第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0919-06 **文献标识码**: A

Banach 空间中非扩张映象不动点的黏性逼近

赵良才 [1], 张石生 [1,2]
(1. 宜宾学院数学系, 四川 宜宾 644000; 2. 四川大学数学系, 四川 成都 610064)
(E-mail: zhaolcyb@yahoo.com.cn)

摘 要: 设 E 是一致光滑的 Banach 空间, 其范数是一致 Gateaux 可微的; 设 C 是 E 之一非空闭凸子集, $f: C \to C$ 是压缩映象, $T: C \to C$ 是非扩张映象. 本文用黏性逼近方法证明了在较一般的条件下, 由 (1.6) 式定义的迭代序列 $\{x_n\}$ 的强收敛性. 本文推广和改进了一些近期结果.

关键词: 不动点; 压缩映象; 非扩张映象; 黏性逼近.
MSC(2000): 47H05; 47H09; 49M05
中图分类: O177.91

1 引言及预备知识

本文处处假定 E 是一实的 Banach 空间, E^* 是 E 的对偶空间, C 是 E 的非空闭凸子集, $F(T)$ 是映象 T 的不动点集, $J: E \to 2^{E^*}$ 是由下式定义的正规对偶映象:

$$J(x) = \{f \in E^* : \langle x, f\rangle = ||x|| \cdot ||f||, ||f|| = ||x||\}, \quad x \in E. \tag{1.1}$$

我们定义 $f: C \to C$ 为压缩映象, 如果存在常数 $\alpha \in (0,1)$, 使得

$$||f(x) - f(y)|| \le \alpha ||x - y||, \ \ \forall\, x, y \in C, \tag{1.2}$$

用 Π_C 表示 C 上一切压缩映象簇, 即

$$\Pi_C = \{f : f : C \to C\text{是压缩映象}\},$$

对任意 $f \in \Pi_C$, 在 C 中它有唯一的不动点.

定义 1 $T: C \to C$ 称为非扩张映象, 如果 $\forall x, y \in C$ 都有

$$||Tx - Ty|| \le ||x - y||,$$

记 $F(T) = \{x \in C : x = Tx\}$ 为 T 的不动点集, 本文以下均设 $F(T) \ne \phi$.

定义 2 设 $U = \{x \in E : ||x|| = 1\}$. E 的范数称为一致 Gateaux 可微的, 如果对每一 $y \in U$, 极限

$$\lim_{t\to 0} \frac{||x + ty|| - ||x||}{t}$$

对一切 $x \in U$ 一致地存在.

收稿日期: 2005-09-29; **接受日期**: 2006-07-02

命题 1[1] 如果 E 是一致光滑的 Banach 空间，则正规对偶映象 J 是单值的且在 E 的每一有界子集上由 E 的范数拓扑到 E^* 的范数拓扑一致连续的；如果 E 的范数是一致 Gateaux 可微的，则正规对偶映象 J 是单值的且在 E 的每一有界子集上由 E 的范数拓扑到 E^* 的弱 * 拓扑一致连续的.

对给定的 $t \in (0,1)$ 及 $f \in \Pi_C$, 定义映象 $T_t^f : C \to C$ 如下

$$T_t^f x = tf(x) + (1-t)Tx \quad \forall\, x \in C, \tag{1.3}$$

其中 T 为非扩张映象，在不致引起混淆的情况下，为简单起见，用 T_t 代替 T_t^f. 显然， T_t 是 C 上一压缩映象，由 Banach 压缩映象原理知 T_t 有唯一的不动点 z_t, 即 $z_t = T_t z_t \in C$, 因而 z_t 是方程

$$z_t = tf(z_t) + (1-t)Tz_t \tag{1.4}$$

的唯一解.

作为特例：给定 $u \in C$, 定义 $S_t : C \to C$ 为

$$S_t x = tu + (1-t)Tx \quad x \in C,$$

令 $z_t \in C$ 是 S_t 的唯一不动点，即 z_t 是方程

$$z_t = tu + (1-t)Tx \tag{1.5}$$

的唯一解.

对于 $\{z_t\}$ 的收敛性， 1967 年 Browder[2] 证明了下面结果：如果 E 是一 Hilbert 空间，则当 $t \to 0$ 时， z_t 强收敛于 T 之一不动点； 1980 年 Reich[3] 证明：如果 E 是一致光滑的 Banach 空间，则上述 Browder 的结论仍成立.

现在，我们考虑迭代序列 $\{x_n\}$:

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)Tx_n \end{cases} \tag{1.6}$$

它是 (1.4) 式的离散化，其中 $\{\alpha_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的序列.

考虑 (1.6) 式的特例：在 1967 年由 Halpern[4] 最先研究，他引入

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)Tx_n, \quad \forall\, n \geq 0, \tag{1.7}$$

其中 $u, x_0 \in C$ 是任意给定的点， $\{\alpha_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的序列，他证明：如果 $\{\alpha_n\}$ 满足某些条件，其中两个条件是:

(H_1) $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$;

(H_2) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$,

则序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 C 中之一不动点.

关于 (1.7) 式定义的序列的收敛性问题，已被许多学者在 Hilbert 空间和 Banach 空间的背景中做了广泛研究. 例如， Lions[5], Wittmann[7], Reich[11], Shioji 和 Takahashi[12], Xu[13,14] 及 Zhang[15] 等.

对于给定的非扩张映象选择其一特别的不动点的黏性逼近方法, 由 Moudafi[6] 提出, 在 Hilbert 空间中对隐和非隐的迭代序列 (1.4) 和 (1.6), 他证明了其强收敛．最近， Xu[10] 在一致光滑的 Banach 空间中，在 (H_1), (H_2) 和 (H_3) $\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$ 或 $\lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1}/\alpha_n)=1$ 的条件下，由 (1.6) 式定义的迭代序列强收敛.

本文是在一致光滑的 Banach 空间中和其范数一致 Gateaux 可微的 Banach 空间中，在较一般的条件下，证明 (1.6) 式定义的迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛．本文结果也改进和推广了文献 [5–7,10–15] 等文中的相应结果.

下面的引理在本文主要结果的证明中将起到关键作用.

引理 1.1[8] 设 $\{a_n\}$ 是非负实数列，使得

$$a_{n+1}\le(1-\lambda_n)a_n+b_n,\quad \forall\, n\ge 0,$$

其中 $\{\lambda_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的序列， $\{b_n\}$ 是一实数列，且 $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n=\infty$, $\limsup_{n\to\infty}b_n/\lambda_n\le 0$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|<\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

引理 1.2[9] 设 E 是一实 Banach 空间，$J:E\to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象, 则对任意的 $x,y\in E$ 有

$$||x+y||^2\le||x||^2+2\langle y,J(x+y)\rangle.$$

引理 1.3[10] 设 E 是一致光滑的 Banach 空间， C 是 E 的非空闭凸子集， $T:C\to C$ 是一非扩张映象且 $F(T)\ne\phi$, $f\in\Pi_C$, 则 (1.4) 式定义的迭代程序 $\{z_t\}$ 强收敛于 T 之一不动点. 如果定义 $Q:\Pi_C\to F(T)$, 即 $Q(f):=\lim_{t\to 0}z_t,\quad f\in\Pi_C$. 则 $Q(f)$ 是下列变分不等式的解

$$\langle(I-f)Q(f),J(Q(f)-p)\rangle\le 0,\quad f\in\Pi_C,\ p\in F(T).$$

2 主要结果

定理 2.1 设 E 是一致光滑的 Banach 空间， C 是 E 的非空闭凸子集， $T:C\to C$ 是一非扩张映象且 $F(T)\ne\phi$, $f\in\Pi_C$, 如果 $\{\alpha_n\}$ 是 $(0,1)$ 中一实数列满足条件 (H_1) 和 (H_2), 而且由 (1.6) 式定义的迭代序列 $\{x_n\}$ 满足下面的条件:

$$\lim_{n\to\infty}||Tx_n-x_n||=0, \tag{2.1}$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $Q(f)$. 其中 $Q:\Pi_C\to F(T)$, 即 $Q(f):=\lim\limits_{t\to 0}z_t$.

证明 首先我们证明 $\{x_n\}$ 有界，任取 $p\in F(T)$ 得

$$\begin{aligned}||x_{n+1}-p||&\le(1-\alpha_n)||Tx_n-p||+\alpha_n||f(x_n)-p||\\&\le(1-\alpha_n)||x_n-p||+\alpha_n(||f(x_n)-f(p)||+||f(p)-p||)\\&\le(1-\alpha_n)||x_n-p||+\alpha_n(\alpha||x_n-p||+||f(p)-p||)\\&\le[1-(1-\alpha)\alpha_n]||x_n-p||+\alpha_n||f(p)-p||\\&\le\max\{||x_n-p||,\frac{1}{1-\alpha}||f(p)-p||\}\,.\end{aligned}$$

于是有

$$||x_n-p||\le\max\{||x_0-p||,\frac{1}{1-\alpha}||f(p)-p||\},\quad n\ge 0. \tag{2.2}$$

由引理 1.3 可得 $z_t \to q\,(=Q(f)) \in F(T)\,(t \to 0)$ 故有

$$\lim_{t\to 0}||z_t - x_n||^2 = ||q - x_n||^2. \tag{2.3}$$

由 (2.2) 和 (2.3) 式得知序列 $\{x_n\}, \{x_n - q\}, \{z_t - x_n\}$ 均有界，故令

$$M = \sup_{t>0, n\geq 0}\{||x_n - q||^2 + ||z_t - x_n|| + ||z_t - x_n||^2\} < \infty. \tag{2.4}$$

现在，设 $q = Q(f) \in F(T)$, 则由 (1.4) 式有

$$z_t - x_n = (1-t)(Tz_t - x_n) + t(f(z_t) - x_n).$$

由引理 1.2 可得

$$\begin{aligned}||z_t - x_n||^2 \leq &(1-t)^2||Tz_t - x_n||^2 + 2t\langle f(z_t) - x_n, J(z_t - x_n)\rangle\\ \leq &(1-t)^2(||Tz_t - Tx_n|| + ||Tx_n - x_n||)^2 +\\ &2t||z_t - x_n||^2 + 2t\langle f(z_t) - z_t, J(z_t - x_n)\rangle\\ \leq &(1-t)^2(||z_t - x_n||^2 + 2||z_t - x_n||\ ||Tx_n - x_n|| + ||Tx_n - x_n||^2) +\\ &2t||z_t - x_n||^2 + 2t\langle f(z_t) - z_t, J(z_t - x_n)\rangle.\end{aligned}$$

易知正规对偶映象 J 是奇映象，即 $J(-x) = -J(x),\ x \in E$, 于是有

$$\langle f(z_t) - z_t, J(x_n - z_t)\rangle \leq \frac{t}{2}||z_t - x_n||^2 + \frac{1}{2t}||Tx_n - x_n||(||z_t - x_n|| + ||Tx_n - x_n||).$$

故由条件 (2.1) 和 (2.4) 式可得

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(z_t) - z_t, J(x_n - z_t)\rangle \leq \frac{t}{2}M,\ \forall\, t > 0.$$

故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n \geq N$ 时有

$$\langle f(z_t) - z_t, J(x_n - z_t)\rangle \leq \frac{t}{2}M + \varepsilon, \quad \forall\, t > 0.$$

因为 $z_t \to q\,(t \to 0)$, 而且由命题 1 知 J 在 E 的每一有界子集上由 E 的范数拓扑到 E^* 的范数拓扑是一致连续的，故有

$$\lim_{t\to 0}\langle f(z_t) - z_t, J(x_n - z_t)\rangle = \langle f(q) - q, J(x_n - q)\rangle \leq \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N.$$

从而有

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(q) - q, J(x_n - q)\rangle \leq \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性，故得

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(q) - q, J(x_n - q)\rangle \leq 0. \tag{2.5}$$

另一方面，由 (1.6) 式和引理 1.2 可得

$$
\begin{aligned}
||x_{n+1}-q||^2 =&||(1-\alpha_n)(Tx_n-q)+\alpha_n(f(x_n)-q)||^2\\
\le&(1-\alpha_n)^2||Tx_n-q||^2+2\alpha_n\langle f(x_n)-q,J(x_{n+1}-q)\rangle\\
\le&(1-\alpha_n)^2||x_n-q||^2+2\alpha_n\langle f(x_n)-f(q),J(x_{n+1}-q)\rangle+\\
&2\alpha_n\langle f(q)-q,J(x_{n+1}-q)\rangle\\
\le&(1-\alpha_n)^2||x_n-q||^2+2\alpha\alpha_n||x_n-q||\ ||x_{n+1}-q||+\\
&2\alpha_n\langle f(q)-q,J(x_{n+1}-q)\rangle\\
\le&(1-\alpha_n)^2||x_n-q||^2+\alpha\alpha_n(||x_n-q||^2+||x_{n+1}-q||^2)+\\
&2\alpha_n\langle f(q)-q,J(x_{n+1}-q)\rangle\ .
\end{aligned}
$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
&||x_{n+1}-q||^2\\
&\le \frac{1-(2-\alpha)\alpha_n+\alpha_n^2}{1-\alpha\alpha_n}||x_n-q||^2+\frac{2\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n}\langle f(q)-q,J(x_{n+1}-q)\rangle\\
&\le (1-\frac{2(1-\alpha)\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n})||x_n-q||^2+\frac{2\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n}\langle f(q)-q,J(x_{n+1}-q)\rangle+\frac{\alpha_n^2}{1-\alpha\alpha_n}M\\
&\le (1-\frac{(1-\alpha)\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n})||x_n-q||^2+\frac{2\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n}\langle f(q)-q,J(x_{n+1}-q)\rangle+\frac{\alpha_n^2}{1-\alpha\alpha_n}M\ .
\end{aligned}
$$

取

$$
\widetilde{\alpha}_n=\frac{(1-\alpha)\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n},\quad \widetilde{\beta}_n=\frac{M}{(1-\alpha)}\alpha_n+\frac{2}{1-\alpha}\langle f(q)-q,J(x_{n+1}-q)\rangle,
$$

故有

$$
||x_{n+1}-q||^2\le(1-\widetilde{\alpha}_n)||x_n-q||^2+\widetilde{\alpha}_n\widetilde{\beta}_n. \tag{2.6}
$$

由条件 (H_1), (H_2) 和 (2.5) 式得

$$
\widetilde{\alpha}_n\to 0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\alpha}_n=\infty,\quad \limsup_{n\to\infty}\widetilde{\beta}_n\le 0.
$$

在 (2.6) 式中取 $a_n=||x_n-q||^2$, $\lambda_n=\widetilde{\alpha}_n$, $b_n=\widetilde{\alpha}_n\widetilde{\beta}_n$, 由引理 1.1 得 $||x_n-q||\to 0\,(n\to\infty)$, 即 $\{x_n\}$ 强收敛于 q.

定理 2.2 设 E 是范数一致 Gateaux 可微的且对非扩张映象具有不动点性质的 Banach 空间，设 C 是 E 的非空闭凸子集， $T:C\to C$ 是一非扩张映象且 $F(T)\ne\phi$, $f\in\Pi_C$, 如果 $\{\alpha_n\}$ 是 $(0,1)$ 中一实数列满足条件 (H_1) 和 (H_2), 而且由 (1.6) 定义的迭代序列 $\{x_n\}$ 满足条件 (2.1), 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $Q(f)$. 其中 $Q:\Pi_C\to F(T)$, 即 $Q(f):=\lim_{t\to 0}z_t$.

证明 因 E 的范数是一致 Gateaux 可微的 Banach 空间，由命题 1 知，正规对偶映象 J 是单值的且在 E 的每一有界子集上由 E 的范数拓扑到 E^* 的弱 * 拓扑一致连续的. 又 E 对非扩张映象具有不动点性质，故由文献 [11,15] 知当 $t\to 0$ 时 $\{z_t\}$ 强收敛于 T 在 C 中的不动点，因

此用定理 2.1 给出的证明方法，结论立即可得.

参考文献:

[1] GEOBEL K, KIRK W A. *A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**(1): 171–174.

[2] BROWDER F E. *Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive non-linear mappings in Banach spaces* [J]. Arch. Rational Mech. Anal., 1967, **24**: 82–90.

[3] REICH S. *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1980, **75**(1): 287–292.

[4] HALPERN B. *Fixed points of nonexpanding maps* [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, **73**: 957–961.

[5] LIONS P L. *Approximation de points fixes de contractions* [J]. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, 1977, **284**(21): 1357–1359. (in French)

[6] MOUDAFI A. *Viscosity approximation methods for fixed points problems* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2000, **241**(1): 46–55.

[7] WITTMANN R. *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings* [J]. Arch. Math. (Basel), 1992, **58**(5): 486–491.

[8] XU Hong-kun. *An iterative approach to quadratic optimization* [J]. J. Optim. Theory Appl., 2003, **116**(3): 659–678.

[9] ZHANG Shi-sheng. *Some problems and results in the study of nonlinear analysis* [J]. Nonlinear Anal., 1997, **30**(7): 4197–4208.

[10] XU Hong-kun. *Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2004, **298**(1): 279–291.

[11] REICH S. *Approximating fixed points of nonexpansive mappings* [J]. Panamer. Math. J., 1994, **4**(2): 23–28.

[12] SHIOJI N, TAKAHASHI W. *Strong convergence of approximated sequence for nonexpansive mappings* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1997, **125**(12): 3641–3645.

[13] XU Hong-kun. *Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings* [J]. Bull. Austral. Math. Soc., 2002, **65**(1): 109–113.

[14] XU Hong-kun. *Remark on an iterative method for nonexpansive mappings* [J]. Comm. Appl. Nonlinear Anal., 2003, **10**(1): 67–75.

[15] 张石生，田有先. 关于 Halpern 的公开问题 [J]. 数学学报， 2005, **48**(5): 979–984.
ZHANG Shi-sheng, TIAN You-xian. *On an open question of B. Halpern* [J]. Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 2005, **48**(5): 979–984. (in Chinese)

Viscosity Approximtion of Fixed Points for Nonexpansive Mappings in Banach Spaces

ZHAO Liang-cai[1], *ZHANG Shi-sheng*[1,2]

(1. Department of Mathematics, Yibin University, Sichuan 644000, China;
2. Department of Mathematics, Sichuan University, Sichuan 610064, China)

Abstract: Let E be a uniformly smooth Banach space, whose norm is uniformly Gateaux differentiable. Let C be a closed convex subset of E, $f : C \to C$ be a contractive mapping, and $T : C \to C$ be a nonexpansive mapping. It is shown that under more general contractions of viscosity approximation methods, the sequence $\{x_n\}$ defined by (1.6) converges strongly. The results presented in this paper also extend and improve some recent results.

Key words: fixed point; contractive mapping; nonexpansive mapping; viscosity approximation.