文章编号: 1000-341X(2007)04-0863-06 **文献标识码**: **A**

一般生长曲线模型中最优预测的稳健性

袁权龙， 张著洪
(贵州大学理学院数学系，贵州 贵阳 550025)
(E-mail: yuanquanlong1980@sohu.com)

摘 要: 研究了一般生长曲线模型中最优线性无偏预测的稳健性，得到了线性可预测变量的这种预测关于协方差阵具有稳健性的充要条件.

关键词: 生长曲线模型；线性可预测变量；最优线性无偏预测；稳健性.
MSC(2000): 62F35
中图分类: O212.4

1 引 言

考虑一般生长曲线模型 [1]:

$$M_1: \quad \begin{cases} Y = XBZ + \varepsilon, \\ E(\mathrm{Vec}(\varepsilon)) = 0, \\ V(\mathrm{Vec}(\varepsilon)) = \Delta \otimes \Sigma, \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 Y 为 $n \times q$ 的随机观察阵， ε 为 $n \times q$ 的随机误差阵， X 和 Z 分别为 $n \times p$ 和 $k \times q$ 的已知设计阵， B 为 $p \times k$ 的未知参数阵， Δ 和 Σ 分别为已知的 q 阶和 n 阶对称非负定阵. $\mathrm{Vec}(\varepsilon)$ 为把 ε 按列拉直得到的一列向量， $\Delta \otimes \Sigma$ 表示 Δ 与 Σ 的 Kronecker 乘积， $E(\cdot)$ 和 $V(\cdot)$ 分别表示随机向量的期望和协方差阵.

模型 (1.1) 的预测问题就是要利用已观察值矩阵 Y 预测未观察值矩阵 Y_0, 这里 Y_0 满足：

$$M_0: \quad \begin{cases} Y_0 = X_0BZ_0 + \varepsilon_0, \\ E(\mathrm{Vec}(\varepsilon_0)) = 0, \\ V(\mathrm{Vec}(\varepsilon_0)) = \Delta \otimes \Sigma_0, \\ E(\mathrm{Vec}(\varepsilon)\mathrm{Vec}'(\varepsilon_0)) = \Delta \otimes V, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 X_0 和 Z_0 分别为 $m \times p$ 和 $k \times q$ 的已知矩阵， Σ_0 为已知的 m 阶对称非负定矩阵， ε_0 为 $m \times q$ 的随机误差阵， V 为 $n \times m$ 的已知矩阵.

在通常情况下，我们要研究 Y_0 的线性函数 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的最优预测问题，这里 A 为 $m \times q$ 的已知矩阵. 考虑形如

$$\hat{Y} = \mathrm{tr}(F'Y) \tag{1.3}$$

的线性预测函数，其中 F 为 $n \times q$ 的矩阵.

定义 1.1[1] 对于生长曲线模型 (1.1), 若 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 存在形如 (1.3) 的无偏预测函数，则称 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 为线性可预测变量.

收稿日期: 2005-12-05; **接受日期**: 2006-07-06
基金项目: 贵州省省长基金 (20040706).

引理 1.1[1] $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 为线性可预测变量，当且仅当 $(Z_0 \otimes X_0')\mathrm{Vec}(A) \in \mu(Z \otimes X')$.

定义 1.2[1] 称预测函数 $\hat{Y}$ 为线性可预测变量 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的最优线性无偏预测函数 (BLUP), 若 $\hat{Y}$ 在形如 (1.3) 的无偏预测函数中使得风险函数

$$R(\hat{Y}) = E(\hat{Y} - \mathrm{tr}(A'Y_0))^2$$

达到最小.

在设计阵和协方差阵满足一定秩的条件下，文献 [2–7] 对一维有限总体中回归系数的最优预测问题作了较系统研究，先后得到了贝叶斯预测，极大极小预测，稳健线性预测，简单投影预测以及最优线性无偏预测 (BLUP) 等．对于一般生长曲线模型，文献 [1] 研究了线性可预测变量 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的 BLUP . 本文进一步研究 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的 BLUP 的稳健性，得到了 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的 BLUP 关于协方差阵具有稳健性的充要条件．所谓 BLUP 的稳健性，是指当一般生长曲线模型的协方差阵具有微小的扰动后，原来的 BLUP 仍保持其优良性．我们把模型 M_1 扰动后的协方差阵记为 $\Delta \otimes \Sigma_1$, 对应的模型记为 M_2, 即

$$M_2: \quad \begin{cases} Y = XBZ + \varepsilon_1, \\ E(\mathrm{Vec}(\varepsilon_1)) = 0, \\ V(\mathrm{Vec}(\varepsilon_1)) = \Delta \otimes \Sigma_1, \end{cases} \tag{1.4}$$

模型 M_0 相应的转变为：

$$M_0': \quad \begin{cases} Y_0 = X_0BZ_0 + \varepsilon_0, \\ E(\mathrm{Vec}(\varepsilon_0)) = 0, \\ V(\mathrm{Vec}(\varepsilon_0)) = \Delta \otimes \Sigma_0, \\ E(\mathrm{Vec}(\varepsilon_1)\mathrm{Vec}'(\varepsilon_0)) = \Delta \otimes V_1, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 V_1 为 $n \times m$ 的已知矩阵．由于文章需要，特引进如下记号：

设 A 是一个矩阵， $\mu(A)$ 表示由 A 的列向量张成的线性子空间， P_A 为向 $\mu(A)$ 的正交投影阵， $N_A = I - P_A$, A^- 表示 A 的任一广义逆， $\mathrm{tr}(A)$ 表示 A 的迹， $A > 0 (\geq 0)$ 表示 A 为对称正定 (非负定) 阵， $A \geq B$ 表示 $A - B \geq 0$, $A \geq 0$, $B \geq 0$.

2 主要结果

引理 2.1 对于模型 M_2, 若 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 是线性可预测变量, 则其所有 BLUP 可表示为 $d(Y) = \mathrm{tr}(F'Y)$, 其中 F 满足 $\mathrm{Vec}(F) = \mathrm{Vec}(F_0) + (N_{Z'\otimes X} - P_G)M$, 这里 M 是任意的 nq 维向量, $G = N_{Z'\otimes X}(\Delta \otimes \Sigma_1)^{\frac{1}{2}}$, $\mathrm{Vec}(F_0) = (T^- - T^-(Z' \otimes X)Q^-(Z \otimes X')T^-)(\Delta \otimes V_1)\mathrm{Vec}(A) + T^-(Z' \otimes X)Q^-(Z_0 \otimes X_0')\mathrm{Vec}(A)$, 这里 $T = \Delta \otimes \Sigma_1 + Z'Z \otimes XX'$, $Q = (Z \otimes X')T^-(Z' \otimes X)$.

证明 由文献 [1] 的定理 2.1 可知 $\mathrm{tr}(F_0'Y)$ 为 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的 $BLUP$. 由于 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 是线性可预测变量，所以 $(Z_0 \otimes X_0')\mathrm{Vec}(A) \in \mu(Z \otimes X')$, 从而对任一 nq 维向量 M, 有

$$(Z \otimes X')\mathrm{Vec}(F) = (Z_0 \otimes X_0')\mathrm{Vec}(A),$$

且

$$\mathrm{Vec}'(F - F_0)(\Delta \otimes \Sigma_1)\mathrm{Vec}(F - F_0) = M'(N_{Z'\otimes X} - P_G)(\Delta \otimes \Sigma_1)(N_{Z'\otimes X} - P_G)M = 0.$$

由以上两式及文献 [1] 中定理 2.1 的证明过程可知 $\mathrm{tr}(F'Y)$ 是 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的 BLUP.

另一方面，由文献 [1] 可知，若 $\mathrm{tr}(F'Y)$ 是 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的一个 BLUP, 当且仅当

$$\begin{cases} (Z_0 \otimes X_0')\mathrm{Vec}(A) = (Z \otimes X')\mathrm{Vec}(F), \\ \mathrm{Vec}'(F - F_0)(\Delta \otimes \Sigma_1)\mathrm{Vec}(F - F_0) = 0. \end{cases}$$

从而 $\mathrm{Vec}'(F - F_0)(Z' \otimes X) = 0$, 故

$$\mathrm{Vec}(F - F_0) = N_{Z' \otimes X}\mathrm{Vec}(F - F_0), \tag{2.1}$$

又

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Vec}'(F - F_0)N_{Z' \otimes X}(\Delta \otimes \Sigma_1)\mathrm{Vec}(F - F_0) \\ &= \mathrm{Vec}'(F - F_0)N_{Z' \otimes X}(\Delta \otimes \Sigma_1)N_{Z' \otimes X}\mathrm{Vec}(F - F_0). \end{aligned}$$

这等价于

$$\mathrm{Vec}'(F - F_0)G = 0. \tag{2.2}$$

由 (2.1) 和 (2.2) 式可知

$$\mathrm{Vec}'(F - F_0) = \mathrm{Vec}'(F - F_0)N_{Z' \otimes X} = \mathrm{Vec}'(F - F_0)(N_{Z' \otimes X} - P_G).$$

即

$$\mathrm{Vec}(F) = \mathrm{Vec}(F_0) + (N_{Z' \otimes X} - P_G)\mathrm{Vec}(F - F_0) \cong \mathrm{Vec}(F_0) + (N_{Z' \otimes X} - P_G)M.$$

这里 $M = \mathrm{Vec}(F - F_0)$. 综上所述，引理的结论成立.

注 2.1 对于模型 M_1, 有和引理 2.1 完全类似的结论.

引理 2.2 对于模型 M_1 或 M_2, 若 $\mathrm{tr}(C'Y)$ 是线性可预测变量 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的一个无偏预测，则 $\mathrm{tr}(C'Y)$ 为其 BLUP 的充要条件是：对零的任一无偏预测 $\mathrm{tr}(D'Y)$, 有

$$E((\mathrm{tr}(C'Y) - \mathrm{tr}(A'Y_0))'\mathrm{tr}(D'Y)) = 0.$$

证明 *充分性*. 由 $\mathrm{tr}(C'Y)$ 为线性可预测变量 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的一个无偏预测可知，对 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的任一无偏预测 $\mathrm{tr}(T'Y)$, T 必有形式：

$$T = C + D, \tag{2.3}$$

其中 $\mathrm{Vec}(D) = N_{Z' \otimes X}H$, H 是任意的 nq 维向量. 易知 $\mathrm{tr}(D'Y)$ 是零的线性无偏预测. 反之，零的任一无偏预测 $\mathrm{tr}(D'Y)$, 都满足 $(Z \otimes X')\mathrm{Vec}(D) = 0$. 因此 D 可以表述成上述形式，由 (2.3) 式可知

$$\begin{aligned} &E((\mathrm{tr}(T'Y) - \mathrm{tr}(A'Y_0))'(\mathrm{tr}(T'Y) - \mathrm{tr}(A'Y_0))) \\ &\quad = E((\mathrm{tr}(C'Y) - \mathrm{tr}(A'Y_0))'(\mathrm{tr}(C'Y) - \mathrm{tr}(A'Y_0))) + E((\mathrm{tr}(D'Y))'\mathrm{tr}(D'Y)) + \\ &\qquad 2E((\mathrm{tr}(C'Y) - \mathrm{tr}(A'Y_0))'\mathrm{tr}(D'Y)) \\ &\quad \geq E((\mathrm{tr}(C'Y) - \mathrm{tr}(A'Y_0))'(\mathrm{tr}(C'Y) - \mathrm{tr}(A'Y_0))). \end{aligned} \tag{2.4}$$

上式表明充分性成立.

必要性. 现设存在零的无偏预测 $\mathrm{tr}(D_0'Y)$, 使得 $E((\mathrm{tr}(C'Y)-\mathrm{tr}(A'Y_0))'\mathrm{tr}(D_0'Y))\neq 0$. 令 $k=E((\mathrm{tr}(C'Y)-\mathrm{tr}(A'Y_0))'\mathrm{tr}(D_0'Y))$, 不妨设 $k<0$ (若 $k>0$, 取 $-D_0$ 代替 D_0, 即化为 $k<0$ 的情形). 用 $D=bD_0$ 代入 (2.4) 式, 则 (2.4) 式右边变为 b 的一个二次三项式, 而一次项系数为负数, 故存在 b_0 使得 (2.4) 式后两项为负数. 于是, 对 $T_0=C+b_0D_0$ 必有

$$\begin{aligned}&E((\mathrm{tr}(T_0'Y)-\mathrm{tr}(A'Y_0))'(\mathrm{tr}(T_0'Y)-\mathrm{tr}(A'Y_0)))\\&\quad<E((\mathrm{tr}(C'Y)-\mathrm{tr}(A'Y_0))'(\mathrm{tr}(C'Y)-\mathrm{tr}(A'Y_0))),\end{aligned}$$

这与 $\mathrm{tr}(C'Y)$ 是 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的 BLUP 矛盾. 引理证毕.

定理 2.1 若 $(Z_0\otimes X_0')\mathrm{Vec}(A)\in\mu(Z\otimes X')$, 则对每一个线性可预测变量 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$, 其在 M_2 下的 BLUP 也是模型 M_1 下的 BLUP 的充要条件是

(1) $N_{Z'\otimes X}(\Delta\otimes\Sigma)\mathrm{Vec}(F_0)=N_{Z'\otimes X}(\Delta\otimes V)\mathrm{Vec}(A)$;

(2) $N_{Z'\otimes X}(\Delta\otimes\Sigma)(N_{Z'\otimes X}-P_G)=0$.

特别地, 当 $V=0$ 上述充要条件就退化为 $N_{Z'\otimes X}(\Delta\otimes\Sigma)(N_{Z'\otimes X}-P_G)=0$.

证明 由引理 2.1 可知, 在模型 M_2 下, $\mathrm{tr}(F'Y)$ 是 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的所有 BLUP, 其中 F 满足 $\mathrm{Vec}(F)=\mathrm{Vec}(F_0)+(N_{Z'\otimes X}-P_G)M$, 这里 M 是任意的 nq 维向量, 由引理 2.2 可知, $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 在模型 M_1 下的 BLUP 必是 M_2 下的 BLUP 的充要条件是: 在模型 M_1 下

$$E((\mathrm{tr}(F'Y)-\mathrm{tr}(A'Y_0))'\mathrm{tr}(D'Y))=0. \tag{2.5}$$

上式可变为

$$E((\mathrm{Vec}'(F)\mathrm{Vec}(Y)-\mathrm{Vec}'(A)\mathrm{Vec}(Y_0))'(\mathrm{Vec}'(D)\mathrm{Vec}(Y)))=0.$$

由此可知:

$$E((\mathrm{Vec}'(\varepsilon)\mathrm{Vec}(F_0)+\mathrm{Vec}'(\varepsilon)(N_{Z'\otimes X}-P_G)M-\mathrm{Vec}'(\varepsilon_0)\mathrm{Vec}(A))(H'N_{Z'\otimes X}\mathrm{Vec}(\varepsilon)))=0.$$

由文献 [8] 中定理 3.1, 上式等价于

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}(N_{Z'\otimes X}(\Delta\otimes\Sigma)\mathrm{Vec}(F_0)H'+N_{Z'\otimes X}(\Delta\otimes\Sigma)(N_{Z'\otimes X}-P_G)MH'-\\&\quad N_{Z'\otimes X}(\Delta\otimes V)\mathrm{Vec}(A)H')=0.\end{aligned}$$

对一切 nq 维向量 M 和 H 成立, 这等价于

(1) $N_{Z'\otimes X}(\Delta\otimes\Sigma)\mathrm{Vec}(F_0)=N_{Z'\otimes X}(\Delta\otimes V)\mathrm{Vec}(A)$;

(2) $N_{Z'\otimes X}(\Delta\otimes\Sigma)(N_{Z'\otimes X}-P_G)=0$.

特别地, 当 $V=0$, $N_{Z'\otimes X}(\Delta\otimes\Sigma)(N_{Z'\otimes X}-P_G)=0$. 自然成立.

注 2.2 若把模型 M_1 和 M_2 中的 $\Delta\otimes\Sigma$ 和 $\Delta\otimes\Sigma_1$ 分别改为 $\sigma^2\Delta\otimes\Sigma$ 和 $\sigma^2\Delta\otimes\Sigma_1$ ($\sigma^2>0$ 为参数), 则本文中的结论均成立, 且证明方法类似.

例 设一般生长曲线模型 M_1 及预测模型 M_0 为

$$M_1:\quad\left\{\begin{array}{l}Y=XBZ+\varepsilon,\\E(\mathrm{Vec}(\varepsilon))=0,\\V(\mathrm{Vec}(\varepsilon))=\sigma^2\Delta\otimes I_n,\end{array}\right.\qquad\text{及}\quad M_0:\quad\left\{\begin{array}{l}Y_0=X_0BZ_0+\varepsilon_0,\\E(\mathrm{Vec}(\varepsilon_0))=0,\\V(\mathrm{Vec}(\varepsilon_0))=\sigma^2\Delta\otimes\Sigma_0,\\E(\mathrm{Vec}(\varepsilon)\mathrm{Vec}'(\varepsilon_0))=\sigma^2\Delta\otimes V.\end{array}\right.$$

在实际抽样中，为简单计，对协方差阵常常采用这种假设．但对应的实际模型为

$$M_2:\quad \begin{cases} Y=XBZ+\varepsilon_1, \\ E(\mathrm{Vec}(\varepsilon_1))=0, \\ V(\mathrm{Vec}(\varepsilon_1))=\sigma^2\Delta\otimes\Sigma_1, \end{cases} \quad \text{及} \quad M_0':\quad \begin{cases} Y_0=X_0BZ_0+\varepsilon_0, \\ E(\mathrm{Vec}(\varepsilon_0))=0, \\ V(\mathrm{Vec}(\varepsilon_0))=\sigma^2\Delta\otimes\Sigma_0, \\ E(\mathrm{Vec}(\varepsilon_1)\mathrm{Vec}'(\varepsilon_0))=\sigma^2\Delta\otimes V_1. \end{cases}$$

我们所感兴趣的问题是在什么条件下, 对线性可预测变量 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$, 在模型 M_1 下的 BLUP 也是其在 M_2 下的 BLUP.

事实上，由注 2.2 和引理 2.1 可知在模型 M_1 下 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的 BLUP 为

$$d(Y)=\mathrm{tr}(F_0'Y),$$

其中 F_0 满足

$$\begin{aligned}\mathrm{Vec}(F_0)=&(T^- - T^-(Z'\otimes X)Q^-(Z\otimes X')T^-)(\Delta\otimes V)\mathrm{Vec}(A)+ \\ &T^-(Z'\otimes X)Q^-(Z_0\otimes X_0')\mathrm{Vec}(A),\end{aligned}$$

$$T=\Delta\otimes I_n+Z'Z\otimes XX',\quad Q=(Z\otimes X')T^-(Z'\otimes X).$$

由注 2.2 和定理 2.1 易知，上式也为 M_2 下 $\mathrm{tr}(A'Y_0)$ 的一个 BLUP, 当且仅当下列条件成立.

$$\begin{cases} N_{Z'\otimes X}(\Delta\otimes I_n)\mathrm{Vec}(F_0)=N_{Z'\otimes X}(\Delta\otimes V)\mathrm{Vec}(A), \\ N_{Z'\otimes X}(\Delta\otimes I_n)(N_{Z'\otimes X}-P_G)=0. \end{cases}$$

由此可见，只要 Σ_1 满足上式，而不管 V_1 如何，均能达到要求.

3 结论与展望

对预测稳健性的研究，其意义在于：

(1) 我们所找出的解，对于原来建立的模型是合理的，即使不是最优的，也是相当好的；

(2) 如果真正的模型与原来所建立的模型有较小的偏离，则对应的解具有较大的稳定性；

(3) 即使模型有较大的偏离，也不会造成灾难性的后果.

本文讨论的是协方差阵具有微小扰动后，预测是否仍保持其优良性，这个问题条件是否存在，如果存在，是否唯一的问题，给出了一个较为完满的结论．但这个扰动有多大，没有给出一个具体的判断准则．其次，举例说明，即计算机仿真，作者工作做得不够，只给出了一个理论实例．上述两点都需在以后的研究工作中加强和完善.

参考文献：

[1] 喻胜华. 一般生长曲线模型中的最优预测 [J]. 中南大学学报 (自然科学版), 博士后专辑, 2004, **10**: 280–284. YU Sheng-hua. *Optimal prediction in the general growth curve model* [J]. J. Central South University Natur. Sci., Post-doctoral Volume, 2004, **10**: 280–284. (in Chinese)

[2] PEREIRA C A B, RODRIGUES J. *Robust linear prediction in finite populations* [J]. Internat. Statist. Rev., 1983, **51**(3): 293–300.

[3] BOLFARINE H, PEREIRA C A B, RODRIGUES J. *Robust linear prediction in finite populations: a Bayesian perspective* [J]. Sankhya Ser. B, 1987, **49**(1): 23–35.

[4] BOLFARINE H, RODRIGUES J. *On the simple projection predictor in finite populations* [J]. Austral. J. Statist., 1988, **30**(3): 338–341.
[5] BOLFARINE H, ZACKS S. *Bayes and minimax prediction in finite populations* [J]. J. Statist. Plann. Inference, 1991, **28**(2): 139–151.
[6] BOLFARINE H, ZACKS S, ELIAN S N. et al. *Optimal prediction of the finite populations regression coefficient* [J]. Sankhya Ser. B, 1994, **56**(1): 1–10.
[7] RODRIGUES J, BOLFARINE H, ROGAKTO A. *A general theory of prediction in finite populations* [J]. Internat. Statist. Rev., 1985, **53**(3): 239–254.
[8] 王松桂. 线性模型的理论及其应用 [M]. 合肥：安徽教育出版社， 1980.
WANG Song-gui. *Linear Model Theory and Its Applications* [M]. Hefei: Anhui Education Press, 1980. (in Chinese)

Robustness of Optimal Prediction in the General Growth Curve Model

YUAN Quan-long, ZHANG Zhu-hong
(Department of Mathematics, Guizhou University, Guizhou 550025, China)

Abstract: Robustness of the best linear unbiased predictor in the general growth curve model is investigated. Necessary and sufficient conditions for the predictor of linear predictable variable to be robust with respect to covariance matrices are obtained.

Key words: growth curve model; linear predictable variable; best linear unbiased predictor; robustness.