第27卷第4期 数学研究与评论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0982-05 **文献标识码**: A

对波莱尔关于"泰勒展开一般以收敛圆为割线"思想研究

王全来[1,2]

(1. 天津师范大学计算机与信息工程学院，天津 300384; 2. 西北大学数学系，陕西 西安 710069)
(E-mail: jswwk@xbmu.edu.cn)

摘 要: "泰勒展开是否以收敛圆为割线"问题是解析开拓理论研究的重要课题，但对此国内外尚无全面细致地研究．鉴于此，以原始资料为依据，围绕法国数学家波莱尔（E.Borel）关于此方面的工作，分析了波莱尔关于"泰勒展开一般以收敛圆为割线"的思想来源，探讨了其思想的演变过程和在当时及以后的重要影响.

关键词: 泰勒展开；函数奇点；解析开拓.
MSC(2000): 01A05; 30B10
中图分类: O173.1

B.Taylor 在 1715 年"正的和反的增量方法"中发表了在 1712 年发现的后来以其名字命名的泰勒公式．麦克劳林 (C.Maclaurin) 在 1729 年给出了泰勒公式的一种特殊情况，后人称为麦克劳林公式 [1]．他们未考虑泰勒展开的收敛性问题．在某点邻域内泰勒级数与其在该点的级数和之间对应关系 J.Lagrange, 柯西 (A.Cauchy) 等都有所论述, 但较深入地探讨是 1826 年阿贝尔 (N.Abel) 的文章．在该文中阿贝尔对级数收敛性进行了详细讨论，提出了级数收敛的阿贝尔定理, 并对复变量的二项式级数的收敛域进行了研究 [2]. 自阿贝尔的工作之后, 数学家们认识到泰勒展开的收敛域应当是一个圆, 继而提出了确定收敛圆半径问题. 确定收敛圆半径问题的思想最早可溯源到柯西 1821 年《代数分析》. 柯西指出"设级数 $\sum a_nx^n$, A 为 $|a_1|, |\sqrt{a_2}|, \ldots, |\sqrt[n]{a_n}|\ldots$ 各极限的较大量, 则当 x 包含在 $(-\frac{1}{A}, \frac{1}{A})$ 时该级数收敛, 在其之外发散" [3]. $\frac{1}{A}$ 即后来所说的给定级数的收敛半径．在 1856 年黎曼 [4](B.Riemann), 在 1888 年和 1892 年阿达玛 (J.Hadamard) 分别证明和阐述了柯西的这种思想. 但由于黎曼此工作为人长期忽略, 故后人把级数收敛半径定理称之为柯西 – 阿达玛定理 [5].

1 波莱尔利用泰勒展开研究函数奇点问题的思想背景

任一解析函数在收敛圆内都对应一个泰勒展开；反之，若一个函数在某一圆内解析，则它可展成泰勒级数. 魏尔斯特拉斯 (K.Weierstrass), H.Méray 等人正是应用泰勒展开定义解析函数的. 由于泰勒级数在其收敛圆上某点敛散情况不定, 为此数学家们一方面寻找泰勒级数在收敛圆上某点收敛条件；另一方面寻找一些研究方法，探讨泰勒级数在发散点处性质．这类问题的研究与函数奇点的研究有密切联系．所谓奇点，简单说来就是函数的非解析点 [1]．一个函数的奇点和其泰勒展开之关系较早由达布 (G.Darboux) 研究．他在 1878 年"大数字函数近似法"中，从奇点已知的级数出发，引出了与级数系数有关的许多结论，特别是在论文中提出了一个对函数奇点

收稿日期: 2005-09-05; **接受日期**: 2006-01-09
基金项目: 国家自然科学基金 (10471111); 天津师范大学青年科研基金 (52LE57).

[1] 函数奇点的定义可见 L.Zoretti1911 年的《解析开拓》课程第 39–41 页．该书从不同角度叙述了这一问题.

的研究非常有用的重要原则"级数系数的主要部分的研究与函数在收敛圆上某点变成无穷的方式有关"[6]. 阿达玛研究函数奇点的方法正是基于此原则，这一点他在 1892 年的博士论文第二部分的开头有详细说明. 该方法的基本思想在《泰勒级数及解析开拓》中有详细介绍[7].

研究函数在收敛圆之外解析开拓问题，确定函数在收敛圆上的奇点非常重要. 用给定函数 $\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m + \cdots$ 的泰勒展开研究在其收敛圆上的奇点，较早涉及的是 L.Lecornu. 在 1887 年"论整级数"中，他指出 $|\frac{a_{m+1}}{a_m}|$ 或 $|\sqrt[m]{a_m}|$ 存在极限的情况下，收敛圆半径为此极限倒数，且 $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ 的极限为唯一位于收敛圆上奇点的横坐标[6, p9]. 其证明因缺乏严密性而引起当时多人反对. 对此问题进一步论述的是阿达玛. 阿达玛在 1888 年"按一个变量的幂给定的级数收敛半径"的注记中用上极限的性质证明了在任意情况下的收敛圆半径定理，纠正了 Lecornu 关于奇点论述的证明，并给出了一般性论述[8].

阿达玛在 1892 年博士论文"泰勒展开所定义的函数的研究"中进一步探索了奇点在收敛圆上的位置及性质，给出了奇点判别方法，并用级数系数的分组方法简化了该判别法. 他指出用这种方法可构成以收敛圆为割线的级数，并以有理数列构成的级数为例进行了说明. 若一个函数在某点处可进行泰勒展开，一般来讲可确定一个相应的收敛圆. 若函数奇点在收敛圆周上稠密，则该收敛圆周为此函数泰勒展开的割线.

阿达玛利用泰勒展开研究函数奇点的工作在当时产生了重要影响，其中以波莱尔和 E.Fabry 的工作较为突出. Fabry 研究函数奇点的方法采用了阿达玛的直接方法. Fabry 在 1896 年"论由级数展开给定的函数的研究和在更一般的情况下解析开拓的不可能性"中给出了收敛圆上的点为奇点的判别方法，其法实质上与阿达玛的方法相同，只是形式有别. 他在判别方法中用到了一个重要关系式，即把给定函数在原收敛圆内某点的泰勒展开的第 n 项系数写成其原有泰勒展开与有关项的系数与该点的表达式. 利用一定的数学技巧从这个表达式中选择最大项，构造检验函数[7, p45−47]，用检验函数进行判断. 此函数在 P. Dienes 的《泰勒级数》中称为阿达玛检验函数[9]. 此关系式为当时及以后的复变函数论著作采用. L.Leau 在 1899 年"由泰勒展开定义的函数奇点研究"中利用此关系式证明了收敛圆上正则弧的存在性[10].

波莱尔采用与阿达玛完全不同的方法"关联整函数法"研究了函数奇点的有关问题，特别是从多角度对"泰勒级数一般以收敛圆为割线"命题进行了论述. 在 1912 年的科学工作的注记中，波莱尔明确指出在受到 H.Poincaré 处理有理分式函数级数展开工作的影响，对复变函数按柯西意义单演和魏尔斯特拉斯意义解析的联系和区分下，对泰勒级数所表示的函数的解析开拓问题的研究中，才使他提出了与发散级数有关的一些重要方法如关联整函数法、发散级数的可和方法和波莱尔变换[11]，这些直到现在也都具有重要意义.

关联整函数法的思想可溯源到波莱尔在 1896 年"可和的发散级数的理论基础"[12] 中. 在该文中他对数项级数及单变量函数项级数求和时已用到这种思想. 稍后于 10 月"论泰勒级数"中正式提出关联整函数法[13]. 在 1896 年 12 月"论泰勒级数以收敛圆为割线"[14] 中给出了用关联整函数和发散级数的可和理论判定函数奇点的方法. 此外，他利用关联整函数法研究了函数的解析开拓问题，其中用到了一个重要的概念"可和多边形". 可和多边形的概念是他在 1896 年"论泰勒级数以收敛圆为割线"中提出，但当时没有给出清楚论述. 在 1900 年"解析开拓和可和级数"[15] 中，他进一步明确可和多边形的概念，阐述了其在研究函数奇点和开拓问题中的重要作用. G.Mittag-Leffler 在 1900 年指出用关联整函数法研究函数解析开拓的重要意义，并进一步研究提出了比可和多边形更大的区域"星形区域"[11, p189]. P.Dienes 在《解析函数的奇点课程》[16] 中专门利用一章介绍了此法，在《泰勒级数》中也多有介绍[9, p302−305]. G.Julia

在其著作中对波莱尔的关联整函数法在函数解析开拓发展史上的地位给予了高度评价 [17].

利用函数的泰勒展开对函数进行解析开拓，有必要探讨对于给定的泰勒级数是否以收敛圆为割线. 如果一个函数的泰勒展开的收敛圆周为割线, 则此函数只能在这个收敛圆内进行解析开拓. 波莱尔对泰勒展开以收敛圆为割线问题进行了深入的研究，特别是在 "缺项级数类以收敛圆为割线"、"泰勒级数一般以收敛圆为割线" 中 "一般" 的论述有独到见解. 其思想方法对后来研究此问题的学者有重要影响，其中之一便是 Fabry 的工作. 他在 1899 年发表的论文 "论具有无穷奇点的泰勒级数" 中对此有明确说明 [18].

2 波莱尔对 "缺项级数类以收敛圆为割线" 问题研究

对 "泰勒级数一般以收敛圆为割线" 问题的研究首先始于对一些特殊函数, 特别是缺项级数解析性质的认识. 较早涉及此方面的例子是 J.Jacobi 的 $1+2\sum_{\nu=1}^{\infty}q^{\nu^2}, |q|<1$. 稍后 L.kronecker 对此级数也进行了研究. 他们二人是从椭圆函数理论的角度研究的. 1880 年魏尔斯特拉斯指出该级数的收敛圆周由奇点构成 [2, p292]. 在同一篇论文中他又研究了另外一例, $\sum a^n x^{b^n}$, a 是正数, b 是大于 1 的正整数, 其收敛半径为 1. 他指出若 $a<1$, 该级数虽在圆周上连续, 但存在一些点为奇点. 并指出该级数以收敛圆为割线, 但未给出更一般的表述 [7, p47−48]. 黎曼、达布、M.Lerch 等一些学者也提供了一些与其例具有同样性质的例子. 而这些特殊的例子对建立收敛圆为割线的理论是不够的, 其因在于这些例子均与 x 的幂的算术性质有特殊关系. E.Fredholm 在 1890 年提出一个例子 $y=1+ax+a^2x^4+\cdots+a^nx^{n^2}+\cdots$, 其中 $0<a<1$. 他的例子也以收敛圆为割线, 但不符合魏尔斯特拉斯例子的规律. 他的例子不仅作为长期为人忽略的收敛圆为割线的级数分类中的一类, 而且更进一步表明, 若随意给定一个收敛半径有限的泰勒级数, 一般来说它所表示的函数在收敛圆之外不能解析开拓.

阿达玛在 1892 年的论文中对此类缺项级数进一步研究指出若在级数 $\sum b_\mu x^{c_\mu}$ (c_μ 为增长的正整数序列) 中, $\frac{c_{\mu+1}-c_\mu}{c_\mu}$ 总是大于一个固定数 s, 则该级数的收敛圆为割线. 其后波莱尔进行了推广, 在 1896 年 12 月 "论泰勒级数以收敛圆为割线" 中指出 "为使泰勒级数不以收敛圆为割线充要条件是级数在收敛圆之外的任何区域是可和的". 从这个命题出发, 波莱尔用关联整函数法, 在 1896 年 "关于泰勒展开可和区域" 的注记中证明 "若 $\frac{c_{\mu+1}-c_\mu}{\sqrt{c_\mu}}$ 从某项起大于一个固定数 s, 则该级数的收敛圆为割线" [2]. 取 $c_\mu=n^2, b_\mu=a^n$, 即得到 Fredholm 的例子, 由此判定方法知其收敛圆为割线. Fabry 在 1896 年的上述论文中对上述命题给出推广, 指出当 $\lim_{\mu\to\infty}\frac{c_\mu}{\mu}=\infty$ 时结论也成立 [19]. 阿达玛和 S.Mandelbrojt 在《泰勒级数及解析开拓》中对此命题给出了更一般的表述 [7, p71].

3 波莱尔对 "泰勒级数一般以收敛圆为割线" 中 "一般" 的研究

"一个泰勒级数一般以收敛圆为割线" 的命题首先由 A.Pringsheim 在 1892 年 5 月阐述, 并用分析方法给出证明 [20]. A.Denjoy 在 1920 年 "论泰勒级数以收敛圆为割线" 中把此命题推广到级数项系数含有多个参数的情形, 并用完备集理论给出严格证明 [21]. 波莱尔在 1896 年 12 月 "论泰勒级数" 中重新提出该命题. 在给 Mittag-leffler 的信 (即 1897 年 5 月 "论泰勒级数" [22] 的论文) 中再次阐述了这篇论文中的此命题, 利用关联整函数奇异辐角概念和级数项的连续分组

[2] 在该文的注脚中, 波莱尔指出在 1894 年他与阿达玛交谈时提过此结论. 阿达玛认为波莱尔对他的结论的推广是正确的, 并承认他使用的方法不能达到这一点.

方法证明了在一般情况下，泰勒级数以收敛圆为割线．在这两篇论文中，他指出该命题的关键之点在于要弄清“一般”的准确意义．此种观点被当时及后来的数学家认同．他在 1896 年 12 月“论泰勒级数”中首先明确了“一般”的含义，并用关联函数主辐角概念证明“当泰勒级数的系数是任意的，则收敛圆为割线”．一个泰勒级数被说成是一般的，是指第 n 项系数值与前面项的系数值无关．稍后，Fabry 在 1897 年“论泰勒级数”中也给出了“一般”的同样含义和新证明，其证明用到了检验函数 [18, p65−87].

波莱尔在 1896 年 12 月“论泰勒级数”中提出用级数项的连续分组方法确定泰勒级数的奇点．此法也为 Fabry 、 Leau 等在证明泰勒级数一般以收敛圆为割线时使用．该法的基本思想为“把级数项分成无穷多个连续组，每组对应收敛圆上的一个点，且该点只依赖于这组系数．这些点可构成集合 E, 且 E 的导集的任意点都是奇点” [11, p154−155]. 在 1898 年， Leau 阐述了这种方法的重要性，并给出更一般的形式 [20, p487].

波莱尔在 1899 年“发散级数”中对此方法进一步解释到：设有一个增长的整数列，分别考虑脚标包含在此整数列中任两个相邻整数之间的级数项，这组项可以唯一确定一个角．若连续项的系数是任意的，则这些角被认为是相互独立的．若在单位圆周上标出所有以该角为辐角的点，则这些点的集合 E 的导集由函数的奇点构成．波莱尔和 Fabry 都用过这一原则，不同之处在于获得辐角的方法不同 [20, p487−488]. 在一般情况下，这个导集由整个圆的边界构成，即所得点的集合 E 在圆周的任意弧上是稠密的．其实这种思想在 1897 年给 Mittag-leffler 的信中已见端倪．他在该信的最后指出“因此，在圆上有无穷多个独立的圆弧，其和超过了任意给定的数．因此，一般来说圆周上任意点都属于这无穷多个弧” [22, p665]. 这实际上正是后来 Borel-Cantelli 预备定理的雏形．他在 1912 年的科学工作的注释中指出“稠密的概率为 1 ”．对他来说，这一点正是从其 1909 年“可数概率及算术应用” [23] 中提出的可数概率理论出发得到的．毫无疑问，“一般”就实际意义说“几乎一定”，是一个概率概念． H.Steinhaus 在 1929 年从概率角度详细阐述了泰勒级数一般以收敛圆为割线的问题，其主要参考文献为 Borel1896 年此方面的论文，这是第一次对波莱尔的工作给出准确数学含义 [24].

自波莱尔对“一般”的意义进行解释后，数学家们也从多角度进行了论述．如若把泰勒级数的系数限制为整数，则“一般”的意义可扩大到坐标集合上． 1918 年， F.Hausdorff 注意到了这一事实，并在 1919 年指出这样做的结果可使可开拓的泰勒级数构成一个可数集合，不可开拓的泰勒级数构成一个非可数集合． G.Pólya 于 1918 年还把“一般”的意义扩展到了拓扑空间上，指出在一个适当的拓扑空间中，非可开拓的泰勒级数可构成一个稠密开集 [24, p418−420].

综上所述，波莱尔用函数的泰勒展开研究函数奇点的工作，特别是在函数奇点的判定和“泰勒级数一般以收敛圆为割线”命题的论述，无论从思想上，还是方法上都有一定的创新，其思想方法确实对当时及以后数学家产生了一定影响．

参考文献：

[1] CAJORI F A. *History of Mathematics* [M]. New York: Chelsea Publishing Company, 1919, 226.

[2] EGMOND W V. *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass* [M]. Springer-Verlag, 1986, 113.

[3] CAUCHY A L. *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* [M]. In: Ouvres de Cauchy. Série II. Paris: Gauthier-Villars, 1907, 135–136.

[4] LAUGWITZ D, NEUENSCHWANDER E. *Riemann and the Cauchy-Hadamard formula for the convergence of power series* [J]. Historia Math., 1994, **21**(1): 64–70.

[5] AHLFORS L V. *Complex Analysis* [M]. America: Havard University, 1953, 141.
[6] Hadamard J. *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor* [J].In: Ouvres de Jacques Hadamard. Tome I. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1968, 9.
[7] HADAMARD J, MANDELBROJT S. *La Série de Taylor et Son Prolongement Analytique* [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1926, 77–79.
[8] HADAMARD J. *Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable* [J].In: Ouvres de Jacques Hadamard. Tome I. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1968, 3–6.
[9] DIENES P. *The Taylor Séries* [M]. Oxford: Clarendon Press, 1931, 226.
[10] BOREL E. *Lesons sur les Séries Divergentes* [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1928, 180–184.
[11] BOREL E. *Notice sur les Travaux scientiques de Emile Borel* [J].In: Ouvres de Emile Borel. Tome I. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1972, 145–156.
[12] BOREL E. *Fondement de la théorie des séries divergentes sommables* [J]. In: Ouvres de Emile Borel. Tome I. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1972, 417–436.
[13] BOREL E. *Sur les séries de Taylor* [J]. In: Ouvres de Emile Borel. Tome II. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1972, 647–648.
[14] BOREL E. *Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure* [J]. In: Ouvres de Emile Borel. Tome II. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1972, 649–659.
[15] BOREL E. *Le prolongement analytique et les séries sommables* [J]. In: Ouvres de Emile Borel. Tome II. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1972, 707–713.
[16] Dienes P. *Lesons Sur Les Singularités Des Fonctions Analytiques* [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1913, 77–109.
[17] JULIA G. *Essai Sur Le Développement De La Théorie Des Fonctions De Variables Complexes* [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1933, 21.
[18] FABRY E. *Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers* [J]. Acta Math., 1899, **22**: 65–87.
[19] KOLMOGOROV A N, YUSHKEVICH A P. *Mathematics of the 19th Century* [M]. Birkháuser-Verlag, 1996, 39–40.
[20] BOREL E. *Mémoire sur les séries divergentes* [J]. In: Ouvres de Emile Borel. Tome I. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1972, 486–487.
[21] DENJOY A. *Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure* [J]. Articles et Mémoires (I). Paris: Gauthier-Villars, 1955, 449–453.
[22] BOREL E. *Sur les séries de Taylor* [J]. In: Ouvres de Emile Borel. Tome II. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1972, 661–665.
[23] BOREL E. *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmetiques* [J]. In: Ouvres de Emile Borel. Tome II. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1972, 1055–1079.
[24] PIER J P. *Development of Mathematics 1900-1950* [M]. Birkhäuser-Verlag, 1994, 420.

E.Borel's Thought on the Claim "Taylor Series Generally Considers Its Convergent Circle as the Cut Secant"

WANG Quan-lai[1,2]

(1. College of the Computer and Information Engineering, Tianjin Normal University, Tianjin 300384, China;
2. Department of Mathematic, Northwest University, Shaanxi 710069, China)

Abstract: The research on that "Taylor series generally considers its convergent circle as the cut secant" is an important problem of analytic continuation. This paper analyzes E.Borel's mathematic work relative to the research of this problem by the method of historical proof. His work on this problem is not studied at present. This paper discusses his background thought, the development of his idea and the influence on other mathematicians at that time.

Key words: Taylor development; function singularities; analytic continuation.