Jacobson-Chevalley 稠密定理的一个推广*

厉立德

(浙江大学)

我们在[1]中证明了，一个半环(hemiring)关于它的 Jacobson 关系根的商同构于完全本原半环的亚直和。这使我们有兴趣对这个特殊的半环类——完全本原半环的结构作进一步的讨论。本文的主要结果是：一个半环是完全本原的当且仅当它是一个半模上的亚稠密自同态半环。这个定理给出了完全本原半环的结构，推广了 Jacobson—Chevalley 稠密定理。

本文仍然采用[1]中的定义和记号，个别特别重要的定义仍然列入文中。

引理 1　设 R 是半环，M 是加法可消的右 R-半模，则 M 可以同构地嵌入到一个加法可逆的右 R-半模之中。

证　在 $M\times M$ 中建立关系 $\sim$：$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in M\times M$，$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)\Longleftrightarrow x_1+y_2=x_2+y_1$。易知 $\sim$ 是个等价关系。记元素 (x,y) 所在的等价类为 $(x,y)^\sim$，通过定义 $(x_1,y_1)^\sim+(x_2,y_2)^\sim=(x_1+x_2,y_1+y_2)^\sim$，$(x,y)^\sim r=(xr,yr)^\sim$。容易验证 $M\times M/\sim$ 作成一个 R-半模。我们记之为 $\widetilde{M}$。而且，若 $(x,y)^\sim\in\widetilde{M}$，则必也有 $(y,x)^\sim\in\widetilde{M}$，使 $(x,y)^\sim+(y,x)^\sim=0$，故 $\widetilde{M}$ 加法可逆。再通过定义 $m\mapsto(m,o)^\sim\ \forall m\in M$，得到 M 到 $\widetilde{M}$ 的 R-半模同态 ϕ。如果 $(m,o)^\sim=(m',o)^\sim$，由定义，$m+o=o+m'$。故 ϕ 是 R-半模的单一同态，即同构嵌入，由于 $(x,y)^\sim=(x,o)^\sim+(o,y)^\sim=(x,o^\sim-(y,o)^\sim$。我们可以将 $\widetilde{M}$ 的元素 $(x,y)^\sim$ 方便地记为 $x-y$。

引理 2　M 是加法可消的右 R-半模，则 $End_R(\widetilde{M})$ 是一环，记 $\overline{E}$，$\widetilde{M}$ 可视为左 $\overline{E}$-模。

证　首先 $End_R(\widetilde{M})$ 按通常定义是一半环。对于 $\varphi\in End_R(\widetilde{M})$，定义 η：$\forall x\in\widetilde{M}, x\mapsto-\varphi(x)$。容易验证 $\eta\in End_R(\widetilde{M})$ 且是 φ 的加法逆元。故 $End_R(\widetilde{M})$ 实际上是环。由于 $\widetilde{M}$ 本身是一加群，它显然满足左 $\overline{E}$-模之定义。

为了用半模上的某种线性变换来刻划完全本原半环，我们需要将除环上的模（向量空间）的某些概念加以推广，以下对于半模都约定是非平凡的，加法可消的，将不再声明。

定义 1　设 M 是左 S-半模。记 $Z(M)=\{x\in M|Sx=0\}$ 有限个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in M\setminus Z(M)$ 称为半线性相关，或简称相关的，如果有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in S$，以及一个 $i\in Z(1\leqslant i\leqslant n)$，使

*1980年12月13日收到。

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n\quad \alpha_ix_i\neq\beta_ix_i \tag{1}$$

否则，称它们为无关的。对于包含有若干 $Z(M)$ 中元素的有限元素组，我们特别规定它们总是相关的。左 S-半模 M 的子集 X 称为相关集，如果它至少包含一有限个元素组成的相关集；否则称 X 为无关集。

由定义知，一个不属于 $Z(M)$ 的元素自己是无关集。如果 S 中有元素 e，它有性质：$ex=x\ \forall x\in M$。则 $Z(M)=0$。这时任一非零元自己是无关集。若 M 是除环 S 上的向量空间，则上述关于无关的定义完全与向量空间的线性无关定义相一致。这个概念的推广将在我们的主要定理中起重要作用。作为对无关集的特性的进一步描述，我们将证明一个命题。

定义 2 M 是左 S-半模。$y,x_1,x_2,\cdots,x_n\in M$。如果有 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta,\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n\in S$，使

$$\alpha y+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\beta y+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n \tag{2}$$

当 $y\notin Z(M)$ 时，$\alpha y\neq\beta y$

则说 y 可由 $x_1、x_2,\cdots,x_n$ 半线性表示。

设 y 可由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 半线性表示，对任意的两个表示式(2)和

$$\alpha'y+\alpha_1'x_1+\alpha_2'x_2+\cdots+\alpha_n'x_n=\beta'y+\beta_1'x_1+\beta_2'x_2+\cdots+\beta_n'x_n \tag{3}$$

若 $(\alpha+\alpha')y=(\beta+\beta')y\Rightarrow(\alpha_i+\alpha_i')x_i=(\beta_i+\beta_i')x_i\quad i=1,2,\cdots,n$，则称这种半线性表示是单一的。

我们知道，M 中的无关子集的集合族是非空的。而所有这些子集按包含关系组成偏序。任一族组成升链的无关子集，其并仍是无关集。根据 Zorn 引理，M 中的无关子集必有极大者，我们不妨也称之为极大无关集。

命题 3 设 X 是 S-半模 M 的子集，下列命题等价：

(i) X 是极大无关集

(ii) M 中任一元 y 必可由 X 中一组元素半线性表示，且这种表示必是单一的。

证 (i)⇒(ii) $y\in Z(M)$ 时，表示式(2)中只能 $\alpha_ix_i=\beta_ix_i\ i=1,2,\cdots,n$。显然成立。今设 $y\notin Z(M)$。首先，如果 y 不能被 X 中元素半线性表示，则易知 $y\notin X$。而且，$X\cup\{y\}$ 仍是无关集。事实上，如果 $X\cup\{y\}$ 是相关集，则有 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$，使(2)成立。这时只能 $\alpha y=\beta y$。而这又导致 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 相关，矛盾。但 $X\cup\{y\}$ 是无关集又和条件(i)矛盾。故 y 可被 X 中元素半线性表示。其次，若 y 被 X 中元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 半线性表示不是单一的，即是说，有表示式(2)，(3)，其中 $(\alpha+\alpha')y=(\beta+\beta')y$ 而存在 i，$(\alpha_i+\alpha_i')x_i\neq(\beta_i+\beta_i')x_i$。这时只要将(2)和(3)左右分别相加，便得出 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 相关这一矛盾的结果。(ii)得证。

(ii)⇒(i) 若 X 是相关集，则必有 $y_1,y_2,\cdots,y_m\in X$，使得成立等式 $\gamma_1y_1+\cdots+\gamma_my_m=\delta_1y_1+\cdots+\delta_my_m\ \gamma_i,\delta_i\in S,i=1,2,\cdots,m$。其中不妨设 $\gamma_1y_1\neq\delta_1y_1$。现设 y 是 M 中任意元素，由所设知有 $\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta,\beta_1,\cdots,\beta_n\in S$，使(2)成立。记 $\{z_1,z_2,\cdots,z_s\}=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}\cup\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$。则仍有 $\gamma_1'z_1+\cdots+\gamma_s'z_s=\delta_1'z_1+\cdots+\delta_s'z_s$ 其中 $\gamma_1'z_1\neq\delta_1'z_1$，以及

$$\alpha y+\alpha'_1z_1+\cdots+\alpha'_sz_s=\beta y+\beta'_1z_1+\cdots+\beta'_sz_s \tag{2'}$$

于是，$\beta y+(\beta'_1+r'_1)z_1+\cdots+(\beta'_s+\gamma'_s)z_s=\alpha y+(\alpha'_1+\delta'_1)z_1+\cdots+(\alpha'_s+\delta'_s)z_s$　　(4)

由(2′)和(4)可见，y由$z_1,\cdots,z_s$表示不是单一的，因为$(\alpha'_l+\beta'_l+\gamma'_l)z_l\neq(\beta'_l+\alpha'_l+\delta'_l)z_l$。故$X$是无关集。其次，若$y\notin X$，由(ii)，应有$x_1,x_2,\cdots x_n\in X$，使(2)成立。即$y,x_1,\cdots,x_n$是相关集，从而得到(i)。

作为特殊情形，当M是环上的模时，上述定义可以有更为简单的形式，这里不再列出。

定义3　(Lizuka)称一个非零R-半模M为既约的，如果对任意的$u_1,u_2\in M$，$u_1\neq u_2$，以及任意的$x\in M$，都存在$a_1,a_2\in R$，使$x+u_1a_1+u_2a_2=u_1a_2+u_2a_1$

设M是右R-半模，N是它的子集，现在R中定义一个关系$\sigma(N)$：对于$a,b\in R$，$a\sigma(N)b\Longleftrightarrow na=nb\ \ \forall n\in N$。显然，$\sigma(N)$是一等价关系。

引理4　M是既约的右R-半模，N是它的子集，y_1,y_2是M中取定的两元素。则只能有下列情形之一：

(i)对任意$x\in M$，$\exists a,b\in R$，且$a\sigma(N)b$。使$x+y_1a+y_2b=y_2a+y_1b$

(ii)$m_1+y_1a+y_2b=m_2+y_2a+y_1b$，$m_1,m_2\in M$，$a,b\in R$，$a\sigma(N)b\Rightarrow m_1=m_2$。

证　在M中定义关系～：$\forall m_1,m_2\in M$，$m_1\sim m_2\Longleftrightarrow\exists a,b\in R$，且$a\sigma(N)b$，$\exists m_1+y_1a+y_2b=m_2+y_2a+y_1b$。～的自反，对称性是显然的。今设$m_1+y_1a+y_2b=m_2+y_2a+y_1b$，$m_2+y_1c+y_2d=m_3+y_2c+y_1d$。则有$m_1+y_1(a+c)+y_2(b+d)=m_3+y_1(b+d)+y_2(a+c)$。由于$a+c\,\sigma(N)\,b+d$，故$m_1\sim m_3$故～是等价关系，且显然是$R$-线性的。再设$m_1+n_1\sim m_2+n_2$，$n_1\sim n_2$即有等式$m_1+n_1+y_1a+y_2b=m_2+n_2+y_2a+y_1b$，$n_1+y_1c+y_2d=n_2+y_2c+y_1d$ $a,b,c,d,\in R$，$a\sigma(N)b$，$c\sigma(N)d$。于是可得$m_1+y_1(a+d)+y_2(b+c)=m_2+y_2(a+d)+y_1(b+c)$。即得$m_1\sim m_2$。故～满足消去律，我们知道，一个既约半模中的可消线性等价关系只能是平凡的，于是只有两种可能：若$\forall x\in M$，都有$x\sim0$，这时就是情形(i)；若对$x,y\in M$，$x\sim y\Longleftrightarrow x=y$显然是情形(ii)。

定义4　R-半模M称为完全忠实的，如果对$x,y\in R$，$mx=my\ \ \forall m\in M$，则$x=y$。如果半环R有一个完全忠实的，既约的半模，则称为完全本原半环。

设M是R-半模，记$E=End_R(M)$，$\overline{E}=End_R(\widetilde{M})$。当然$M$是左$E$-半模，$\widetilde{M}$是左$\overline{E}$-模。设$X\subset\widetilde{M}$。记《$X$》为$X$在$\widetilde{M}$中生成的$\overline{E}$-子半模。若$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$，则记《$X$》为《$x_1,\cdots,x_n$》。

命题5　设R是完全本原半环而M是它的完全忠实，既约半模。N是$\widetilde{M}$的左$\overline{E}$-子半模，N或是零或含有限个$\overline{E}$-无关的生成元。若有$m\in\widetilde{M}\backslash N$。则必有$a_1,a_2\in R$，$a_1\sigma(N)a_2$而$ma_1\neq ma_2$。

证　当$N=\{0\}$时，对于$m\notin N$即$m\neq0$，可设$m=m_1-m_2$ $m_1,m_2\in M$。当然$m_1\neq m_2$。因M是既约R-半模，任意的$x\in M$，必有$a_1,a_2\in R$，使$x+m_1a_1+m_2a_2=m_1a_2+m_2a_1$只要取$x\neq0$，就有$(m_1-m_2)a_1\neq(m_1-m_2)a_2$。此时$a_1,a_2$即为所求。

设当$\overline{E}$-子半模含有$u-1$个无关生成元时，命题为真。今N含有u个$\overline{E}$-无关生成

元，记为 $x_1,x_2,\cdots,x_u$。即 $N=\langle\langle x_1,x_2,\cdots,x_u\rangle\rangle$ 或可记 $N=\langle\langle x_1,x_2,\cdots,x_{u-1}\rangle\rangle+\langle\langle x_u\rangle\rangle$ 如果命题对 N 不成立，即有 $m\in\widetilde{M}-N$，使得

$$a_1\sigma(N)a_2\Rightarrow ma_1=ma_2 \tag{5}$$

记 $N_1=\langle\langle x_1,x_2,\cdots,x_{u-1}\rangle\rangle$。当然 $x_u\notin N_1$。由归纳假设，有 $a_1,a_2\in R$，$a_1\sigma(N_1)a_2$，$x_ua_1\neq x_ua_2$。设 $x_u=x'_u-x''_u$，$x'_u,x''_u\in M$，我们断定，对于 N_1 以及元素 x'_u,x''_u，引理4中的情形(ii)是不存在的。事实上，由 $(x'_u-x''_u)a_1\neq(x'_u-x''_u)a_2$ 得 $x'_ua_1+x''_ua_2\neq x'_ua_2+x''_ua_1$，但 $(x'_ua_1+x''_ua_2)+x'_ua_2+x''_ua_1=(x'_ua_2+x''_ua_1)+x'_ua_1+x''_ua_2$。所以我们只能有情形(i)，即对每个元素 $x\in M$，都有

$$x+x'_ua_1+x''_ua_2=x''_ua_1+x'_ua_2 \text{ 或 } x+x_ua_1=x_ua_2 \quad a_1\sigma(N_1)a_2 \tag{6}$$

今设 $G=\{x_ua_2-x_ua_1\,|\,a_1,a_2\in R\,,\ a_1\sigma(N_1)a_2\}$。显然 G 是 $\widetilde{M}$ 的 R-子半模。而且我们可以证明 $G=\widetilde{M}$。事实上，设 $x-y\in\widetilde{M}$，其中 $x,y\in M$。则根据(6)，我们有 $x+x_ua_1=x_ua_2$，$y+x_ub_1=x_ub_2$。其中 $a_1,a_2,b_1,b_2\in R$ 且 $a_1\sigma(N_1)a_2,b_1\sigma(N_1)b_2$。由之，$x-y=x_u(a_2+b_1)-x_u(a_1+b_2)$ 当然 $a_2+b_1\sigma(N_1)a_1+b_2$，即 $x-y\in G$。于是 $G=\widetilde{M}$。今作映射 φ：$\widetilde{M}\to\widetilde{M}$，定义为：$\varphi(x_ua_2-x_ua_1)=ma_2-ma_1$。首先，定义是合理的：如果 $x_ua_2-x_ua_1=x_ub_2-x_ub_1$，则 $x_u(a_2+b_1)=x_u(a_1+b_2)$。且因 $a_2+b_1\sigma(N_1)a_1+b_2$，得 $a_2+b_1\sigma(N)a_1+b_2$，根据假设(5)，$m(a_2+b_1)=m(a_1+b_2)$ 即 $ma_2-ma_1=mb_2-mb_1$。其次，容易验证 φ 是 $\widetilde{M}$ 的 R-自同态，即 $\varphi\in End_R(\widetilde{M})$。从 φ 的定义又得 $(m-\varphi x_u)a_1=(m-\varphi x_u)a_2$ $\forall a_1,a_2\in M$ 且 $a_1\sigma(N_1)a_2$。如果 $m-\varphi x_u\notin N_1$，则根据归纳假设，必有 $b_1,b_2\in R,b_1\sigma(N_1)b_2$，使 $(m-\varphi x_u)b_1\neq(m-\varphi x_u)b_2$，矛盾，所以，$m-\varphi x_u\in N_1$ 而 $m\in N_1+\langle\langle x_u\rangle\rangle=N$。这与原来的假设矛盾，因而归纳证明完成。

设 M 是左 S-半模，R 是它的 S-自同态半环（记 R 自右边作用于 M），则 M 当然可以看成是右 R-半模。记 $E=End_R(M)$，$\overline{E}=End_R(\widetilde{M})$，$M$ 又可视为左 E-半模。当 M 是完全忠实的 S-半模时，S 可以看成是 E 的一个子半环。

定义 5 M 是左 S-半模。M 上的一个 S-自同态半环 R（记作用于右）称为亚稠密的，如果对于 $x'_i,x''_i,y_i\in M$，$i=1,2,\cdots,u$，其中 $\{x'_i-x''_i\}_{i=1,2,\cdots,u}$ 是 $\overline{E}$-模 $\widetilde{M}$ 中的无关集，必存在 $a_1,a_2\in R$，使

$$y_i+x'_ia_1+x''_ia_2=x'_ia_2+x''_ia_1 \quad i=1,2,\cdots,u \tag{7}$$

定理 6 R 是完全本原半环，M 是 R 的完全忠实、既约半模。记 $E=End_R(M)$，则 R 是 E-半模 M 的亚稠密自同态半环。

证 由于 M 作为 R-半模是完全忠实的，R 显然同构于 E-半模 M 的一个自同态半环。设 $x'_i,x''_i,y_i\in M$，$i=1,2,\cdots,u$，其中 $\{x'_i-x''_i\}_{i=1,2,\cdots,u}$ 是 $\overline{E}$-无关的。记 $x_i=x'_i-x''_i$ $i=1,2,\cdots,u$。$X_i=\langle\langle x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots x_u\rangle\rangle$。于是必有 $x_i\notin X_i$。根据命题5，对每个 i，$1\leqslant i\leqslant u$，存在 a'_i,a''_i，使 $x_ia'_i\neq x_ia''_i$ 而 $a'_i\sigma(X_i)a''_i$。即有 $(x'_i-x''_i)a'_i\neq(x'_i-x''_i)a''_i$ 或

$x'_ia'_i+x''_ia''_i\neq x''_ia'_i+x'_ia''_i$。因$M$是既约$R$-半模，故有$b'_i,b''_i\in R$，使$y_i+(x'_ia'_i+x''_ia''_i)b'_i+(x''_ia'_i+x'_ia''_i)b''_i=(x''_ia'_i+x'_ia''_i)b'_i+(x'_ia'_i+x''_ia''_i)b''_i$。即$y_i+x_ia'_ib'_i+x_ia''_ib''_i=x_ia''_ib'_i+x_ia'_ib''_i$ 而$x_ia'_jb'_j+x_ia''_jb''_j=x_ia'_jb''_j+x_ia''_jb'_j$ $j=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,u$。将最后的$u$个等式两边加起来，就得到

$$y_i+x_i\sum_{j=1}^{u}(a'_jb'_j+a''_jb''_j)=x_i\sum_{j=1}^{u}(a''_jb'_j+a'_jb''_j) \tag{8}$$

我们令$a_1=\sum_{j=1}^{u}(a'_jb'_j+a''_jb''_j)$，$a_2=\sum_{j=1}^{u}(a''_jb'_j+a'_jb''_j)$，$a_1,a_2$即为所求，因为此时(8)可记为$y_i+x'_ia_1+x''_ia_2=x'_ia_2+x''_ia_1$，此式对于$i=1,2,\cdots u$均成立。

另一方面，对于完全本原半环，定理所给的条件不仅是必要的，而且是充分的。我们有

定理 7　若半环R是左S-半模M上的一个亚稠密的自同态半环，则R是完全本原半环。

证　R是S-半模M的自同态半环，即$R\subset End_R(M)$。M作为R一半模当然是完全忠实的。设$x_1,x_2\in M$且$x_1\neq x_2$，则x_1-x_2在$\widetilde{M}$中当然是$\overline{E}$-无关的。因为R是亚稠密的自同态半环，对于任意的$y\in M$，必有$a_1,a_2\in R$，使

$$y+x_1a_1+x_2a_2=x_1a_2+x_2a_1$$

这恰好证明M满足R-既约半模之定义。于是，R是完全本原半环。

最后我们指出，作完全本原半环的特殊情况，当R是本原环时，[1]中已证明了R的忠实、既约模M即是上述意义下的完全忠实、既约半模。而且M与$\widetilde{M}$一致因而$End_R(M)$与$End_R(\widetilde{M})$一致。M是除环$End_R(M)$上的模。对于它，定义1中给出的线性相关与线性无关的概念完全等同于通常的定义。而且定义5意义下的亚稠密对于E-模M的线性变换来说即是环论中的稠密的概念。至此，我们已经看到，从定理6立即可以推得Jacobson—Chevalley稠密定理。

参　考　文　献

[1] 历立德，半环的 Jacobson 根与 Jacobson 关系根，尚未发表，已投《数学年刊》。

[2] Lizuka, K., On the Jacobson radical of a semiring, Tohoku. Math. J(2) 11(1959), 409－421.

[3] Jacobson, N., Structure of rings, Providence R. I 1956.

[4] Herstein, I. N., Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., MAA, no 15(1968).

[5] Grätzer, G., Universal Algebra, Springer－Verlag, New York, 1979.

A Generalization of the Jacobson-Chevalley Density Theorem

By Li Lide (厉立德)

Abstract

In this paper the structure of a completely primitive hemiring is studied. In the meanwhile the Jacobson-Chevalley density theorem is generalized. At first it is shown that a right R-semimodule M (R is a hemiring) is enbedded in an R-semimodule $\widetilde{M}$, which is a group relative to addition. Next a semi-linearly indepenent set (over S) in a S-semimodule is defined. Let R be a S-endomorphism semiring of a left S-semimodule M. of course M is a right R-semimodule and so is $\widetilde{M}$. Set $\overline{E}=\mathrm{End}_R(\widetilde{M})$. R is said to be subdense if for elements x'_i, x''_i, y_i in M. $i=1,2,\cdots,n$, where $\{x'_i-x''_i\}$ $i=1,2,\cdots,n$ are a semi-linearly independent set in $\overline{E}$-semimodule $\widetilde{M}$, there exist elements a_1, a_2 in R such that $y_i+x'_i\ a_1+x''_i a_2=x'_i\ a_2+x''_i a_1$, $i=1,2,\cdots,n$. The main theorem in this paper is that a hemiring R is completely primitive if and only if, it is a subdense endomorphism semiring of a semimodule. In particular R is a ring, then the Jacobson-Chevelley density theorem is obtained immediately.