文章编号: 1000-341X(2007)04-0787-08 **文献标识码**: **A**

Orlicz 范数下的 Hardy-Hilbert 不等式

盛宝怀 [1], 周林林 [1], 李宏涛 [2]
(1. 绍兴文理学院数学系，浙江 绍兴 312000; 2. 宝鸡文理学院数学系，陕西 宝鸡 721007)
(E-mail: bhsheng@zscas.edu.cn)

摘 要: 给出了 Orlicz 范数下的 Hardy-Hilbert 不等式的一种形式，建立了当 N- 函数 $M(u)$ 及其余 N- 函数 $N(u)$ 均满足 $\triangle'$ 条件时 Orlicz 范数下的积分型及双级数型 Hardy-Hilbert 不等式.

关键词: N- 函数； Hardy-Hilbert 不等式； Young 不等式； $\triangle'$ 条件.
MSC(2000): 26D07
中图分类: O174.41

1 引 言

设 $p>1, q>1, 1/p+1/q=1, a_m\geq 0, b_m\geq 0, 0<\sum_{m=1}^{+\infty}a_m^p<+\infty$, $0<\sum_{n=1}^{+\infty}b_n^q<+\infty$, 则著名的双级数型 Hardy-Hilbert 不等式为 [1,2]:

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_mb_n}{m+n}<\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty}a_m^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}b_n^q\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{1}$$

它是分析学及其领域的重要不等式之一，其积分形式为:

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\Big(\int_0^{+\infty}f^p(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{+\infty}g^q(y)\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$

其中 $f(x)>0$, $g(x)>0$, $0<\int_0^{+\infty}f^p(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$, $0<\int_0^{+\infty}g^q(y)\,\mathrm{d}y<+\infty$. 由文献 [1] 知道常数 $\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}$ 是最佳的.

由于不等式 (1) 、 (2) 在理论和应用上的重要和广泛性，许多数学家，如， Hsu L C, Gao M Z, Yang B C, Kuang J C 和 Hu K 等均对其进行过深入的研究和推广. 研究主要集中在如下几个方面 [3]:

(i). 寻找适当的权函数 $w_n(q)>0$, $w_n(p)>0$ 来精细不等式 (1), 使其具有形式

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_mb_n}{m+n}\leq\Big(\sum_{m=1}^{+\infty}w_n(q)\,a_m^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}w_n(p)\,b_n^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

寻找适当的权函数 $w(x)>0$, 使不等式 (2) 具有精细形式

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\Big(\int_0^{+\infty}w(x)f^p(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{+\infty}w(y)g^q(y)\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

收稿日期: 2005-11-21; **接受日期**: 2006-07-06
基金项目: 国家自然科学基金 (10471130); 浙江省自然科学基金 (Y604003).

这方面的研究见文献 [4]–[11].

(ii). 推广权函数 $\frac{1}{m+n}$ 和 $\frac{1}{x+y}$. 如, $\frac{1}{m+n}$ 在文献 [12] 中被推广为 $\frac{1}{(Am+Bn)^{\lambda}}$ $(A>0, B>0, 0<\lambda\leq 2)$; $\frac{1}{x+y}$ 被推广为 $\frac{1}{(Ax+By)^{\lambda}}$. 一般形式的权函数见文献 [13]–[15] 等.

(iii). 考虑对于积分区间的改变. 如, Yang 在文献 [16] 中证明: 如果 $b>a>0, 0<t\leq 1, f,g\in L^2[0,+\infty)$, 则

$$\int_a^b\int_a^b \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^t}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq B(\frac{t}{2},\frac{t}{2})\Big(1-(\frac{a}{b})^4\Big)\Big(\int_a^b x^{1-t}f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b y^{1-t}g^2(y)\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{2}},$$

及

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}\int_a^{+\infty}\frac{f(x)g(y)}{(x+y)^t}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq & B(\frac{t}{2},\frac{t}{2})\Big(\int_a^{+\infty}\big[1-\frac{1}{2}(\frac{a}{x})^{\frac{1}{2}}\big]x^{1-t}f^2(x)\,\mathrm{d}x\times \\ & \int_a^{+\infty}\big[1-\frac{1}{2}(\frac{a}{y})^{\frac{1}{2}}\big]y^{1-t}g^2(y)\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中 $B(p,q)$ 为 Beta 函数. 进一步的研究结果见文献 [17]–[19] 等.

(iv). 向高维情况推广. 这方面的内容可以从文献 [20] 中看到.

关于 Hilbert 不等式的应用和由此而产生的一些新的不等式见综述文章 [3]. 这些都说明对不等式 (1) 和 (2) 的进一步研究和推广是很有意义的.

显然, 上述对于 Hilbert 不等式的研究均限于 L^p 空间中的函数和 L^p 序列空间. 由于 Orlicz 空间是 L^p 空间的本质的、自然的推广, 如果能够在 Orlicz 范数下建立上述两种不等式的适当形式, 从而将该不等式的研究伸展到更加抽象的函数空间中去将是有意义的.

2 与 N 函数有关的一些结论

定义 1[21] 非负连续偶的凸函数 $M(u)$ 满足:

$$M(0)=0;\ M(u)>0,\ u\neq 0;\ \lim_{u\to 0^+}\frac{M(u)}{u}=0;\ \lim_{u\to+\infty}\frac{M(u)}{u}=+\infty.$$

则称其为一个 N- 函数.

定义 2[21] 对于 N- 函数 $M(u)$ 其在 Young 不等式定义下的余 N- 函数 $N(v)$ 定义为

$$N(v)=\max_{u\geq 0}(u|v|-M(u)),\quad v\geq 0.$$

设 $M(u)$ 为 N- 函数, $G\subset R^n$ 为区域, G 有界或无界. 记

$$L_M^*=\{f(x):\exists\alpha>0\ \text{使得}\ \int_G M(\alpha f(x))\,\mathrm{d}x<+\infty\},$$

则称 L_M^* 为由 $M(u)$ 而生成的 Orlicz 空间. 在 L_M^* 上可以分别赋予下列 Orlicz 范数

$$\|f\|_M=\sup\{\Big|\int_G f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\Big|:\int_G N(g(x))\,\mathrm{d}x\leq 1\},\quad f\in L_M^*,$$

及 Luxemburg 范数

$$\|f\|_{(M)}=\inf_{\alpha>0}\{\alpha:\int_G M(\frac{|f(x)|}{\alpha})\,\mathrm{d}x\leq 1\}.$$

两种范数之间有如下等价关系

$$\|\cdot\|_{(M)} \le \|\cdot\|_M \le 2\|\cdot\|_{(M)}.$$

由 Luxemburg 范数的定义有

$$\int_G M(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{(M)}})\,\mathrm{d}x \le 1,\quad f \in L_M^*.$$

设 $M(u)$ 为 N- 函数．如果存在常数 $l > 0$ 使得

$$M(uv) \le lM(u)M(v),\quad u, v \ge 0, \tag{3}$$

则称 $M(u) \in \triangle'$.

定义 3[21] 设 $M(u)$ 为 N- 函数， $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ 为一无限数列．如果存在常数 $\alpha > 0$ 使 $\sum_{n=1}^{+\infty} M(\alpha|a_n|) < +\infty$, 则称 $a \in l_M^*$. 定义 l_M^* 中元素的范数为：

$$\|a\|_{(M)} = \inf_{\alpha>0}\{\alpha : \sum_{m=1}^{+\infty} M(\frac{|a_m|}{\alpha}) \le 1\},\quad a \in l_M^*.$$

称 l_M^* 为由 $M(u)$ 而生成的 Orlicz 序列空间．显然，成立不等式

$$\sum_{m=1}^{+\infty} M(\frac{|a_m|}{\|a\|_{(M)}}) \le 1,\quad a \in l_M^*.$$

记 N 函数 $M(u), u > 0$, 的反函数为 $M^{-1}(u)$. 则有下列的不等式成立 [21]:

$$uv \le M(u) + N(v), u, v \in R,\ (\text{Young 不等式}); \tag{4}$$

$$v \le M^{-1}(v)N^{-1}(v) \le 2v,\quad v \ge 0; \tag{5}$$

$$\frac{M(u')}{u'} < \frac{M(u)}{u},\ 0 < u' < u;\quad M(u) + N(v) \le M(|u| + |v|),\quad u, v \in R.$$

设 N- 函数 $N(u) \in \triangle', k_0 = \frac{N(1)}{l}$ (l 见 (3)), 则

$$N^{-1}(u) \le \frac{1}{N^{-1}(\frac{k_0}{u})}, u > 0. \tag{6}$$

事实上，由于 $N(u) \in \triangle'$, 所以 (3) 式成立．令 $u = \frac{1}{v}$, 则 $N(1) \le lN(\frac{1}{v})N(v)$. 又令 $v = N^{-1}(u)$, 则 $N(1) \le lN(\frac{1}{N^{-1}(u)})u$. 令 $k_0 = \frac{N(1)}{l}$ 则有 $\frac{k_0}{u} \le N(\frac{1}{N^{-1}(u)})$, 两边同取反函数则有 (6) 式成立.

3 主要结果及其证明

定理 1 设 N- 函数 $M(u)$ 及余 N- 函数 $N(u)$ 均满足 $\triangle'$ 条件，即存在常数 $l, k > 0$, 使

$$M(uv) \le lM(u)M(v), u, v \ge 0;\quad N(uv) \le kN(u)N(v), u, v \ge 0.$$

$f\in L_M^*, g\in L_N^*$, 满足 $f(x)\geq 0, g(x)\geq 0, \|f\|_{(M)}>0, \|g\|_{(N)}>0$, 则有

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq (l^2\alpha+k^2\beta)\|f\|_{(M)}\|g\|_{(N)}, \tag{7}$$

其中 $\alpha=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{N^{-1}(uk_0)(1+u)}, k_0=\frac{N(1)}{k}, \beta=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u}N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(u))}\Big)\,\mathrm{d}u$.

证明 由不等式 (5) 知道

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\leq & f(x)M^{-1}(\frac{1}{x+y})\times g(y)N^{-1}(\frac{1}{x+y})\\ = & f(x)M^{-1}(\frac{1}{x+y})M^{-1}(N^{-1}(\frac{x}{y}))\times g(y)N^{-1}(\frac{1}{x+y})\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{x}{y}))}.\end{aligned}$$

由 Young 不等式及 $M(u)\in\triangle', N(u)\in\triangle'$ 的假设有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq & \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}f(x)M^{-1}(\frac{1}{x+y})M^{-1}(N^{-1}(\frac{x}{y}))\times\\ & g(y)N^{-1}(\frac{1}{x+y})\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{x}{y}))}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \leq & \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}M\Big(f(x)M^{-1}(\frac{1}{x+y})M^{-1}(N^{-1}(\frac{x}{y}))\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\\ & \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}N\Big(g(y)N^{-1}(\frac{1}{x+y})\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{x}{y}))}\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \leq & l^2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}M\Big(f(x)\Big)\frac{N^{-1}(\frac{x}{y})}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+k^2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}N\Big(g(y)\Big)\times\\ & \frac{1}{x+y}N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{x}{y}))}\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{8}$$

又因为 $N^{-1}(\frac{x}{y})\leq\frac{1}{N^{-1}(\frac{yk_0}{x})}$, 所以

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}M\Big(f(x)\Big)\frac{N^{-1}(\frac{x}{y})}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}M\Big(f(x)\Big)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{N^{-1}(\frac{yk_0}{x})(x+y)}\\ &=\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty}M\Big(f(x)\Big)\frac{\mathrm{d}\frac{y}{x}}{N^{-1}(\frac{yk_0}{x})(1+\frac{y}{x})}\Big)\,\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{+\infty}M\Big(f(x)\Big)\Big(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{N^{-1}(uk_0)(1+u)}\Big)\,\mathrm{d}x\\ &=\alpha\int_0^{+\infty}M\Big(f(x)\Big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{9}$$

同理,

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}N\Big(g(y)\Big)\frac{1}{x+y}N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{x}{y}))}\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_0^{+\infty}\Big[\int_0^{+\infty}N\Big(g(y)\Big)\frac{1}{1+\frac{x}{y}}N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{x}{y}))}\Big)\mathrm{d}(\frac{x}{y})\Big]\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} N\Big(g(y)\Big)\Big[\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{x}{y}} N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{x}{y}))}\Big)\, \mathrm{d}(\frac{x}{y})\Big]\, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty} N\Big(g(y)\Big)\Big[\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u} N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(u))}\Big)\, \mathrm{d}u\Big]\, \mathrm{d}y \\
&= \beta \int_0^{+\infty} N\Big(g(y)\Big)\, \mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{10}
$$

由 (8), (9) 和 (10) 式知道

$$
\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le l^2\alpha \int_0^{+\infty} M(f(x))\, \mathrm{d}x + k^2\beta \int_0^{+\infty} N(g(y))\, \mathrm{d}y. \tag{11}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{f(x)}{\|f\|_{(M)}}\cdot\frac{g(y)}{\|g\|_{(N)}}}{x+y}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\le l^2\alpha \int_0^{+\infty} M\Big(\frac{f(x)}{\|f\|_{(M)}}\Big)\, \mathrm{d}x + k^2\beta \int_0^{+\infty} N\Big(\frac{g(y)}{\|g\|_{(N)}}\Big)\, \mathrm{d}y \le l^2\alpha + k^2\beta.
\end{aligned}
$$

即 (7) 式成立.

定理 2 设 N- 函数 $M(u)$ 及余 N- 函数 $N(u)$ 均满足 $\triangle'$ 条件，即存在常数 $l, k > 0$, 使

$$
M(uv) \le lM(u)M(v), u, v \ge 0; \quad N(uv) \le kN(u)N(v), u, v \ge 0.
$$

数列 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in l_M^*, b = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,) \in l_N^*$, 满足 $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\|a\|_{(M)} > 0$, $\|b\|_{(N)} > 0$, 则有

$$
\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_m\, b_n}{m+n} \le (l^2\alpha + k^2\beta)\, \|a\|_{(M)}\, \|b\|_{(N)}. \tag{12}
$$

证明 由定理 1 的证明及 Young 不等式知道

$$
\begin{aligned}
\frac{a_m b_n}{m+n} &= a_m b_n \cdot \frac{1}{m+n} \\
&\le a_m M^{-1}(\frac{1}{m+n}) \times b_n N^{-1}(\frac{1}{m+n}) \\
&= a_m M^{-1}(\frac{1}{m+n}) M^{-1}(N^{-1}(\frac{m}{n})) \times b_n N^{-1}(\frac{1}{m+n}) \frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{m}{n}))} \\
&\le M\Big(a_m M^{-1}(\frac{1}{m+n}) M^{-1}(N^{-1}(\frac{m}{n}))\Big) + N\Big(b_n N^{-1}(\frac{1}{m+n}) \frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{m}{n}))}\Big) \\
&\le l^2 M(a_m) \frac{1}{m+n} N^{-1}(\frac{m}{n}) + k^2 N(b_n) \frac{1}{m+n} N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{m}{n}))}\Big).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \le l^2 \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} M(a_m) \frac{1}{m+n} N^{-1}(\frac{m}{n}) +
$$

$$k^2\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}N(b_n)\frac{1}{m+n}N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{m}{n}))}\Big). \tag{13}$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}M(a_m)\frac{1}{m+n}N^{-1}(\frac{m}{n}) &\le \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}M(a_m)\frac{1}{m+n}\frac{1}{N^{-1}(\frac{k_0n}{m})}\\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}M(a_m)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{m+n}\frac{1}{N^{-1}(\frac{k_0n}{m})}.\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{m+n}\frac{1}{N^{-1}(\frac{k_0n}{m})} &\le \int_0^{+\infty}\frac{1}{(m+x)N^{-1}(\frac{k_0x}{m})}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+\frac{x}{m})N^{-1}(\frac{k_0x}{m})}\,\mathrm{d}\frac{x}{m}\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+u)N^{-1}(k_0u)}\,\mathrm{d}u = \alpha.\end{aligned}$$

所以,

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}M(a_m)\frac{1}{m+n}N^{-1}(\frac{m}{n}) \le \alpha\sum_{m=1}^{+\infty}M(a_m). \tag{14}$$

另一方面,

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}N(b_n)\frac{1}{m+n}N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{m}{n}))}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}N(b_n)\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m+n}N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{m}{n}))}\Big),$$

且

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m+n}N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{m}{n}))}\Big) &\le \int_0^{+\infty}\frac{1}{x+n}N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{x}{n}))}\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{\frac{x}{n}+1}N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{x}{n}))}\Big)\,\mathrm{d}\frac{x}{n}\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u}N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(u))}\Big)\,\mathrm{d}u = \beta.\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}N(b_n)\frac{1}{m+n}N\Big(\frac{1}{M^{-1}(N^{-1}(\frac{m}{n}))}\Big) \le \beta\sum_{n=1}^{+\infty}N(b_n). \tag{15}$$

综合 (13), (14) 和 (15) 三式便有

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_mb_n}{m+n} \le l^2\alpha\sum_{m=1}^{+\infty}M(a_m)+k^2\beta\sum_{n=1}^{+\infty}N(b_n).$$

因此,

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{a_m}{\|a\|_{(M)}}\frac{b_n}{\|b\|_{(N)}}}{m+n} \le l^2\alpha\sum_{m=1}^{+\infty}M(\frac{a_m}{\|a\|_{(M)}})+k^2\beta\sum_{n=1}^{+\infty}N(\frac{b_n}{\|b\|_{(N)}})$$

$$\leq l^2\alpha + k^2\beta.$$

所以 (12) 成立.

这里应该指出的是原函数与 N- 函数均满足 $\triangle'$ 条件的 N- 函数是存在的. 如，令 $M(u) = \frac{|u|^p}{p}, p > 1$, 则 $M(u)$ 为 N- 函数，其所对应的余 N 函数为 $N(v) = \frac{|v|^q}{q}$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 又如果 N- 函数 $M(u)$ 满足

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln M(u)}{\ln u} = p < +\infty,$$

则称 $M(u) \in M_\triangle$, 也称 $M(u)$ 为以 p 为幂的近似幂函数，记为 $M(u) \approx u^p$. 由文献 [22], [23] 知道此时其余 N- 函数也为近似幂函数，且 $N(u) \approx u^q$ 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 显然， $M(u), N(u) \in \triangle'$.

参考文献：

[1] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, PÓLYA G. *Inequality* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[2] 马振祥. 现代应用数学手册：现代应用分析卷 [M]. 北京：清华大学出版社， 1997, 415–426.
MA Zhen-xiang. *Modern Mathematical Handbook: Modern Analysis Volume* [M]. Beijing: Qinghua University Press, 1997, 415–426. (in Chinese)

[3] GAO Ming-zhe, HSU L C. *A survey of various refinements and generalizations of Hilbert's inequalities* [J]. J. Math. Res. Exposition, 2005, **25**(2): 227–243.

[4] HSU L C, GUO Yong-kang. *A refinement of Hardy-Riesz's extended Hilbert inequality* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1990, **10**(4): 500.

[5] HSU L C, WANG Yuan-jiang. *A refinement of Hilbert's double series theorem* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1991, **11**(1): 143–144.

[6] GAO Ming-zhe. *On Hilbert's inequality and its applications* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1997, **212**(1): 316–323.

[7] GAO Ming-zhe, WEI Shong-rong, HE Le-ping. *On the Hilbert inequality with weights* [J]. Z. Anal. Anwendungen, 2002, **21**(1): 257–263.

[8] 杨必成. 较为精密的 Hardy-Hilbert 不等式的一个加强 [J]. 数学学报， 1999, **42**(6): 1103–1110.
YANG Bi-cheng. *On a strengthened version of the more precise Hardy-Hilbert inequality* [J]. Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 1999, **42**(6): 1103–1110. (in Chinese)

[9] YANG Bi-cheng, DEBNATH L. *On new strengthened Hardy-Hilbert's inequality* [J] Internat. J. Math. Math. Sci., 1998, **21**(2): 403–408.

[10] 杨必成，高明哲. 关于 Hardy-Hilbert 不等式的一个最佳常数 [J]. 数学进展， 1997, **26**(2): 159–164.
YANG Bi-cheng, GAO Ming-zhe. *An optimal constant in the Hardy-Hilbert inequality* [J]. Adv. in Math. (China), 1997, **26**(2): 159–164. (in Chinese)

[11] GAO Ming-zhe, YANG Bi-cheng. *On the extended Hilbert's inequality* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1998, **126**(3): 751–759.

[12] YANG Bi-cheng. *On new generalizations of Hilbert's inequality* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2000, **248**(1): 29–40.

[13] KUANG Ji-chang, DEBNATH L. *On new generalizations of Hilbert's inequality and their applications* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2000, **245**(1): 248–265.

[14] YANG Bi-cheng, DEBNATH L. *On the extended Hardy-Hilbert's inequality* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2002, **272**(1): 187–199.

[15] 杨必成. 关于一个推广的 Hardy-Hilbert 不等式 [J]. 数学年刊 (A 辑), 2002, **23**(2): 247–254.
YANG Bi-cheng. *An extension of Hardy-Hilbert's inequality* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 2002, **23**(2): 247–254. (in Chinese)

[16] YANG Bi-cheng. *On Hilbert's integral inequality* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1998, **220**(2): 778–785.

[17] KUANG Ji-chang. *On new extensions of Hilbert's integral inequality* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1999, **235**(2): 608–614.

[18] 杨必成. 一个推广的具有最佳常数的 Hardy-Hilbert 积分不等式 [J]. 数学年刊 (A 辑), 2000, **21**(4): 401–408.
YANG Bi-cheng. *A general Hardy-Hilbert's integral inequality with a best constant* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 2000, **21**(4): 401–408. (in Chinese)

[19] 匡继昌. 应用不等式 [M]. 济南：山东科技出版社， 2004, 491–492.
KUANG Ji-chang. *Applied Inequalities* [M]. 3nd, Shandong Science and Technology Press, 2004, 491–492. (in Chinese)

[20] 洪勇. Hardy-Hilbert 积分不等式的全方位推广 [J]. 数学学报, 2001, **44**(4): 619–626.
HONG Yong. *All-sided generalization about Hardy-Hilbert integral inequalities* [J]. Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 2001, **44**(4): 619–626. (in Chinese)

[21] 吴从 , 王庭辅. 奥尔里奇空间及其应用 [M]. 哈尔滨: 黑龙江科技出版社, 1983.
WU Cong-xin, WANG Ting-fu. *Orlicz Spaces and It Applications* [M]. Harbin: Heilongjiang Science and Technology Press, 1983 (in Chinese)

[22] 盛宝怀, 尚增科, 张三敖. 等. 算子内插与逼近 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1999, 71–80.
SHENG Bao-huai, SHANG Zen-ke, ZHANG San-ao. et al. *Interpolation of Operators and Approximation* [M]. Xi'an: Shaanxi Normal University Press, 1999, 71–80. (in Chinese)

[23] 孟伯秦, 刘官厅. 内插空间理论及其应用 [M]. 呼和浩特: 内蒙古人民出版社, 2001: 153–158.
MENG Bo-qing, LIU Guan-ting. *Interpoaltion Theory and Its Application* [M]. Huhehaote: Neimenggu People Press, 2001, 153–158. (in Chinese)

The Hardy-Hilbert's Inequalities in Orlicz Norm

SHENG Bao-huai[1], *ZHOU Lin-lin*[1], *LI Hong-tao*[2]
(1. Department of Mathematics, Shaoxing University, Zhejiang 312000, China;
2. Department of Mathematics, Baoji University, Shaanxi 721007, China)

Abstract: The Hardy-Hilbert inequalities in Orlicz norm are investigated. Both the double serical and integral type Hardy-Hilbert inequalities in Orlicz norm are established under the conditions that both the N-function and its complentary N-function satisfy the $\triangle'$ condition.

Key words: N-function; Hardy-Hilbert inequality; Young inequality; $\triangle'$ condition.