**文章编号**: 1000-341X(2007)04-0826-07 **文献标识码**: **A**

# 几类高阶线性微分方程亚纯解的增长性

陈玉[1], 陈宗煊[2]
(1. 江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022; 2. 华南师范大学数学系, 广东 广州 510631)
(E-mail: chenyugyi@sina.com)

**摘 要**: 本文研究了几类亚纯函数系数的高阶线性微分方程解的增长性问题, 得到了齐次和非齐次线性微分方程亚纯解增长性的精确估计.

**关键词**: 高阶线性微分方程; 亚纯解; 超级; 二级收敛指数.
**MSC(2000)**: 30D35
**中图分类**: O174.52

## 1 引言与结果

本文使用值分布理论的标准记号 [1−3], 用 $\sigma(f)$ 表示函数 $f(z)$ 的级, $\mu(f)$ 表示 $f(z)$ 的下级, $\lambda(f), \bar{\lambda}(f)$ 分别表示 $f(z)$ 的零点收敛指数与不同零点收敛指数, 并引入以下定义.

**定义 1**[4] 亚纯函数 $f(z)$ 的超级定义为

$$\sigma_2(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log\log T(r,f)/\log r.$$

**定义 2**[5] 亚纯函数 $f(z)$ 的二级零点收敛指数 $\lambda_2(f)$ 定义为

$$\lambda_2(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log\log N(r,1/f)/\log r.$$

$f(z)$ 的二级不同零点收敛指数 $\bar{\lambda}_2(f)$ 定义为

$$\bar{\lambda}_2(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log\log \overline{N}(r,1/f)/\log r.$$

对于线性微分方程大量的无穷级亚纯解, 如何更精确地估计其增长性, 陈宗煊在文献 [7] 中研究了高阶线性齐次亚纯函数系数微分方程的亚纯解的增长性, 得到以下结果:

**定理 A** 假设 $a_0,\dots,a_{k-1}$ 是亚纯函数, 满足

$$b=\max\{\sigma(a_j),\lambda(1/a_0)\}<\mu(a_0)\le\sigma(a_0)<+\infty,\quad j=1,2,\dots,k-1.$$

如果齐次线性微分方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=0 \tag{1}$$

有亚纯解 $f$, 且 $\lambda(1/f)<b$, 那么每个非零亚纯解 $f$ 满足 $\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$.

**收稿日期**: 2005-10-08; **接受日期**: 2007-03-22
**基金项目**: 国家自然科学基金 (10161006); 广东省自然科学基金 (04010360); 江西省教育厅资助 (赣教技 2007135).

定理 A 讨论了 $\max\{\sigma(a_j),\lambda(1/a_0)\}<\mu(a_0)\le\sigma(a_0)<+\infty$ 的情形, 其中 $j=1,2,\ldots,k-1$. 本文将在更宽泛的条件下加以讨论, 估计了几类高阶线性微分方程的解的增长性问题, 用超级、二级零点收敛指数的概念进一步精确地估计了微分方程的无穷级解的增长率、零点密度. 并对定理 A 的条件加以改进.

**定理 1** 假设 $a_0,\ldots,a_{k-1}$ 是亚纯函数，满足 $\sigma(a_j)<\sigma(a_0)\le+\infty$ $(j=1,2,\ldots,k-1)$ 且 $\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log m(r,a_0)}{\log r}=\sigma(a_0)$. 如果 $f\not\equiv0$ 是微分方程 (1) 的亚纯解，且 $\lambda(1/f)<\mu(f)$, 那么 $\sigma(f)=\infty$, $\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$.

**定理 2** 假设 $a_0,\ldots,a_{k-1},F\not\equiv0$ 是有穷级亚纯函数，满足 $\sigma(a_j)<\sigma(a_0)$ $(j=1,2,\ldots,k-1)$, 如果微分方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=F \tag{2}$$

的所有解 $f\not\equiv0$ 为亚纯解，且 $\lambda(1/f)<\mu(f)$, $\sigma(f)=\infty$, 那么

(a) $\bar\lambda(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$; (b) $\bar\lambda_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)\le\sigma(a_0)$. 若 $\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log m(r,a_0)}{\log r}=\sigma(a_0)$, 则 $\bar\lambda_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$, 至多除去一个例外.

**定理 3** 假设 $a_0,\ldots,a_{k-1},F$ 是有穷级亚纯函数，满足 $\sigma(a_j)<\sigma(a_0)$ $(j=1,2,\ldots,k-1)$ 且 $\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log m(r,a_0)}{\log r}=\sigma(a_0)$, 如果微分方程 (2) 的所有解 $f\not\equiv0$ 为亚纯解，且 $\lambda(1/f)<\mu(f)$, 那么

(a) $\sigma(f)=\infty$, 至多可能除去一个例外. 进一步地，若 $F\not\equiv0$, 则 $\bar\lambda(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$.

(b) $\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$, 至多可能除去一个例外. 进一步地，若 $F\not\equiv0$, 则 $\bar\lambda_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$.

**定理 4** 假设 $a_0,\ldots,a_{k-1}$ 是亚纯函数，存在某个超越亚纯函数 $a_d$ $(d\in\{0,\ldots,k-1\})$, 满足 $\sigma(a_j)<\mu(a_d)$ $(j\ne d)$ 且 $\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log m(r,a_d)}{\log r}=\sigma(a_d)$, 如果微分方程 (1) 的所有解为亚纯解，且 $\lambda(1/f)<\mu(a_d)$, 那么 $\sigma_2(f)\le\sigma(a_d)$ 且至少有一解满足 $\sigma_2(f)=\sigma(a_d)$.

**定理 5** 设 $a_0,\ldots,a_{k-1}$ 满足定理 4 的条件， $F\not\equiv0$ 是一有限级亚纯函数，假设方程 (2) 的解均为亚纯函数且 $\lambda(1/f)<\mu(a_d)$, $f_0$ 是方程 (2) 的一个解， $g_1,\ldots,g_k$ 是对应的方程 (1) 的基础解系，则存在一个 $g_j(j\in\{1,\ldots,k\})$ 不妨设为 $g_1$, 使所有解空间 $\{cg_1+f_0,c\in C\}$ 内的解满足 $\sigma_2(f)=\bar\lambda_2(f)=\sigma(a_d)$, 至多有一个例外.

**注 1** 定理 4 与定理 5 若将条件 $\sigma(a_j)<\mu(a_d)$ 及 $\lambda(1/f)<\mu(a_d)$ 改为 $\sigma(a_j)<\sigma(a_d)$ 与 $\lambda(1/f)<\mu(f)$, 结论仍成立.

不难证明：若 $N(r,a_0)=O(m(r,a_0))$, 则 $\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log m(r,a_0)}{\log r}=\sigma(a_0)$.

从而有以下推论.

**推论 1** 假设 $a_0,\ldots,a_{k-1}$ 是亚纯函数， $\sigma(a_j)<\sigma(a_0)\le+\infty$ $(j=1,2,\ldots,k-1)$, 且满足 $N(r,a_0)=O(m(r,a_0))$. 如果 $f\not\equiv0$ 是齐次方程 (1) 的亚纯解，且 $\lambda(1/f)<\mu(f)$, 那么 $\sigma(f)=\infty$, $\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$.

不难看出，推论 1 对定理 A 的条件作了改进，去掉了 $\lambda(1/a_0)<\mu(a_0)$ 及 $\sigma(a_0)<\infty$ 的限制，并且条件 $N(r,a_0)=O(m(r,a_0))$ 除了包含 $\lambda(1/a_0)<\mu(a_0)\le\sigma(a_0)$, 还包含了一部分 $\lambda(1/a_0)=\sigma(a_0)$ 的情形，即还讨论了 $\lambda(1/a_0)=\sigma(a_0)$ 的情形下亚纯解的性质.

**推论 2** 假设 $a_0,\ldots,a_{k-1},F$ 是有穷级亚纯函数， $\sigma(a_j)<\sigma(a_0)(j=1,2,\ldots,k-1)$, 且满足 $N(r,a_0)=O(m(r,a_0))$. 如果非齐次方程 (2) 的所有解 $f\not\equiv0$ 为亚纯解，且 $\lambda(1/f)<\mu(f)$, 那么

(a) $\sigma(f)=\infty$, 至多可能除去一个例外. 进一步地, 若 $F\not\equiv 0$, 则 $\bar{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$.

(b) $\bar{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)\le\sigma(a_0)$. 若 $\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log m(r,a_0)}{\log r}=\sigma(a_0)$, 则 $\bar{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$, 至多除去一个例外.

**推论 3** 假设 $a_0,\dots,a_{k-1}$ 是亚纯函数, 存在某个 $a_d$ $(d\in\{0,\dots,k-1\})$, 满足 $\sigma(a_j)<\mu(a_d)$ $(j\neq d)$, 且满足 $N(r,a_d)=O(m(r,a_d))$. 如果微分方程 (1) 的所有解为亚纯解, 且 $\lambda(1/f)<\mu(a_d)$, 那么 $\sigma_2(f)\le\sigma(a_d)$ 且至少有一解满足 $\sigma_2(f)=\sigma(a_d)$.

**推论 4** 设 $a_0,\dots,a_{k-1}$ 满足推论 3 的条件, $F\not\equiv 0$ 是一有限级亚纯函数, 假设方程 (2) 的解均为亚纯函数且 $\lambda(1/f)<\mu(a_d)$, $f_0$ 是方程 (2) 的一个解, $g_1,\dots,g_k$ 是对应的方程 (1) 的基础解系, 则存在一个 $g_j$ $(j\in\{1,\dots,k\})$ 不妨设为 $g_1$, 使所有解空间 $\{cg_1+f_0, c\in C\}$ 内的解满足 $\sigma_2(f)=\bar{\lambda}_2(f)=\sigma(a_d)$, 至多有一个例外.

**注 2** 推论 3 与推论 4 若将条件 $\sigma(a_j)<\mu(a_d)$ 及 $\lambda(1/f)<\mu(a_d)$ 改为 $\sigma(a_j)<\sigma(a_d)$ 与 $\lambda(1/f)<\mu(f)$, 结论仍成立.

## 2 定理证明所需引理

**引理 1**[7] 假设 $f(z)=g(z)/d(z)$ 为亚纯函数, 其中 $g(z)$, $d(z)$ 为整函数, 满足 $\mu(g)=\mu(f)=\mu\le\sigma(g)=\sigma(f)\le+\infty$, $\lambda(d)=\sigma(d)=\lambda(1/f)=\beta<\mu$. 假设 z 为 $|z|=r$ 上一点, 满足 $|g(z)|=M(r,g)$, $v_g(r)$ 表示整函数 $g(z)$ 的中心指标, 那么存在一个对数测度为有穷的集合 $E_1\subset(1,+\infty)$, 当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 时, $f^{(n)}(z)/f(z)=(v_g(r)/z)^n(1+o(1))$ $(n\ge 1)$.

**引理 2**[8] 假设 $g(z)$ 是亚纯函数, $\sigma(g)=\beta<+\infty$, 那么对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $E_2\subset(1,+\infty)$ (其中 $lmE_2<+\infty$, $mE_2<+\infty$), 使得当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2$ 且 $r\to+\infty$ 时, 有

$$|g(z)|\le\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}.$$

**引理 3**[6] 设 $F(r)$, $G(r)$ 是在 $[0,+\infty)$ 上的非减函数, 存在集合 $E_3\subseteq[0,+\infty)$ 具有有穷测度, 对 $r\notin E_3$, 若 $F(r)\le G(r)$, 则

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\log F(r)/\log r\le\overline{\lim_{r\to\infty}}\log G(r)/\log r,$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\log\log F(r)/\log r\le\overline{\lim_{r\to\infty}}\log\log G(r)/\log r.$$

**引理 4**[9] 设 $g(z)$ 为无穷级整函数, 且 $\sigma_2(g)=\sigma<+\infty$, 又设 $v_g(r)$ 为 $g(z)$ 的中心指标, 则 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\log\log v_g(r)/\log r=\sigma$.

**引理 5**[12] 假设微分方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=0$$

被 $k$ 个线性无关的亚纯解 $f_1,\dots,f_k$ 所满足, 那么 $a_0,\dots,a_{k-1}$ 是亚纯函数, 且对于 $j=0,1,\dots,k-1$, 有 $m(r,a_j)=O[\log(\max(T(r,f_d):d=1,\dots,k))]$.

**引理 6** 假设亚纯函数 $f(z)$ 满足 $\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log m(r,f)}{\log r}=\sigma(f)$, 则存在一无穷对数测度 $E_5\subset(1,+\infty)$, $\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in E_5}}\frac{\log m(r,f)}{\log r}=\sigma(f)$.

**证明** 由 $\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log m(r,f)}{\log r}=\sigma(f)$ 知存在 $\{r_n\}(r_n\to\infty)$ 使

$$\lim_{r_n\to\infty}\frac{\log m(r_n,f)}{\log r_n}=\sigma(f).$$

取 $E_5=\bigcup_{n=1}^{\infty}[r_n,2r_n]$, 则 $E_5$ 的对数测度为 $\infty$ 且 $\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in E_5}}\frac{\log m(r,f)}{\log r}=\sigma(f)$.

## 3 定理的证明

**定理 1 的证明** 假设 $f\not\equiv 0$ 是微分方程 (1) 的亚纯解，如果 $\sigma(f)<+\infty$, 则由 (1) 式可得

$$-a_0=f^{(k)}/f+a_{k-1}f^{(k-1)}/f+\cdots+a_1f'/f.$$

由对数导数引理，可知

$$m(r,a_0)\le\sum_{j=1}^{k-1}m(r,a_j)+O(\log r),\tag{4}$$

则 $\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log m(r,a_0)}{\log r}\le\max\{\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log m(r,a_j)}{\log r}\ (j=1,2,\ldots,k-1)\}$, 即 $\sigma(a_0)\le\max\{\sigma(a_j)\ (j=1,2,\ldots,k-1)\}$, 矛盾．所以 $\sigma(f)=+\infty$.

由 (3) 式及对数导数引理，可知最多除去一个线测度为有穷的子集 $\mathrm{E}_1$, 对所有 $z\notin E_1$,

$$m(r,a_0)\le\sum_{j=1}^{k-1}m(r,a_j)+O(\log rT(r,f))\tag{5}$$

由 (5) 式，有 $\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r}\ge\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log m(r,a_0)}{\log r}$, 即 $\sigma_2(f)\ge\sigma(a_0)$.

如果 $\sigma(a_0)=\infty$, 即得 $\sigma_2(f)=\sigma(a_0)=\infty$.

如果 $\sigma(a_0)<\infty$, 下证 $\sigma_2(f)\le\sigma(a_0)$.

由 Hadamard 定理， $f$ 可表成 $f(z)=g(z)/d(z)$, 其中 $g(z)$, $d(z)$ 为整函数，满足

$$\mu(f)=\mu(g)\le\sigma(g)=\sigma(f)=+\infty,\quad \lambda(d)=\sigma(d)=\lambda(1/f)<\mu(f)=\mu(g).$$

由引理 1, 取点 $z$ 满足 $|z|=r$ 及 $|g(z)|=M(r,g)$, 用 $v_g(r)$ 表示整函数 $g$ 的中心指标，那么存在一个对数测度为有穷的集合 $E_1\subset(1,+\infty)$, 当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 时,

$$f^{(n)}(z)/f(z)=(v_g(r)/z)^n(1+o(1))\quad(n\ge1).\tag{6}$$

将方程 (1) 改写为：

$$-f^{(k)}/f=a_{k-1}f^{(k-1)}/f+\cdots+a_1f'/f+a_0.\tag{7}$$

将 (6) 式代入 (7) 式，得

$$-(v_g(r)/z)^k(1+o(1))=a_{k-1}(v_g(r)/z)^{k-1}(1+o(1))+\cdots+a_0.\tag{8}$$

由引理 2 知，对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $E_2\subset(1,+\infty)$ (其中 $lmE_2<+\infty$, $mE_2<+\infty$), 当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2$, 且 $r\to\infty$ 时,

$$|a_j(z)|\le\exp\{r^{\sigma(a_j)+\varepsilon}\}\quad(j=0,1,\ldots k-1).\tag{9}$$

由 (8), (9) 式及题设知，当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1\cup E_2$ 且 $|g(z)|=M(r,g)$, $r\to\infty$ 时，有

$$(v_g(r)/r)^k|1+o(1)|\le k(v_g(r)/r)^{k-1}|1+o(1)|\exp\{r^{\sigma(a_0)+\varepsilon}\}.$$

易知， $r\to\infty$ 时， $v_g(r)\le \exp\{r^{\sigma(a_0)+2\varepsilon}\}$, 又由 $\varepsilon$ 的任意性及引理 3 和 4, 可知 $\sigma_2(f)=\sigma_2(g)\le\sigma(a_0)$. 即所有亚纯解 $f\not\equiv 0$, 有 $\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$.

**定理 2 的证明** (a) 若 $F\not\equiv 0$, 将微分方程 (2) 改写为

$$1/f=1/F(f^{(k)}/f+a_{k-1}f^{(k-1)}/f+\cdots+a_0). \tag{10}$$

易知

$$n(r,1/f)\le k\bar{n}(r,1/f)+n(r,1/F)+\sum_{j=0}^{k-1}n(r,a_j),$$

$$N(r,1/f)\le k\overline{N}(r,1/f)+N(r,1/F)+\sum_{j=0}^{k-1}N(r,a_j). \tag{11}$$

由 (10) 式及对数导数引理知，最多除去一个线测度为有穷的子集 $E_2$, 对所有 $z\notin E_2$

$$m(r,1/f)\le m(r,1/F)+\sum_{j=0}^{k-1}m(r,a_j)+O(\log rT(r,f)). \tag{12}$$

由 (11) 及 (12) 式可得

$$T(r,f)=T(r,1/f)+O(1)\le k\overline{N}(r,1/f)+T(r,F)+\sum_{j=0}^{k-1}T(r,a_j)+O(\log rT(r,f)). \tag{13}$$

由于 $a_0,\dots,a_{k-1}$, $F$ 为有穷级亚纯函数，以及 $\sigma(f)=+\infty$, 则由 (13) 式可以得到 $\bar{\lambda}(f)\ge\sigma(f)$, 从而有 $\bar{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$.

(b) 下证 $\sigma_2(f)\le\sigma(a_0)$.

由 Hadamard 定理， $f$ 可表成 $f(z)=g(z)/d(z)$, 其中 $g(z)$, $d(z)$ 为整函数，满足

$$\mu(f)=\mu(g)\le\sigma(g)=\sigma(f)=+\infty,\quad \lambda(d)=\sigma(d)=\lambda(1/f)<\mu(f)=\mu(g).$$

由引理 1, 取点 $z$ 满足 $|z|=r$ 及 $|g(z)|=M(r,g)$, 用 $v_g(r)$ 表示整函数 $g$ 的中心指标，那么存在一个对数测度为有穷的集合 $E_2\subset(1,+\infty)$, 当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2$ 时， (6) 式成立. 将方程 (2) 改写为：

$$-f^{(k)}/f=a_{k-1}f^{(k-1)}/f+\cdots+a_1f'/f+a_0-F/f. \tag{14}$$

将 (6) 式代入 (14) 式，得

$$-(v_g(r)/z)^k(1+o(1))=a_{k-1}(v_g(r)/z)^{k-1}(1+o(1))+\cdots+a_0-F/f. \tag{15}$$

由引理 2 知，对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $E_3\subset(1,+\infty)$ (其中 $lmE_3<+\infty$, $mE_3<+\infty$), 当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_3$, 且 $r\to\infty$ 时,

$$|a_j(z)|\le\exp\{r^{\sigma(a_j)+\varepsilon}\}\quad (j=0,1,\dots,k-1). \tag{16}$$

不妨设 $\alpha=\sigma(Fd)<+\infty$, 由引理 2, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $E_4\subset(1,+\infty)$ (其中 $lmE_4<+\infty$, $mE_4<+\infty$), 当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_4$, 且 $r\to\infty$ 时，有 $|F(z)d(z)|\le\exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\}$. 同时，当 $z$ 满足 $|g(z)|=M(r,g)$ 时，有 $|g(z)|\ge\exp\{r^{\alpha+1}\}$, 故有

$$\begin{aligned}|F(z)/f(z)|&=|F(z)d(z)/g(z)|\le\exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\}/\exp\{r^{\alpha+1}\}\\&=\exp\{r^{\alpha+\varepsilon}-r^{\alpha+1}\}\to 0.\end{aligned}\tag{17}$$

由 (15)–(17) 式及题设知，当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2\cup E_3\cup E_4$ 且 $|g(z)|=M(r,g), r\to\infty$ 时，有

$$(v_g(r)/r)^k|1+o(1)|\le(k+1)(v_g(r)/r)^{k-1}|1+o(1)|\exp\{r^{\sigma(a_0)+\varepsilon}\}.$$

易知， $r\to\infty$ 时， $v_g(r)\le\exp\{r^{\sigma(a_0)+2\varepsilon}\}$, 又由 $\varepsilon$ 的任意性及引理 3 和 4, 可知 $\sigma_2(f)=\sigma_2(g)\le\sigma(a_0)$.

下证 $\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$, 至多除去一个例外.

假设有 $f_1,f_2(f_1\ne f_2)$ 满足 $\sigma_2(f_1)<\sigma(a_0),\sigma_2(f_2)<\sigma(a_0)$, 则 $\sigma_2(f_1-f_2)\le\max\{\sigma_2(f_1),\sigma_2(f_2)\}$, 即 $\sigma_2(f_1-f_2)<\sigma(a_0)$. 而 $f_1-f_2$ 为齐次方程 (1) 的解，由定理 1 知， $\sigma_2(f_1-f_2)=\sigma(a_0)$. 矛盾. 即至多可能除去一个有限级例外解，其它所有亚纯解 $f\not\equiv 0$, 有 $\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$.

又 $F\not\equiv 0$, 下证 $\bar\lambda_2(f)=\sigma_2(f)$.

由于 $r$ 充分大时， $\log rT(r,f)\le\frac{1}{2}T(r,f)$, 代入 (13) 式，并注意到 $a_0,\dots,a_{k-1}$, $F$ 为有穷级亚纯函数，可知 $\bar\lambda_2(f)\ge\sigma_2(f)$, 从而有 $\bar\lambda_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$.

**定理 3 的证明** 由定理 1 、定理 2 及其证明易得.

**定理 4 的证明** 由于方程 (1) 的所有解为亚纯函数，设 $\{f_1,\dots,f_k\}$ 为方程 (1) 的基础解系，由引理 5, 有

$$m(r,a_d)\le M\log(\max_{1\le n\le k}T(r,f_n)).\tag{18}$$

因为 $\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log m(r,a_d)}{\log r}=\sigma(a_d)$, 由引理 7, 存在一无穷对数测度 $E_5\subset(1,+\infty)$, 令 $E_{5n}=\{r:r\in E_5, m(r,a_d)\le M\log T(r,f_n)\}(n=1,\dots,k)$, 则 $\bigcup_{n=1}^k E_{5n}=E_5$. 由于 $E_5$ 的对数测度无穷，所以必存在某个 $E_{5n}(n\in\{1,\dots,k\})$, 不妨设为 $E_{51}$, 它有无穷对数测度，且在 $E_{51}$ 上满足 $\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in E_{51}}}\frac{\log m(r,a_d)}{\log r}=\sigma(a_d)$ 和 $m(r,a_d)\le M\log T(r,f_1)(r\in E_{51})$, 由此可得 $\sigma_2(f_1)\ge\sigma(a_d)$.

由 Hadamard 定理， $f$ 可表成 $f(z)=g(z)/d(z)$, 其中 $g(z)$, $d(z)$ 为整函数，满足 $\sigma(g)=\sigma(f)=+\infty$, $\lambda(d)=\sigma(d)=\lambda(1/f)$.

由方程 (1) 得

$$a_d=\frac{-(f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_{d+1}f^{(d+1)}+a_{d-1}f^{(d-1)}+\cdots+a_0f)}{f^{(d)}},$$

从而 $T(r,a_d)\le cT(r,f)+\sum_{j\ne d}T(r,a_j)+O(\log r)$, 其中 $c$ 为常数.

由假设 $\max\{\sigma(a_j)(j\ne d)\}<\mu(a_d)$, 可得 $\mu(f)\ge\mu(a_d)$. 由 Hadamard 定理， $f$ 可表成 $f(z)=g(z)/d(z)$, 其中 $g(z)$, $d(z)$ 为整函数，满足

$$\sigma(g)=\sigma(f)=+\infty,\quad\lambda(d)=\sigma(d)=\lambda(1/f).$$

因为 $\lambda(1/f)<\mu(a_d)$, 所以 $\mu(f)>\lambda(1/f)$, 从而

$$\mu(g)=\mu(f)\le\sigma(g)=\sigma(f)=+\infty,\quad\lambda(d)=\sigma(d)=\lambda(1/f)<\mu(f).$$

类似于定理 1 的证法，可以证明 $\sigma_2(f) \le \sigma(a_d)$. 从而 $\sigma_2(f_1) = \sigma(a_d)$.

**定理 5 的证明** 由定理 4 知， $\sigma_2(g_j) \le \sigma(a_d)$ $(j = 1, \dots, k)$ 且存在一个 $g_j$, 不妨设为 $g_1$ 满足 $\sigma_2(g_1) = \sigma(a_d)$. 用文献 [13] 的证明方法，可以证明解空间 $\{cg_1 + f_0, c \in C\}$ 内的解满足 $\sigma_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \sigma(a_d)$, 至多有一个例外.

## 参考文献:

[1] HAYMAN W. *Meromorphic Functions* [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京：科学出版社， 1982.
YANG Le. *Value Distribution Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1982. (in Chinese)

[3] 何育赞，萧修治. 代数体函数与常微分方程 [M]. 北京：科学出版社， 1988.
HE Yu-zan, XIAO Xiu-zhi. *Algebroid Functions and Ordinary Differential Equations* [M]. Beijing: Science Press, 1988. (in Chinese)

[4] 仪洪勋，杨重骏. 亚纯函数唯一性理论 [M]. 北京：科学出版社， 1995.
YI Hong-xun, YANG Chung-chun. *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions* [M]. Beijing: Science Press, 1995. (in Chinese)

[5] 陈宗煊. 二阶复域微分方程解的不动点与超级 [J]. 数学物理学报， 2000, **20**(3): 425–432.
CHEN Zong-xuan. *The fixed points and hyper order of solutions of second order complex differential equations* [J]. Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed., 2000, **20**(3): 425–432. (in Chinese)

[6] CHEN Zong-xuan. *The growth of solutions of second order linear differential equations with meromorphic coefficients* [J]. Kodai Math. J., 1999, **22**(2): 208–221.

[7] 陈宗煊. 关于高阶线性微分方程亚纯解的增长率 [J]. 数学学报， 1999, **42**(3): 551–558.
CHEN Zong-xuan. *The rate of growth of meromorphic solutions of higher-order linear differential equations* [J]. Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 1999, **42**(3): 551–558. (in Chinese)

[8] 陈宗煊. 二阶亚纯系数微分方程亚纯解的零点 [J]. 数学物理学报， 1996, **16**(30): 276–283.
CHEN Zong-xuan. *Zeros of meromorphic solutions to second-order differential equations with meromorphic coefficients* [J]. Acta Math. Sci. (Chinese), 1996, **16**(3): 276–283. (in Chinese)

[9] CHEN Zong-xuan, YANG Chung-chun. *Quantitative estimations on the zeros and growths of entire solutions of linear differential equations* [J]. Complex Variables Theory Appl., 2000, **42**(2): 119–133.

[10] CHEN Zong-xuan, YANG Chung-chun. *Some oscillation theorems for linear differential equations with meromorphic coefficients* [J]. Southeast Asian Bull. Math., 1999, **23**(3): 409–417.

[11] GUNDERSEN G G. *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates* [J]. J. London Math. Soc. (2), 1988, **37**(1): 88–104.

[12] FRANK G, HELLERSTEIN S. *On the meromorphic solutions of non-homogeneous linear differential equations with polynomial coefficients* [J]. Proc. London Math. Soc., 1986, **53**: 407–428.

[13] 肖丽鹏，陈宗煊. 一类高阶微分方程亚纯解的增长性 [J]. 数学研究， 2005, **38**(3): 265–271.
XIAO Li-peng, CHEN Zong-xuan. *Growth of meromorphic solutions of higher-order linear differential equations* [J]. J. Math. Study, 2005, **38**(3): 265–271. (in Chinese)

# On the Growth of Meromorphic Solutions of a Class of Higher Order Linear Differential Equations

*CHEN Yu*[1], *CHEN Zong-xuan*[2]

(1. Institute of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Jiangxi 330022, China;
2. Department of Mathematics, South China Normal University, Guangdong 510631, China )

**Abstract**: In this paper, we investigate the properties of the growth of solutions of some new types of higher order linear differential equations with meromorphic coefficients, and obtain some precise estimates of homogeneous and non-homogeneous linear differential equations.

**Key words**: higher order linear differential equation; meromorphic solutions; hyper-order; hyper-exponent of convergence.