文章编号: 1000-341X(2007)04-0883-06 **文献标识码**: **A**

L_p 空间修正插值多项式的逼近

吴晓红 [1], 卢志康 [2]
(1. 杭州万向职业技术学院基础部, 浙江 杭州 310023; 2. 杭州师范学院数学系, 浙江 杭州 310012)
(E-mail: wx-wxh@126.com)

摘 要: 本文考虑了函数 $f \in L_p[0,2\pi]$, $1 \le p < \infty$ 的特定的修正插值多项式, 并给出了插值多项式对函数 f 的逼近速度的估计. 本文的估计改进了 Metelichenko[5] 最近的结果.

关键词: 修正插值多项式; L_p 空间; 逼近速度.
MSC(2000): 41A05
中图分类: O174.42

1 引 言

设 f 是 2π 周期的连续函数, 用在等距结点 $x_k = x_0 + 2k\pi/(2n+1), k = 0,1,\ldots,2n$ 上的三角插值多项式

$$L_n(x,f) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k)D_n(x-x_k), \tag{1}$$

其中 $D_n(x)$ 是 Dirichlet 核, 对函数 f 的逼近问题已经研究的非常充分. 对于一致范数, 有

$$\|f - L_n(f)\|_C \le C\ln n E_n(f).$$

这个估计在连续函数的空间已经不能被改进了. 由于根据 Faber 定理, 插值多项式 $L_n(x,f)$ 对连续函数不能保证一致逼近, Bernstein[1](或文献 [2, p563]), 考虑了 $L_n(x,f)$ 的算术平均值:

$$P_{n,m}(x,f) = \frac{1}{m+1}\sum_{s=0}^{m} L_{n,s}(x,f) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k)F_m(x-x_k), \tag{2}$$

其中 $L_{n,s}(x,f)$ 是 $L_n(x,f)$ 的 $s = 0,1,\ldots,n$ 阶部分和, $F_m(x)$ 是 Fejér 核. Bernstein 证明当 n, m 无限增大的时候, 多项式 $P_{n,m}(x,f)$ 一致收敛于一个连续的 2π 周期函数.

当 $f(x)$ 是 L_p 空间中的函数时, 考虑 (1) 与 (2) 式中的插值多项式是无意义的. 为此, Kantorovich[3] 和 Lozinskin[4] 先后引入了下面的多项式:

$$Q_n(x,f) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} D_n(x-x_k)\frac{1}{\delta_n}\int_{{\delta_n}^{(k)}} f(t)\mathrm{d}t, \tag{3}$$

这里 ${\delta_n}^{(k)} = [x_k, x_k+\delta_n]$, $\delta_n = 2\pi/(2n+1)$. 在以上的工作中, 相应多项式对原函数 f 的收敛性得到确定, 但逼近速度没有被考虑. 最近, Metelichenko[5] 结合了 Bernstein 和 Lozinskin 的

收稿日期: 2005-07-14; **接受日期**: 2006-07-02

思想，考虑了多项式 $Q_n(x,f)$ 的 Cesáro 平均，即

$$U_{n,m}^{\alpha}(x,f)=\frac{1}{A_m^{\alpha}}\sum_{s=0}^{m}A_{m-s}^{\alpha-1}Q_{n,s}(x,f)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}K_m^{\alpha}(x-x_k)\frac{1}{\delta_n}\int_{\delta_n{}^{(k)}}f(t)\mathrm{d}t, \tag{4}$$

其中 $Q_{n,s}(x,f)$ 是 $Q_n(x,f)$ 的 $s=0,1,\dots,n$ 阶部分和， K_m^{α} 是方法 $(C.\alpha)$ 的核．他建立了 $U_{n,m}^{\alpha}(x,f)$ 对 $f\in L_p[0,2\pi]$, $1\le p\le\infty$ 的收敛性和逼近速度的估计:

$$\|U_{n,m}^{\alpha}(f)-f\|_p\le C(\alpha)\omega(\frac{\ln(m+2)}{m+1},f)_p,\quad \alpha\ge 1,\ m\ge 0. \tag{5}$$

在本篇文章中，我们改进了上述估计.

2 主要结果

定理 1 设 $f\in L_p[0,2\pi]$, $1\le p\le\infty$, $\alpha\ge 1$, $n\ge m\ge 0$, 则

$$\|U_{n,m}^{\alpha}(f)-f\|_p\le\frac{C(\alpha)}{m+1}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{2\pi}\frac{\omega(t,f)_p}{t^2}\mathrm{d}t. \tag{6}$$

若 (6) 式成立，则有

$$\begin{aligned}\|U_{n,m}^{\alpha}(f)-f\|_p&\le\frac{C(\alpha)}{m+1}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{2\pi}\frac{\omega(t,f)_p}{t^2}\mathrm{d}t\\&\le\frac{C(\alpha)}{m+1}\omega(\frac{ln(m+2)}{m+1},f)_p\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{2\pi}\frac{\frac{m+1}{ln(m+2)}t+1}{t^2}\mathrm{d}t\\&\le C_1(\alpha)\omega(\frac{ln(m+2)}{m+1},f)_p,\end{aligned}$$

即 (5) 式也成立．而当 $\omega(t)=t^{\beta}$, $0<\beta<1$ 时，有

$$\|U_{n,m}^{\alpha}(f)-f\|_p\le\frac{C(\alpha)}{m+1}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{2\pi}\frac{1}{t^{2-\beta}}\mathrm{d}t\le C(\alpha)\frac{1}{(m+1)^{\beta}}, \tag{7}$$

这个估计式明显优于 (5) 式.

3 有关 $(C.\alpha)$ 平均的一些事实

设

$$A_m^{\alpha}=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m)}{m!},\quad \alpha\ne -1,-2,\dots.$$

对于 A_m^{α}, 则有以下关系式 (见文献 [6, 第一卷， p77]):

$$C_1(\alpha)\le\frac{A_m^{\alpha}}{(m+1)^{\alpha}}\le C_2(\alpha),\quad \alpha>-1,\ m\ge 0, \tag{8}$$

$$A_m^{\alpha+h}=\sum_{s=0}^{m}A_s^{\alpha}A_{m-s}^{h-1}. \tag{9}$$

特别的， $A_m^\alpha = \sum_{s=0}^m A_s^{\alpha-1}$.

记 U_m 为序列 $\sum_{v=0}^\infty u_v$ 的部分和，如果序列的 Cesáro 平均

$$\sigma_m^\alpha = \frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{s=0}^m A_{m-s}^{\alpha-1}U_s, \tag{10}$$

当 $m\to\infty$ 时收敛于 U, 则称序列 $\sum_{v=0}^\infty u_v(C.\alpha)(\alpha>-1)$ 可和于 U.

若一个序列是 $(C.\alpha)(\alpha>-1)$ 可和的，则它也 $(C.\alpha+h)$ 可和于同一和数，其中 $h>0$, 并有以下的等式：

$$\sigma_m^{\alpha+h} = \frac{1}{A_m^{\alpha+h}}\sum_{s=0}^m A_{m-s}^{h-1}A_s^\alpha\sigma_s^\alpha,\quad \alpha>-1, h>0. \tag{11}$$

如果用多项式 $Q_n(x,f)$ 的 $s=0,1,\dots,n$ 阶部分和，即

$$Q_{n,s}(x,f) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} D_s(x-x_k)\frac{1}{\delta_n}\int_{\delta_n{}^{(k)}} f(t)\mathrm{d}t, \tag{12}$$

替代 (10) 式中的 U_s, 就得到了对 $Q_n(x,f)$ 的 Cesáro 平均．根据 (11) 式，有

$$U_{n,m}^{\alpha+h}(x,f) = \frac{1}{A_m^{\alpha+h}}\sum_{s=0}^m A_{m-s}^{h-1}A_s^\alpha U_{n,s}^\alpha(x,f),\quad \alpha>-1,\ h>0. \tag{13}$$

由 (4) 和 (12) 式可知，方法 $(C.\alpha)$ 的核为

$$K_m^\alpha(x) = \frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{s=0}^m A_{m-s}^{\alpha-1}D_s(x),$$

$U_{n,m}^\alpha(x,f)$ 的阶数不会超过 $K_m^\alpha(x)$ 的阶数 m 且 $m\le n$. 因为 $m<2n+1$, 有 (见文献 [6, 第二卷， p22]):

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} K_m^\alpha(x-x_k) \equiv 1. \tag{14}$$

定理证明的关键是 $\alpha=1$ 时， K_m^1 的估计．如所周知

$$K_m^1 = F_m(x) = \frac{1}{2(m+1)}\left(\frac{\sin(m+1)(x/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$$

是 Fejér 核，它满足以下的不等式 (见文献 [6, 第一卷， p90]):

$$|F_m(x)| \le m+1, \tag{15}$$

$$|F_m(x)| \le \frac{C}{(m+1)x^2},\quad 0<|x|\le\pi. \tag{16}$$

4 定理证明

先考虑 $\alpha=1$ 的情况，由 (11) 与 (14) 式，得

$$|U_{n,m}^1(x,f)-f(x)| \le \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} F_m(x-x_k)\frac{1}{\delta_n}\int_{\delta_n{}^{(k)}} |f(t)-f(x)|\mathrm{d}t.$$

对所有的 $m\le n$, 取 $\Delta_m=2\pi/(m+1)$, 把上面的和式拆成两部分 $S_1(x),S_2(x)$:

$$S_1(x)=\frac{2}{2n+1}\sum_{|x-x_k|<\Delta_m},\quad S_2(x)=\frac{2}{2n+1}\sum_{\Delta_m\le|x-x_k|\le\pi}.$$

应用 (15) 式，得

$$\begin{aligned}S_1(x)&=\frac{2}{2n+1}\sum_{|x-x_k|<\Delta_m}|F_m(x-x_k)|\frac{1}{\delta_n}\int_{\delta_n{}^{(k)}}|f(t)-f(x)|\mathrm{d}t\\&\le\frac{m+1}{\pi}\sum_{|x-x_k|<\Delta_m}\int_{\delta_n{}^{(k)}}|f(t)-f(x)|\mathrm{d}t\\&\le\frac{2}{\Delta_m}\int_{x-\Delta_m}^{x+\Delta_m+\delta_n}|f(t)-f(x)|\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\Delta_m}\int_{-\Delta_m}^{2\Delta_m}|f(x+t)-f(x)|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

对积分应用 Minkowski 不等式，得

$$\begin{aligned}\|S_1(x)\|_p&\le\frac{2}{\Delta_m}\int_{-\Delta_m}^{2\Delta_m}\|f(x+t)-f(x)\|_p\mathrm{d}t\le\frac{4}{\Delta_m}\int_0^{2\Delta_m}\omega(t,f)_p\mathrm{d}t\\&\le\frac{4}{\Delta_m}2\Delta_m\omega(2\Delta_m,f)_p\le 8(4\pi+1)\omega(\frac{1}{m+1},f)_p.\end{aligned}\tag{17}$$

当 $m=0$ 时， $S_2(x)\equiv0$. 当 $m\ge1$ 时，选择 $j=j(m)\in N$, 使得 $2^{j-1}\Delta_m\le\pi<2^j\Delta_m$.

$$\begin{aligned}S_2(x)=&\frac{2}{2n+1}\sum_{\Delta_m\le|x-x_k|\le\pi}F_m(x-x_k)\frac{1}{\delta_n}\int_{\delta_n^{(k)}}|f(t)-f(x)|\mathrm{d}t\\\le&\frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{2^i\Delta_m\le|x-x_k|\le2^{i+1}\Delta_m}|F_m(x-x_k)|\frac{1}{\delta_n}\int_{\delta_n^{(k)}}|f(t)-f(x)|\mathrm{d}t\\\le&\frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{j-1}|F_m(x-x_k)|\frac{1}{\delta_n}\int_{x-2^{i+1}\Delta_m}^{x-2^i\Delta_m+\delta_n}|f(t)-f(x)|\mathrm{d}t+\\&\frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{j-1}|F_m(x-x_k)|\frac{1}{\delta_n}\int_{x+2^i\Delta_m}^{x+2^{i+1}\Delta_m+\delta_n}|f(t)-f(x)|\mathrm{d}t\\=&S_2'(x)+S_2''(x).\end{aligned}$$

应用 (16) 式，得

$$\begin{aligned}S_2'(x)&\le\frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{\pi^2}{2(m+1)(2^i\Delta_m)^2}\frac{1}{\delta_n}\int_{x-2^{i+1}\Delta_m}^{x-2^i\Delta_m+\delta_n}|f(t)-f(x)|\mathrm{d}t\\&\le\sum_{i=0}^{j-1}\frac{\Delta_m}{(2^{i+1}\Delta_m)^2}\int_{2^i\Delta_m-\delta_n}^{2^{i+1}\Delta_m}|f(x-t)-f(x)|\mathrm{d}t\\&\le\sum_{i=0}^{j-1}\Delta_m\int_{2^i\Delta_m-\delta_n}^{2^{i+1}\Delta_m}\frac{|f(x-t)-f(x)|}{t^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

求和号下的各段积分区间有小部分重叠，但重叠部分重叠不超过两次，所以

$$S_2'(x) \leq 2\Delta_m \int_{\frac{1}{2}\Delta_m}^{2^j\Delta_m} \frac{|f(x-t)-f(x)|}{t^2}\mathrm{d}t,$$

对积分应用 Minkowski 不等式，得

$$\begin{aligned}\|S_2'(x)\|_p &\leq 2\Delta_m \int_{\frac{1}{2}\Delta_m}^{2^j\Delta_m} \frac{\|f(x-t)-f(x)\|_p}{t^2}\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{4\pi}{m+1}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{2\pi} \frac{\omega(t,f)_p}{t^2}\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{18}$$

同理，可计算 $S_2''(x)$,

$$\begin{aligned}S_2''(x) &\leq \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\Delta_m}{(2^{i+1}\Delta_m)^2}\int_{x+2^i\Delta_m}^{x+2^{i+1}\Delta_m+\delta_n} |f(t)-f(x)|\mathrm{d}t \\ &\leq \sum_{i=0}^{j-1} \frac{4\Delta_m}{(2^{i+2}\Delta_m)^2}\int_{2^i\Delta_m}^{2^{i+1}\Delta_m+\delta_n} |f(x+t)-f(x)|\mathrm{d}t \\ &\leq \sum_{i=0}^{j-1} 4\Delta_m \int_{2^i\Delta_m}^{2^{i+1}\Delta_m+\delta_n} \frac{|f(x+t)-f(x)|}{t^2}\mathrm{d}t \\ &\leq 8\Delta_m \int_{\Delta_m}^{2^j\Delta_m+\delta_n} \frac{|f(x+t)-f(x)|}{t^2}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

对积分应用 Minkowski 不等式，得

$$\begin{aligned}\|S_2''(x)\|_p &\leq 8\Delta_m \int_{\Delta_m}^{2\pi} \frac{\|f(x+t)-f(x)\|_p}{t^2}\mathrm{d}t \leq 8\Delta_m \int_{\Delta_m}^{2\pi} \frac{\omega(t,f)_p}{t^2}\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{16\pi}{m+1}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{2\pi} \frac{\omega(t,f)_p}{t^2}\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{19}$$

这样，对任意的 $0 \leq m \leq n$, 结合 (17)–(19) 式，得到

$$\begin{aligned}&\|U_{n,m}^1(x,f)-f(x)\|_p \leq \|S_1(x)\|_p + \|S_2'(x)\|_p + \|S_2''(x)\|_p \\ &\leq C\omega(\frac{1}{m+1},f)_p + \frac{C_1}{m+1}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{2\pi} \frac{\omega(t,f)_p}{t^2}\mathrm{d}t + \frac{C_2}{m+1}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{2\pi} \frac{\omega(t,f)_p}{t^2}\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{C_3}{m+1}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{2\pi} \frac{\omega(t,f)_p}{t^2}\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{20}$$

对 $\alpha > 1$, 由 (9) 和 (13) 式，得出

$$U_{n,m}^\alpha(x,f) = \frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{s=0}^{m} A_{m-s}^{\alpha-2}A_s^1 U_{n,s}^1(x,f),$$

$$U_{n,m}^\alpha(x,f) - f(x) = \frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{s=0}^{m} A_{m-s}^{\alpha-2}A_s^1 [U_{n,s}^1(x,f) - f(x)].$$

再应用 (8) 和 (20) 式，得到

$$\begin{aligned}\|U_{n,m}^{\alpha}(x,f)-f(x)\|_p &\leq \frac{C(\alpha)}{(m+1)^{\alpha}}\sum_{s=0}^{m}(m-s+1)^{\alpha-2}(s+1)\|U_{n,s}^{1}(x,f)-f(x)\|_p\\ &\leq \frac{C(\alpha)}{(m+1)^{\alpha}}\sum_{s=0}^{m}(m-s+1)^{\alpha-2}(s+1)\frac{C}{s+1}\int_{\frac{\pi}{s+1}}^{2\pi}\frac{\omega(t,f)_p}{t^2}\mathrm{d}t\\ &\leq \frac{C_1(\alpha)}{(m+1)^{\alpha}}\int_{\frac{\pi}{s+1}}^{2\pi}\frac{\omega(t,f)_p}{t^2}\mathrm{d}t\sum_{s=0}^{m}(m-s+1)^{\alpha-2}\\ &\leq \frac{C_2(\alpha)}{(m+1)^{\alpha}}\int_{\frac{\pi}{s+1}}^{2\pi}\frac{\omega(t,f)_p}{t^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

定理 1 证毕. □

参考文献:

[1] BERNSTEIN S N. *On trigonometric Interpolation by the least-squares method* [J]. Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), 1934, **4**(1): 1–18.
[2] NATANSON I P. *Contrtuctive Theory of Functions* [M]. Gostekhizdat, Moscow, 1949. (in Russian)
[3] KANTOROVICH L V. *On some expansions in polynomials in the Bernshtein form.I* [J]. Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), 1930, **21**(1): 563–568.
[4] LOZINSKII S M. *Über interpolation* [J]. Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 1940, **8**(50): 1940. 57–68. (in German)
[5] METELICHENKO A B. *On approximation by modified interpolation polynomials in the spaces L_p* [J]. Ukrainian Math. J., 2004, **56**(1): 86–95.
[6] ZYGMUND A. *Trigonometric Series* [M]. London: Cambridge University Press, 1977.

On Approximation by Modified Interpolation Polynomials in Spaces L_p

WU Xiao-hong[1], *LU Zhi-kang*[2]
(1. Basic Courses Department, Hangzhou Wanxiang Polytechnic, Zhejiang 310023, China;
2. Department of Mathmatics, HangZhou Teacher's College, Zhejiang 310012, China)

Abstract: The paper deals with certain modified interpolation polynomials for functions in space $f\in L_p[0,2\pi]$, $1\leq p<\infty$. An estimate of the rate of approximation to a function f by these polynomials in terms of its modulus of continuity is obtained. This estimate improves essentially the result obtained by Metelichenko[5].

Key words: modified interpolation polynomials; space $L_p[0,2\pi]$; the rate of approximation.