第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0781-06 **文献标识码**: **A**

两个新的积分不等式及其离散类似

韩玉良[1]， 俞元洪[2]

(1. 山东工商学院数学与信息科学学院，山东 烟台 264005;
2. 中国科学院数学与系统科学研究院，北京 100080)
(E-mail: hanyl@ccec.edu.cn)

摘 要: 本文建立了新的两个变量的积分不等式及其离散类似，所得结果可作为研究微分方程、积分方程和差分方程的工具.

关键词: 积分不等式；两个变量；离散类似.
MSC(2000): 26D15
中图分类: O178

1 引 言

在微分方程、积分方程和差分方程的理论发展中积分不等式和差分不等式起着重要作用. 近年来，许多新的积分和差分不等式被证明，它们为相应的方程理论发展提供了有力工具，可参看最近的文献 [1]–[4], [6]–[8] 及其引文. 其中文献 [2] 将 Hermite-Hadamard 不等式推广到多元 g- 凸函数. 文献 [7] 又将 Hilbert 和 Hardy-Hilbert 积分不等式推广到多元的情况. 在某些微分、积分和差分方程的定性分析中，已有文献给出的结果往往不是最佳的，为了改进这些结果经常需要寻找新的不等式. 本文将证明包含两个独立变量函数的新的积分不等式及其离散类似. 在某些新的应用中它们将更方便使用，而已知的不等式是不能直接应用.

2 主要结果

本节考虑的均为实值函数且为一切积分、求和以及乘积均在其定义域内进行， R 表示实数集， $R_+=[0,\infty)$. 下面证明一个十分有用的积分不等式.

定理 1 设 $u(x,y)$, $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ 是 $R_+\times R_+$ 上的非负连续函数. $p>1$ 常数，若

$$u^p(x,y)\le a(x,y)+b(x,y)\int_0^x\int_y^\infty c(s,t)u(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s,\quad x,y\in R_+ \tag{2.1}$$

则

$$u(x,y)\le [a(x,y)+b(x,y)A(x,y)\exp(\int_0^x\int_y^\infty c(s,t)\frac{b(s,t)}{p}\mathrm{d}t\mathrm{d}s)]^{\frac{1}{p}},\quad x,y\in R_+ \tag{2.2}$$

其中

$$A(x,y)=\int_0^x\int_y^\infty c(s,t)(\frac{p-1}{p}+\frac{a(s,\ t)}{p})\mathrm{d}t\mathrm{d}s,\quad x,y\in R_+. \tag{2.3}$$

收稿日期: 2005-11-07; **接受日期**: 2006-07-03

证明 定义函数

$$z(x,y)=\int_0^x\int_y^\infty c(s,t)u(s,t))\mathrm{d}t\mathrm{d}s, \tag{2.4}$$

则 (2.1) 式可写为

$$u^p(x,y)\le a(x,y)+b(x,y)z(x,y). \tag{2.5}$$

利用初等不等式 [5, p30]: $\alpha^{\frac{1}{p}}\beta^{\frac{1}{q}}\le\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}$, 其中 $\alpha\ge 0$, $\beta\ge 0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$, 由 (2.5) 式得到

$$u(x,y)\le[a(x,y)+b(x,y)z(x,y)]^{\frac{1}{p}}\cdot[1]^{\frac{p-1}{p}}\le\frac{p-1}{p}+\frac{a(x,\ y)}{p}+\frac{b(x,\ y)}{p}z(x,y). \tag{2.6}$$

联合 (2.4) 和 (2.6) 式，有

$$\begin{aligned}z(x,y)&\le\int_0^x\int_y^\infty c(s,t)(\frac{p-1}{p}+\frac{a(s,t)}{p}z(s,t))\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\&=A(x,y)+\int_0^x\int_y^\infty c(s,t)\frac{b(s,t)}{p}z(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中 $A(x,y)$ 是由 (2.3) 式定义. 显然, $A(x,y)$ 是非负连续且关于 x 非减, 关于 y 非增. 首先, 我们设 $A(x,y)>0$, $x,y\in R_+$, 则由 (2.7) 式得到

$$\frac{z(x,y)}{A(x,y)}\le 1+\int_0^x\int_y^\infty c(s,t)\frac{b(s,t)}{p}\frac{z(s,t)}{A(s,t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s. \tag{2.8}$$

将上式右端记作函数 $v(x,y)$. 则 $v(x,y)>0$, $\frac{z(x,y)}{A(x,y)}\le v(x,y)$, $v(x,y)$ 关于 y 非增. 且

$$\begin{aligned}v_x(x,y)&=\int_y^\infty c(x,t)\frac{b(x,t)}{p}\frac{z(x,t)}{A(x,t)}\mathrm{d}t\le\int_y^\infty c(x,t)\frac{b(x,t)}{p}v(x,t)\mathrm{d}t\\&\le v(x,y)\int_y^\infty c(x,t)\frac{b(x,t)}{p}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2.9}$$

在 (2.9) 式中令 y 固定，两边除以 $v(x,y)$, 将 x 记作 s, 对 s 从 0 到 x 积分，得到

$$v(x,y)\le\exp(\int_0^x\int_y^\infty c(s,t)\frac{b(s,t)}{p}\mathrm{d}t\mathrm{d}s). \tag{2.10}$$

注意到 $\frac{z(x,\ y)}{A(x,\ y)}\le v(x,y)$, 有

$$z(x,y)\le A(x,y)\exp(\int_0^x\int_y^\infty c(s,t)\frac{b(s,t)}{p}\mathrm{d}t\mathrm{d}s). \tag{2.11}$$

联合 (2.5) 和 (2.11) 式即得定理 1 的结论.

其次，若 $A(x,y)\ge 0$, 则对任意小的 $\varepsilon>0$, 有 $A(x,y)+\varepsilon>0$, 在上面的运算中，我们以 $A(x,y)+\varepsilon>0$ 代替 $A(x,y)$, 然后再令 $\varepsilon\to 0$ 取极限，同样可以得到 (2.11) 式. □

定理 2 设 $u(x,y)$, $a(x,y)$, $b(x,y)$ 是 $R_+\times R_+$ 上的非负连续函数. $F:R_+^3\to R_+$ 是连续函数且满足条件: $0\le F(x,y,u)-F(x,y,v)\le G(x,y,v)(u-v)$, $u\ge v\ge 0$, 其中 $G:R_+^3\to R_+$ 是连续函数, $p>1$ 常数，若

$$u^p(x,y)\le a(x,y)+b(x,y)\int_0^x\int_y^\infty F(s,t,u(s,t))\mathrm{d}t\mathrm{d}s,\quad x,y\in R_+, \tag{2.12}$$

则对任意 $x, y \in R_+$, 有

$$u(x,y) \leq [a(x,y) + b(x,y)B(x,y) \times \exp\,(\int_0^x \int_y^\infty G(s,t,\frac{p+1}{p} + \frac{a(s,t)}{p})\frac{b(s,t)}{p}\mathrm{d}t\mathrm{d}s)]^{\frac{1}{p}}, \quad (2.13)$$

其中

$$B(x,y) = \int_0^x \int_y^\infty F(s,t,\frac{p-1}{p} + \frac{a(s,t)}{p})\mathrm{d}t\mathrm{d}s, \quad x, y \in R_+. \quad (2.14)$$

证明 定义函数

$$z(x,y),\ z(x,y) = \int_0^x \int_y^\infty F(s,t,u(s,t))\mathrm{d}t\mathrm{d}s, \quad (2.15)$$

则如同定理 1 证明一样，由 (2.12) 式有不等式 (2.5) 和 (2.6) 成立，从 (2.6),(2.15) 式和关于函数 F 的条件，有

$$\begin{aligned} z(x,y) \leq & \int_0^x \int_y^\infty [F(s,t,\frac{p-1}{p} + \frac{a(s,t)}{p} + \frac{b(s,t)}{p}z(s,t)) - F(s,t,\frac{p-1}{p} + \frac{a(s,t)}{p}) + \\ & F(s,t,\frac{p-1}{p} + \frac{a(s,t)}{p})]\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ \leq & B(x,y) + \int_0^x \int_y^\infty G(s,t,\frac{p-1}{p} + \frac{a(s,t)}{p})\frac{b(s,t)}{p}z(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s, \end{aligned} \quad (2.16)$$

其中 $B(x,y)$ 由 (2.14) 式定义. 余下部分的证明，完全与定理 1 证明类似，我们略去.

3 离散类似

本节研究定理 1 和定理 2 的离散类似, 它们在偏差分方程的研究中有用. 记 $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, 并且约定空的和集取 0, 空的乘积取 1.

定理 3 设 $u(m,n)$, $a(m,n)$, $b(m,n)$, $c(m,n)$ $(m, n \in N_0)$ 是非负函数. $p > 1$ 为实常数, 若

$$u(m,n) \leq a(m,n) + b(m,n) \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{t=n+1}^{\infty} c(s,t)u(s,t) \quad (3.1)$$

对 $m, n \in N_0$ 成立，则

$$u(m,n) \leq [a(m,n) + b(m,n)e(m,n) \prod_{s=0}^{m-1} [1 + \sum_{t=n+1}^{\infty} c(s,t)\frac{b(s,t)}{p}]]^{\frac{1}{p}} \quad (3.2)$$

对 $m, n \in N_0$ 成立，其中

$$e(m,n) = \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{t=n+1}^{\infty} c(s,t)(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s,t)}{p}), \quad m, n \in N_0. \quad (3.3)$$

证明 定义函数

$$z(m,n),\ z(m,n) = \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{t=n+1}^{\infty} c(s,t)u(s,t), \quad (3.4)$$

则 (3.1) 式可写为

$$u^p(m,n) \le a(m,n) + b(m,n)z(m,n). \tag{3.5}$$

如同定理 1 的证明，从 (3.5) 式得到

$$u(m,n) \le \frac{p-1}{p} + \frac{a(m,n)}{p} + \frac{b(m,n)}{p}z(m,n). \tag{3.6}$$

从 (3.4) 和 (3.6) 式，有

$$\begin{aligned} z(m,n) &\le \sum_{s=0}^{m-1}\sum_{t=n+1}^{\infty} c(s,t)(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s,t)}{p} + \frac{b(s,t)}{p}z(s,t)) \\ &= e(m,n) + \sum_{s=0}^{m-1}\sum_{t=n+1}^{\infty} c(s,t)\frac{b(s,t)}{p}z(s,t), \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中， $e(m,n)$ 由 (3.3) 式定义．显然， $e(m,n)$ 是非负的，且关于 m 非减，关于 n 非增，$m,n \in N_0$. 首先，我们设 $e(m,n) > 0$, $m,n \in N_0$, 则由 (3.7) 式得

$$\frac{z(m,n)}{e(m,n)} \le 1 + \sum_{s=0}^{m-1}\sum_{t=n+1}^{\infty} c(s,t)\frac{b(s,t)}{p}\frac{z(s,t)}{e(s,t)}.$$

定义函数 $v(m,n)$,

$$v(m,n) = 1 + \sum_{s=0}^{m-1}\sum_{t=n+1}^{\infty} c(s,t)\frac{b(s,t)}{p}\frac{z(s,t)}{e(s,t)}, \tag{3.8}$$

则 $\frac{z(m,n)}{e(m,n)} \le v(m,n)$, 且

$$\begin{aligned} &[v(m+1,n) - v(m,n)] - [v(m+1,n+1) - v(m,n+1)] \\ &\quad = c(m,n+1)\frac{b(m,n+1)}{p}\frac{z(m,n+1)}{e(m,n+1)} \le c(m,n+1)\frac{b(m,n+1)}{p}v(m,n+1). \end{aligned} \tag{3.9}$$

注意到 $v(m,n) > 0$, $v(m,n+1) \le v(m,n)$, 由 (3.9) 式产生

$$\frac{[v(m+1,n) - v(m,n)]}{v(m,n)} - \frac{[v(m+1,n+1) - v(m,n+1)]}{v(m,n+1)} \le c(m,n+1)\frac{b(m,n+1)}{p}. \tag{3.10}$$

在 (3.10) 式中固定 m, 令 $n=t$ 且对 $t = n, n+1, \dots, r-1$ 求和 ($r \ge n+1$ 是 N_0 中任意整数) 得到

$$\frac{[v(m+1,n) - v(m,n)]}{v(m,n)} - \frac{[v(m+1,r) - v(m,r)]}{v(m,r)} \le \sum_{t=n+1}^{r} c(m,t)\frac{b(m,t)}{p}. \tag{3.11}$$

注意到 $\lim_{r\to\infty} v(m+1,r) = \lim_{r\to\infty} v(m,r) = 1$. 在 (3.11) 式中令 $r \to \infty$, 有

$$\frac{[v(m+1,n) - v(m,n)]}{v(m,n)} \le \sum_{t=n+1}^{\infty} c(m,t)\frac{b(m,t)}{p},$$

即

$$v(m+1,\ n) \le [1 + \sum_{t=n+1}^{\infty} c(m,t)\frac{b(m,t)}{p}]v(m,n). \tag{3.12}$$

在 (3.12) 式中固定 n, 令 $m=s$, 逐次用 $s=0,1,2,\ldots,m-1$ 代入，注意到约定 $v(0,n)=1$, 得到

$$v(m,n)\le\prod_{s=0}^{m-1}[1+\sum_{t=n+1}^{\infty}c(m,t)\frac{b(m,t)}{p}]. \tag{3.13}$$

将 $\frac{z(m,n)}{e(m,\ n)}\le v(m,n)$ 代入 (3.13) 式，有

$$z(m,n)\le e(m,n)\prod_{s=0}^{m-1}[1+\sum_{t=n+1}^{\infty}c(m,t)\frac{b(m,t)}{p}]. \tag{3.14}$$

联合 (3.5) 和 (3.14) 式即得所要求的不等式 (3.2).

其次，设 $e(m,n)\ge 0$, 则对 $\varepsilon>0$ 为任意小的常数，有 $e(m,n)+\varepsilon>0$, 在上面的证明过程中用 $e(m,n)+\varepsilon$ 代替 $e(m,n)$, 在得到相当于 (3.14) 的不等式中令 $\varepsilon\to 0$ 取极限同样可得不等式 (3.2). □

定理 4 设 $u(m,n)$, $a(m,n)$, $b(m,n)$ $(m,n\in N_0)$ 是非负函数. 函数 $L:N_0^2\times R_+\to R_+$ 满足条件： $0\le L(m,n,u)-L(m,n,v)\le K(m,n,v)(u-v)$, 其中 $u\ge v\ge 0$, $K(m,n,v)$ 是定义在 $m,n\in N_0,v\in R_+$ 上的非负函数. $p>1$ 为常数，若

$$u^p(m,n)\le a(m,n)+b(m,n)\sum_{s=0}^{m-1}\sum_{t=n+1}^{\infty}L(s,t,u(s,t)) \tag{3.15}$$

对 $m,n\in N_0$ 成立. 则

$$u(m,n)\le[a(m,n)+b(m,n)f(m,n)\prod_{s=0}^{m-1}[1+\sum_{t=n+1}^{\infty}K(s,t,\frac{p-1}{p}+\frac{a(s,t)}{p})\frac{b(s,t)}{p}]]^{\frac{1}{p}} \tag{3.16}$$

对 $m,n\in N_0$ 成立. 其中

$$f(m,n)=\sum_{s=0}^{m-1}\sum_{t=n+1}^{\infty}L(s,t,\frac{a(s,t)}{p})\frac{b(s,t)}{p}),\quad m,n\in N_0, \tag{3.17}$$

此定理的证明完全类似于上面定理的证明，我们略去.

4 应 用

下面给出定理 1 的一个应用. 考虑非线性积分方程

$$u^p(x,y)=f(x,y)+\int_0^x\int_y^{\infty}g(x,y,s,t,u(s,t))\mathrm{d}t\mathrm{d}s, \tag{4.1}$$

其中 $p>1$ 为常数， $u,f:R_+^2\to R$, $g:R_+^5\to R$ 均为连续函数，使得

$$|f(x,y)|\le a(x,y), \tag{4.2}$$

$$|g(x,y,s,t,u(s,t))|\le b(s,y)c(s,t)|u(s,t)|, \tag{4.3}$$

其中 $0 \le s \le x, 0 \le t \le y, x, y \in R_+$, 函数 a, b, c 的定义同定理 1. 设 $u(x,y)$ 是方程 (4.1) 在 $x, y \in R_+$ 中的一个解. 从 (4.1)–(4.3) 式，有

$$|u(x,y)|^p \le a(x,y) + b(x,y)\int_0^x \int_y^\infty c(s,t)|u(s,t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}s. \tag{4.4}$$

利用定理 1, 由 (4.4) 式产生

$$|u(x,y)| \le [a(x,y) + b(x,y)A(x,y)\exp(\int_0^x \int_y^\infty c(s,t)\frac{b(s,t)}{p}\mathrm{d}t\mathrm{d}s)]^{\frac{1}{p}}, \tag{4.5}$$

其中 $A(x,y)$ 由 (2.3) 式定义. 我们看到， (4.5) 式的右端是由已知函数给出的方程 (4.1) 解的界.

最后，我们注意到由定理 1–4 得到的界不依赖于未知函数. 因此，在偏微分方程和偏差分方程解的有界性，唯一性，连续依赖性和一些其他性质的研究中有许多应用.

参考文献:

[1] AGARWAL R P, DENG Sheng-fu, ZHANG Wei-nian. *Generalization of a retarded Gronwall-like inequality and its applications* [J]. Appl. Math. Comput., 2005, **165**(3): 599–612.

[2] KLARIČIĆ M, NEUMAN E, PEČARIĆ J. et al. *Hermite-Hadamard's inequalities for multivariate g-convex functions* [J]. Math. Inequal. Appl., 2005, **8**(2): 305–316.

[3] CHOI S K, DENG Sheng-fu, KOO N J. et al. *Nonlinear integral inequalities of Bihari-type without class H* [J]. Math. Inequal. Appl., 2005, **8**(4): 643–654.

[4] LIPOVAN O. *A retarded Gronwall-like inequality and its applications* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2000, **252**(1): 389–401.

[5] MITRINOVIC D S. *Analytic Ineguralities* [M]. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.

[6] PACHPATTE B G. *Ineguralities for Differential and Integral Equations* [M]. Academic Press, New York, 1998.

[7] YANG Bi-cheng, BRNETIĆ I, KRNIĆ M. et al. *Generalization of Hilbert and Hardy-Hilbert integral inequalities* [J]. Math. Inequal. Appl., 2005, **8**(2): 259–272.

[8] ZHANG Wei-nian, DENG Sheng-fu. *Projected Gronwall-Bellman's inequality for integrable functions* [J]. Math. Comput. Modelling, 2001, **34**(3-4): 393–402.

Two New Integral Inequalities and Their Discrete Analogues

HAN Yu-liang[1], *YU Yuan-hong*[2]

(1. Shandong Institute of Business and Techology, Shandong 264005, China;
2. Academy of Mathematics and System Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: In the present paper, we establish new integral inequalities in two variables and their discrete analogues. The result obtained here can be used as tools in the study of certain differential, integral and difference equations.

Key words: integral inequality; two variable; discrete analogues.