omega\in\partial\varphi(x^*)$, $\nu\in\partial\psi(x^*)$ 使得

$$\xi=\sum_{i\in J_0(x^*)}t_i^*[\nabla_x f(x^*,y_i^*)-k^*\nabla_x h(x^*,y_i^*)]+\omega+k^*\nu, \tag{13}$$

其中 $J_0(x^*)$ 是 $J(x^*)=\{i:y_i^*\in Y(x^*)\}$ 的某个有限子集, 且

$$t_i^*\geq 0,\qquad \sum_{i\in J_0(x^*)}t_i^*=1. \tag{14}$$

在 (13) 式中, 由文献 [16] 的 Caratheodory 定理, 存在 $s^*\in N$, $1\leq s^*\leq N$ 使得

$$\sum_{i\in J_0(x^*)}t_i^*[\nabla_x f(x^*,y_i^*)-k^*\nabla_x h(x^*,k^*)]=\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*[\nabla_x f(x^*,k^*)-k^*\nabla_x h(x^*,y_i^*)] \tag{15}$$

故由 (12)–(15) 便得 (1)–(4). □

4 特 例

下面是问题 (P) 的两个特例:

$$(\mathrm{P}_1)\qquad \min\max_{y\in Y}\frac{f(x,y)+(x^{\mathrm{T}}Bx)^{1/2}}{h(x,y)-(x^{\mathrm{T}}Dx)^{1/2}}\qquad \text{s.t.}\quad g(x)\leq 0,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

$$(\mathrm{P}_2)\qquad \min\max_{y\in Y}\frac{f(x,y)+\|Ax\|_{p_1}}{h(x,y)-\|Cx\|_{p_2}}\qquad \text{s.t.}\quad g(x)\leq 0,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

其中 Y, f, h, g 的要求同 (P), B 和 D 是 $n\times n$ 对称半正定阵，$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $C\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $p_1,p_2\geq 1$.

利用凸函数的次微分的定义，经简单计算，可得

$$\partial(x^{\mathrm{T}}Bx)^{1/2}=\{B\eta:\eta^{\mathrm{T}}B\eta\leq 1,\eta^{\mathrm{T}}Bx=(x^{\mathrm{T}}Bx)^{1/2}\};$$

另由文献 [17] 知若 $1\leq p\leq\infty$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 则 $\partial\|Ax\|_p=\{A^{\mathrm{T}}\zeta:\|\zeta\|_q\leq 1,\zeta^{\mathrm{T}}Ax=\|Ax\|_p\}$, 其中 $p,q>1$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, 若 $p=1$ 则 $q=\infty$; 若 $p=\infty$ 则 $q=1$. 于是，由定理 1 可得到 Arrow-Hurwicz-Uzawa 约束品性下的问题 (P_1) 和 (P_2) 的 Kuhn-Tucker 型最优性必要条件.

推论 1 设 x^* 是问题 (P_1) 的最优解，且 g 在 x^* 处满足 Arrow-Hurwicz-Uzawa 约束品性，则存在 $s^*\in N$, $1\leq s^*\leq n+1$, $t^*\in\mathbb{R}^{s^*}$, $\lambda^*\in\mathbb{R}^m_+$, $k^*\in\mathbb{R}_+$, $y_i^*\in Y(x^*)$, $i=1,\ldots,s^*$, $\omega\in\mathbb{R}^n$, $\nu\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*\left[\nabla_x f(x^*,y_i^*)-k^*\nabla_x h(x^*,y_i^*)\right]+B\omega+k^*D\nu+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*\nabla g_j(x^*)=0,\\
&f(x^*,y_i^*)+(x^{*T}Bx^*)^{1/2}-k^*[h(x^*,y_i^*)-(x^{*T}Dx^*)^{1/2}]=0,\quad i=1,\ldots,s^*,\\
&\lambda_i^*g_i(x^*)=0,\quad i=1,\ldots,m,\quad t_i^*\geq 0,\quad i=1,\ldots,s^*,\quad \sum_{i=1}^{s^*}t_i^*=1,\\
&\left\{\begin{array}{ll}\omega^{\mathrm{T}}Bx^*=(x^{*T}Bx^*)^{1/2}, & \nu^{\mathrm{T}}Dx^*=(x^{*T}Dx^*)^{1/2},\\ \omega^{\mathrm{T}}B\omega\leq 1, & \nu^{\mathrm{T}}D\nu\leq 1.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

推论 2 设 x^* 是问题 (P_2) 的最优解，且 g 在 x^* 处满足 Arrow-Hurwicz-Uzawa 约束品性，则存在 $s^*\in N$, $1\leq s^*\leq n+1$, $t^*\in\mathbb{R}^{s^*}$, $\lambda^*\in\mathbb{R}^m_+$, $k^*\in\mathbb{R}_+$, $y_i^*\in Y(x^*)$, $i=1,\ldots,s^*$, $\omega\in\mathbb{R}^m$, $\nu\in\mathbb{R}^m$ 使得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*\left[\nabla_x f(x^*,y_i^*)-k^*\nabla_x h(x^*,y_i^*)\right]+A^{\mathrm{T}}\omega+k^*C^{\mathrm{T}}\nu+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*\nabla g_j(x^*)=0,\\
&f(x^*,y_i^*)+\|Ax^*\|_{p_1}-k^*[h(x^*,y_i^*)-\|Cx^*\|_{p_2}]=0,\quad i=1,\ldots,s^*,\\
&\lambda_i^*g_i(x^*)=0,\quad i=1,\ldots,m,\quad t_i^*\geq 0,\quad i=1,\ldots,s^*,\quad \sum_{i=1}^{s^*}t_i^*=1,\\
&\left\{\begin{array}{ll}\omega^{\mathrm{T}}Ax^*=\|Ax^*\|_{p_1}, & \nu^{\mathrm{T}}Cx^*=\|Cx^*\|_{p_2},\\ \|\omega\|_{q_1}\leq 1, & \|\nu\|_{q_2}\leq 1,\end{array}\right.
\end{aligned}$$

其中 $p_i,q_i>1$, $p_i^{-1}+q_i^{-1}=1$, 若 $p_i=1$ 则 $q_i=\infty$; 若 $p_i=\infty$ 则 $q_i=1$, $i=1,2$.

注 推论 1 改进和推广了文献 [2] 中的定理 3.1 和定理 3.2 及文献 [4] 的定理 3.1. 文献 [2], [4] 在证明问题 (P_1) 的 Kuhn-Tucker 型必要条件时，除了约束品性复杂外，所用的假设条件是 $f(x,y)$ 和 $h(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 上均连续可微，而我们所用的条件是 $\nabla_x f(x,y)$ 和 $\nabla_x h(x,y)$ 存在且关于 (x,y) 连续， $f(x,y)$ 和 $-h(x,y)$ 关于 y 在 Y 上是上半连续的，与其相比就显得更弱.

参考文献:

[1] LAI H C, LEE J C. *On duality theorems for a nondifferentiable minimax fractional programming* [J]. J. Comput. Appl. Math., 2002, **146**(1): 115–126.

[2] LAI H C, LIU J C, TANAKA K. *Necessary and sufficient conditions for minimax fractional programming* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1999, **230**(2): 311–328.
[3] SINGH A. *Nondifferentiable fractional programming problems with Hanson-Mond classes of function* [J]. J. Optim. Theory Appl., 1986, **49**: 421–431.
[4] SINGH C. *Optimality conditions for fractional minmax programming* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1984, **100**(2): 409–415.
[5] AGGARWAL S A, SAXENA P C. *A class of fractional functional programming problems* [J]. New Zealand Oper. Res., 1979, **7**(1): 79–90.
[6] MOND B. *A class of nondifferentiable mathematical programming problems* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1974, **46**: 169–174.
[7] LIU J C, WU C S, SHEU R L. *Duality for fractional minimax programming* [J]. Optimization, 1997, **41**(2): 117–133.
[8] LIU J C, WU C S. *On minimax fractional optimality conditions with (F,ρ)-convexity* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1998, **219**(1): 36–51.
[9] 罗和治. 一类广义分式规划最优性必要条件的注记 [J]. 浙江工业大学学报, 2004, **32**(6): 660–663.
LUO He-zhi. *A note on necessary optimality conditions for a class of minimax fractional programming* [J]. J. Zhejiang Univ. of Technology, 2004, **32**(6): 660–663. (in Chinese)
[10] MANGASARIAN O L. *Nonlinear Programming* [M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1969.
[11] 罗和治. 一类非可微广义分式规划的最优性必要条件 [J]. 浙江师范大学学报 (自然科学版), 2001, **24**(3): 239–242.
LUO He-zhi. *Necessary optimality conditions for a class of nondifferentiable minimax fractional programming problems* [J]. J. Zhejiang Normal Univ. Natur. Sci. Ed., 2001, **24**(3): 239–241. (in Chinese)
[12] SCHMITTENDORF W E. *Necessary conditios and sufficient conditions for static minmax problems* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1977, **57**: 683–693.
[13] CLARKE F H. *Optimization and Nonsmooth Analysis* [M]. New York: Wiley-Interscience, 1983.
[14] CLARKE F H. *Generalized gradients and applications* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, **205**: 247–262.
[15] XU Z K. *Saddle-point type optimality criteria for generalized fractional programming* [J]. J. Optim. Theory Appl., 1988, **57**(1): 189–196.
[16] ROCKFELLAR R T. *Convex Analysis* [M]. Princeton University Press, New Jewsey, 1972.
[17] 罗和治. 范数 $\|Bx\|_p$ 的次梯度的一种简洁的求法 [J]. 浙江师范大学学报 (自然科学版), 2000, **23**(3): 234–236.
LUO He-zhi. *A simplified method for computing the subgradients of the norm $\|Bx\|_p$* [J]. J. Zhejiang Normal Univ. Natur. Sci. Ed., 2000, **23**(3): 234–236. (in Chinese)

Kuhn-Tucker Type Necessary Optimality Conditions for a Class of Nonsmooth Minimax Fractional Programming

WU Hui-xian[1], *LUO He-zhi*[2]
(1. Department of Mathematics, Hangzhou Dianzi University, Zhejiang 310018, China;;
2. Department of Applied Mathematics, Zhejiang University of Technology, Zhejiang 310032, China)

Abstract: In this paper, we consider a class of nonsmooth minimax fractional programming problems with nonlinear inequality constraints, where the numerator in the objective function is in the form of sum of differentiable function and convex function while the denominator is in the form of difference of a differentiable function and a convex function, and the constrained functions are differentiable. The Kuhn-Tucker type necessary optimality conditions for such class of problems are developed under the Arrow-Hurwicz-Uzawa constraint qualification. The results obtained in this paper improve and generalize some existing results in the literature.

Key words: nonsmooth minimax fractional programming; Kuhn-Tucker type necessary conditions; constraint qualification.