一类有限阶可解完全群*

郑燕生　柳　放　杨德荣

（北工大二分校四班）

设G是一个群．如果

$$G \cong I_{nn}G = A_{ut}G$$

那么G就称为一个完全群．Hölder 曾经证明，对任意整数$n \geqslant 3$，$n \neq 6$，对称群S_n是完全群．Wielandt 证明，任何一个有限非交换单群的自同构群是完全群．但除S_3和S_4之外，这些有限完全群都不是可解的．本文中，我们将给出一类有限阶可解完全群．为此目的，我们设p为任意素数，并用G_{np}表示素域F_p上一切形如

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & a_1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

的n阶可逆上三角方阵对方阵乘法所成的群．在[1]中们我曾经证明，G_{2p}是完全群．本文中我们要证明，当$n \geqslant 3$，$p > 3$时，G_{np}的自同构群$A_{ut}G_{np}$是完全群．在下面我们将G_{np}简记作G，并将方阵α中的(n, n)系数a_{n-1}记作$l(\alpha)$．显然，

$$l(\alpha \cdot \beta) = l(\alpha) l(\beta),\quad \alpha, \beta \in G\ .$$

此外还可注意，群G中的幺幂方阵的全体形成G中的一个$p^{\frac{n(n-1)}{2}}$阶子群p；群G中的对角形方阵的全体形成一个交换子群K，且有

$$G = PK,\quad P \cap K = \langle 1 \rangle.$$

子群P作为G中唯一的Sylow p—子群来说，是群G中的一个特征子群．由此易见G是可解群．

*推荐人：曾肯成（中国科技大学）

1981年3月30日收到．

引理1：(i)方阵

$$\pi_r=\begin{array}{r}\\ \\ \\ r\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\&&&\cdots\cdots&&&\\0&0&\cdots&1&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&1&\cdots&0\\&&&\cdots\cdots&&&\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&1\end{pmatrix},\quad r=1,2,\cdots,n-1$$

是子群P的一个生成元素；(ii)子群P的中心$C(P)$由一切形如

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&b\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\&&&\cdots\cdots&&\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix},\quad b\in F,$$

的方阵组成；(iii)子群P的换位子群P'由一切形如

$$\begin{pmatrix}1&0&b_{13}&\cdots&b_{1n}\\0&1&0&\cdots&b_{2n}\\0&0&1&\cdots&b_{3n}\\&&\cdots\cdots&&\\0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

的方阵组成。

证明：(i)对方阵的阶数n进行数学归纳法。当$n=2$时，结论显然成立。假设结论对$n-1$阶方阵成立，那么对任意$n-1$阶么幂上三角方阵A来说，n阶方阵

$$\begin{pmatrix}A&O\\0&1\end{pmatrix}$$

可由$\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{n-2}$生成。其次我们有

$$\rho_{n-2}=\pi_{n-2}^{-1}\pi_{n-1}^{-1}\pi_{n-2}\pi_{n-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0&0\\&&&\cdots\cdots&&&\\0&0&0&\cdots&1&0&1\\0&0&0&\cdots&0&1&0\\0&0&0&\cdots&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\rho_{n-3}=\pi_{n-3}^{-1}\pi_{n-2}^{-1}\pi_{n-3}\pi_{n-2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \cdots\cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

等等。如此一直做下去，可得出一组方阵 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{n-1}$，其中 $\rho_{n-1}=\pi_{n-1}$。这样一来任何一个形如

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的方阵 β 可表成

$$\beta=\rho_1^{b_1}\rho_2^{b_2}\cdots\rho_{n-1}^{b_{n-1}}$$

的形式，其中 $b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}$ 是 $n-1$ 维列向量 b 的各个分量。这时由等式

$$\alpha=\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{n-1} & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

容易看出任意方阵 $\alpha\in P$ 可表成方阵 $\pi_r(1\leqslant r\leqslant n-1)$ 的乘积

(ii)的证明。设

$$r=\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & b_{2n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\in C(P),$$

则对任意 r（$1\leqslant r\leqslant n-1$）有

$$\begin{pmatrix} 1b_{12}\cdots b_{1r}b_{1r+1}\ \cdots b_1n \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0\ 0\ \cdots 1\ b_{rr+1}+1\cdots b_{rn}+b_{r+1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0\ 0\ \cdots 0\ 0\cdots 1 \end{pmatrix}=\pi_r r=r\pi_r=\begin{array}{c} \qquad\qquad r+1 \\ \begin{pmatrix} 1\,b_{12}\cdots b_{1r+1}+b_{1r}\cdots b_{1n} \\ 0\ 1\ \cdots b_{2r+1}+b_{2r}\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0\ 0\ \cdots b_{rr+1}+1\ \ \cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0\ 0\ \cdots 0\qquad\qquad \cdots 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

因而可知应有

$$b_{ir}=0,\ (i=1,2\cdots,r-1),\ b_{r+1\,j}=0,\ (j=r+2,\cdots,n),$$

命 r 取遍 1 到 $n-1$ 的一切正整数值，便可看出

$$r=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

反之容易看出，一切此种形状的方阵都在 $C(P)$ 之内。

(iii)的证明。$n-1$个上次对角线系数全为零的么幂上三角方阵的全体的N显然是P的一个正规子群。由等式

$$\pi_r^{-1}\pi_s^{-1}\pi_r\pi_s=1,\quad s\geqslant r+2$$

及
$$\pi_r^{-1}\pi_{r+1}^{-1}\pi_r\pi_{r+1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}=\pi_{r,r+1}\in N$$

易见 P/N 是一个交换群，因而有 $P'\subseteq N$。另一方面，用(i)的证明中所用过的方法可证方阵 $\pi_{r,r+1}$ $(1\leqslant r\leqslant n-1)$生成$N$，所以我们有 $P'=N$。引理 1 证毕。

下面我们用 H_r 表示由一切形如

$$\begin{pmatrix} I_r & D \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

的方阵所组成的 P 的子群。

引理 2．H_r 是 P 中的一个极大 Abel 正规子群，且有$H_r\lhd G$及

$$H_r=\langle \alpha^{-1}\pi_r\alpha \mid \alpha\in P\rangle$$

证明： 易见 H_r 是 Abel 群，且在整个群G中正规．任取

$$\begin{pmatrix} A_{r\times r} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\in P,\quad \begin{pmatrix} I_r & D \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}\in H_r\,.$$

由等式

$$\begin{pmatrix} A_{r\times r} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & D \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & D \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{r\times r} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

可得 $AD=DC$。再由 D 的任意性可知应有

$$A=I_r,\quad C=I_{n-r}\ ,$$

即

$$C_p(H_r)=H_r,$$

从而可知 H_r 是 P 中的极大 Abel 正规子群。最后注意子群

$$H_r^*=\langle a^{-1}\pi_r a \mid a\in P\rangle$$

是 P 中的一个包含在 H_r 之内的正规子群。像在引理 1 的证明中所作过的那样，命

$$\rho_r=\pi_r,\quad \rho_{r-1}=\pi_{r-1}^{-1}\rho_r^{-1}\pi_{r-1}\rho_r,\cdots,\rho_2=\pi_1^{-1}\rho_2^{-1}\pi_1\rho_2$$

并作乘积

$$\beta_1=\rho_1^{b_1}\rho_2^{b_2}\cdots\rho_r^{b_r}$$

可知 H_r^* 包含一形形如

$$\beta_1=\begin{pmatrix} I_r & B_1 \\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}$$

的方阵，其中

$$B_1=\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_r & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{r\times(n-r)}.$$

作换位元。

$$\beta_2=\beta_1^{-1}\pi_{r+1}^{-1}\beta_1\pi_{r+1},\quad \beta_3=\beta_2^{-1}\pi_{r+2}^{-1}\beta_2\pi_{r+1},\cdots,\beta_{n-r}=\beta_{n-r-1}^{-1}\pi_{n-1}^{-1}\beta_{n-r-1}\pi_{n-1},$$

可知 H_r^* 包含一切形如

$$\beta_k=\begin{pmatrix} I_r & B_k \\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix},\qquad k=1,2,\cdots,n-r$$

的方阵，其中

$$\beta_k=\begin{array}{c} \qquad\qquad k \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_r & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{r\times(n-r)}\end{array}$$

再将这样一些方阵相乘，便知 $H_r\subseteq H_r^*$.因此我们有

$$H_r=H_r^*=\langle a^{-1}\pi a \mid a\in P\rangle.$$

引理 2 证毕。

引理 3．设 $p>3$。如果 P 中的一个极大 Abel 正规子群 H 不等于引理 2 中所述的 $n-1$ 个子群 H_r 之一，则

$$(G:N_G(H))>2,$$

其中 $N_G(H)$ 表示子群 H 在群 G 中的正规化子。

证明：用反证法。如果$(G:N_G(H))\geqslant 2$，则$N_G(H)\triangleright G$。取子群H中那样一个方阵h，使它有一个非零非对角线系数$a_{i_{r+1}}\neq 0$，而H中的每个方阵的非零非对角线系数的第二足标都不小于$r+1$。由于$H\triangleright P$，必要时将h换成一个与之在P下共轭的适当元素后可设$i=1$，并且

$$a_{1r+1}=a,\quad a_{1r+2}=a_{1r+3}=\cdots=a_{1n}=0$$

即

$$h=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} & & r+1 & & \end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&a&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0&*&*&\cdots&*\\ & & & &\cdots\cdots\cdots& & & & \\0&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&*\\0&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\end{array},\quad a\neq 0.$$

取

$$\gamma=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&4&0&\cdots&0\\0&0&4&\cdots&0\\ & &\cdots\cdots\cdots& & \\0&0&0&\cdots&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\ & &\cdots\cdots\cdots& & \\0&0&0&\cdots&2\end{pmatrix}^2\in N_G(H),$$

并与h作换位元得

$$h_1=h^{-1}\gamma^{-1}h\gamma=\begin{array}{c}\begin{array}{c}r+1\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&3a&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\ & & & &\cdots\cdots\cdots& & & & \\0&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\end{array}=\begin{pmatrix}I_r&B_1\\0&I_{n-r}\end{pmatrix}\in H$$

作高阶换位元

$$h_j=(\cdots((h_1,\pi_{r+1}),\pi_{r+2})\cdots,\pi_{r+j-1})$$

可知H中含有$n-1$个元素

$$h_j=\begin{array}{c}\begin{array}{c}r+j\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&3a&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\ & & &\cdots\cdots\cdots& & & \\0&0&\cdots&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\end{array}=\begin{pmatrix}I_r&B_j\\0&I_{n-r}\end{pmatrix}$$

任取

$$h=\begin{pmatrix}I_r&B\\0&C\end{pmatrix}\in H$$

由H的可交换性有

$$hh_j=h_jh\quad(1\leqslant j\leqslant n-r)$$

从而有

$$B_jC=B_j$$

由于$3a\neq 0$，从这里立即看出应有$C=I_{n-r}$。这也就是说，H中的每一个元素都包含在H_r之内。但根据引理中的条件，H是P中的极大Abel正规子群，故应有$H=H_r$。然而这又与引理中的另一条件相矛盾，故知应有

$$(G:N_G(H))>2$$

引理3证毕。

在下面我们用τ表示群G到其自身的那样一个满单映射，对G中任意元素α有

$$\alpha^\tau=l(\alpha)J\alpha^{-1}J,$$

其中

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

引理4. τ是G的一个自同构且有

$$A_{ut}G=I_{nn}G+\tau I_{nn}G.$$

证明： 任取$\alpha,\beta\in G$，从等式

$$(\alpha\beta)^\tau=l(\alpha\beta)J(\alpha\beta)'^{-1}J=l(\alpha\beta)J\alpha'^{-1}\beta'^{-1}J$$

及

$$\alpha^\tau\beta^\tau=l(\alpha)J\alpha'^{-1}Jl(\beta)\beta'^{-1}J=l(\alpha\beta)J\alpha'^{-1}\beta'^{-1}J$$

可知τ是G的一个自同构。其次，由于$H_1^\tau=H_{n-2}$而H_1在G的内自同构下不变，故知τ不是G的内自同构。任取$\sigma\in A_{ut}G$。定义

$$\mu=\begin{cases}\sigma, & \text{如果 } H_1^\sigma=H_1\\ \sigma\tau, & \text{如果 } H_1^\sigma=H_{n-1}\end{cases}$$

由于$H_{n-1}^\tau=H_1$，易见μ是G的一个自同构且有

$$H_1^\mu=H_1$$

由于$\tau^2=1$，我们只要证明μ是G的一个内自同构就行了。

首先我们证明自同构μ使每一个子群H_r不变。根据引理2，$H_r\lhd G$，并且是P中的一个极大Abel正规子群，由于$P\,char\,G$，故有$P^\mu=P$，并且子群H_r在μ下的像H_r^μ仍是P中的一个极大Abel正规子群，且应有$H_r^\mu\lhd G$，即应有$(G:N_G(H_r^\mu))=1$。因此，根据引理3可知应有$H_r^\mu=H_{r'}^1$。但

$$P^{n-r}=|H_1\cap H_r|=|H_1\cap H_r^\mu|=|H_1\cap H_{r'}|=P^{n-r'}$$

故知应有$r=r'$，即

$$H_r^\mu=H_r,\quad(1\leqslant r\leqslant n-1).$$

从H_r在μ下不变这一事实我们看到对每个$1\leqslant r\leqslant n-1$有

$$H_r^\mu\in H_r.$$

为了证明μ是G的内自同构，我们给G的一系列内自同构$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$，使$P$的每个生成元$\pi_r$在乘积$\mu\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$下不变。为此目的，设

$$\pi_1^\mu=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

由于$H_1\nsubseteq P'$，而P'作为P的一个特征子群在μ的作用下不变，故

$$H_1^\mu=<a^{-1}\pi_1 a\,|\,a\in P>\nsubseteq P',$$

因此可知$a\neq 0$。命$\mu_1=\mu\sigma_1$，其中σ_1是由方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a_1^{-1}b_{13} & -a_1^{-1}b_{14} & \cdots & -a_1^{-1}b_{1n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

所诱导的G的内自同构，则

$$\pi_1^{\mu_1}=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},\quad a_1\neq 0$$

现设

$$\pi_2^{\mu_1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & C_{13} & C_{14} & \cdots & C_{1n} \\ 0 & 1 & a_2 & a_{24} & \cdots & C_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

同上理有$a_2\neq 0$，再命$\mu_2=\mu_1\sigma_2$，其中σ_2是由方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2^{-1}c_{13} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a^{-1}c_{24} & \cdots & 0 \\ & & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

所诱导的群G的内自同构群，则有

$$\pi_2^{\mu_2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},\quad a_2\neq 0,$$

且仍有

$$\pi_1^{\mu_2}=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

再设

$$\pi_3^{\mu_2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & d_{24} & d_{25} & \cdots & d_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & d_{35} & \cdots & d_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},\quad a_3\neq 0$$

将μ_2作用在等式

$$\pi_1\pi_3=\pi_3\pi_1$$

的两端且比较两端系数可知$d_{2j}=0$，$(j=4,5,\cdots,n)$，即

$$\pi_3^{\mu_2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & d_{35} & \cdots & d_{3n} \\ & & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

命$\mu_3=\mu_2\sigma_3$，其中σ_3是由方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3^{-1}d_{14} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_3^{-1}d_{35} & \cdots & -a_3^{-1}d_{3n} \\ & & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

所诱导的群G的内自同构，则有

$$\pi_3^{\mu_3}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&*&\cdots&*\\0&1&0&0&0&\cdots&0\\0&0&1&a_3&0&\cdots&0\\&&&\cdots\cdots&&&\\0&0&0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix},$$

且仍有

$$\pi_1^{\mu_3}=\begin{pmatrix}1&a_1&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\&&\cdots\cdots&&\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix},\qquad \pi_2^{\mu_3}=\begin{pmatrix}1&0&0&*&\cdots&*\\0&1&a_2&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\&&\cdots\cdots&&&\\0&0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

依此类推，最后可得$\mu_{n-1}=\mu\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1}$，使$\pi_r^{\mu_{n-1}}$具有型状

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0&*&\cdots&*\\0&1&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\&&&\cdots\cdots&&&&\\0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&1&a_r&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\\&&&\cdots\cdots&&&&\\0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix},\quad a_r\neq0,\ (1\leqslant r\leqslant n-1)$$

但当$s-r\geqslant2$时π_r与π_s可交换，故有

$$\pi_r^{\mu_{n-1}}\pi_s^{\mu_{n-1}}=\pi_s^{\mu_{n-1}}\pi_r^{\mu_{n-1}},\quad s-r\geqslant2,$$

利用这一事实立即不难看出，在方阵$\pi_r^{\mu_{n-1}}$中，除$(1,n)$系数外，其余一切未经标明的非对角线系数均等于零，即有

$$\pi_r^{\mu_{n-1}}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0&\cdots&b_r\\0&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\&&&\cdots\cdots&&&\\0&0&\cdots&1&a_r&\cdots&0\\&&&\cdots\cdots&&&\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&1\end{pmatrix},\quad(1\leqslant r\leqslant n-1)$$

最后注意$C(P)$在群G中的中心化子$C_G(C(P))$是G中的一个特征子群，它恰由G中一切满足条件$l(\alpha)=1$的方阵α组成。特别，取

$$\alpha_r=r\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&1&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\in C_G(C(P))$$

则

$$\alpha_r^{-1}\pi_r\alpha_r=\pi_r^{-1}$$

将μ_{n-1}作用在这个等式的两端并比较（1,n）的系数得

$$b_r = -b_r$$

从而可知

$$\pi_r^{\mu_{n-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_r & \cdots & 0 \\ & & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} r.$$

最后令$\mu_n = \mu_{n-1}\sigma_n$，其中$\sigma_n$是由方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & a_1^{-1} & & & \\ & & a_1^{-1}a_2^{-1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \prod_{i=1}^{n-1} a_i^{-1} \end{pmatrix}$$

所决定的G的内自同构，则有

$$\pi_r^{\mu_n} = \pi_r \quad (1 \leqslant r \leqslant n-1)$$

即$\mu_n|_P = 1$。现在再来考虑在K上的作用。取

$$\kappa_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_{n-1} \end{pmatrix},$$

并设

$$\kappa^{\mu_n} = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & a_1 & \cdots & b_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

将μ_n作用在等式

$$\pi_1 \kappa_0 \pi_1 = \kappa_0$$

的两端有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+a_1+b_{12} & b_{13}+b_{23} & \cdots & b_{1n}+b_{2n} \\ 0 & a_1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & a_1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

由此可知

$$a_1 = -1, \quad b_{2j} = 0, \quad (j = 3, 4, \cdots, n).$$

再将μ_n作用在等式

$$\pi_r^{-1}\kappa_0\pi_r = \kappa_0 \quad (r = 2, 3, \cdots, n-1)$$

的两端可以推知

$$a_i = -1, \quad (i = 2, 3, \cdots, n-1)$$

并且除b_{1n}外，$\kappa_0^{\mu_n}$中的一切非对角线系数均为零。命$\mu_{n+1} = \mu_n\sigma_{n+1}$，其中$\sigma_{n+1}$是由$C(P)$中的方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2}b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所决定的G的内自同构，则

$$\kappa_0^{\mu_{n+1}}=\kappa_0,\ \pi_r^{\mu_{n+1}}=\pi_r,\ (1\leqslant r\leqslant n-1)。$$

现设

$$\kappa=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

是K中的任意元素，并设

$$\kappa^{\mu_{n+1}}=\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & a_1' & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ 0 & 0 & a_2' & \cdots & c_{3n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}' \end{pmatrix},$$

我们把μ_{n+1}作用在等式

$$\kappa_0\kappa\kappa_0=\kappa$$

的两端并比较系数可得$c_{1j}=0$，$(j=2,3,\cdots,n)$。再将μ_{n+1}作用在等式

$$\kappa^{-1}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & & r & & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots\cdots\cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}\kappa=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & & r & & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{r-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots\cdots\cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

的两端并比较系数可得$c_{ij}=0$，$(i=2,3,\cdots,n-1,j=2,3,\cdots,n)$ 即有

$$\kappa^{\mu_{n+1}}=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

最后将μ_{n+1}作用在等式

$$\kappa^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\kappa=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

的两端有

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 & \cdots & a'_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

故应有 $a_i = a'_i\,(i=1,2,\cdots,n-1)$，从而可知 $\mu_{n+1}|K=1$。但 $G=KP$，这就表明 μ_{n+1} 是整个群 G 的单位自同构，从而可知

$$\mu = \sigma_{n+1}^{-1}\sigma_n^{-1}\cdots\sigma_1^{-1}$$

是 G 的内自同构且有

$$A_{ut}G = I_{nn}G + \tau I_{nn}G\,.$$

引理4证毕。

定理。当 $P\geqslant 3$ 时，群 G 的自同构群 $A_{ut}G$ 是完全群。

证明：在下面我们将 $A_{ut}G$ 简记作 G_1。对于 G 中的任意子群 X，我们用 $\bar{X}$ 表示由 X 中的元素所决定的 G 的内自同构所组成的 $A_{ut}G$ 的子群。特别我们有 $\bar{G}=I_{nn}G$。

容易看出 G_1 是可解的且有 $C(G_1)=1$。为了证明 G_1 是完全群，作为第一步我们先证明 $\bar{G}\,char\,G_1$。为此目的，注意由 $(G_1:\bar{G})=2$ 可知 $\bar{P}\,char\,G_1$。由于 $G_1=\bar{G}+\tau\bar{G}$，故由 $\bar{H}_r \lhd \bar{G}$ 及

$$H^{\tau}=H_{n-1}\ ,\ \ H_{n-1}^{\tau}=H_1,$$

我们看到应有

$$N_{G1}(\bar{H}_1)=N_{G1}(\bar{H}_{n-1})=\bar{G}\ ,$$

因此，为了证明 $\bar{G}$ 在 G_1 的任意自同构 φ 的作用下不变，我们只要证明 $\bar{H}_1{}^{\varphi}=\bar{H}_1$ 或 $\bar{H}_1{}^{\varphi}=\bar{H}_{n-1}$ 就行了。再考虑到当 $r\neq 1$ 或 $n-1$ 时

$$|\bar{H}_1|=|\bar{H}_{n-1}|<|\bar{H}_r|$$

这一事实，又只要证明 $\bar{H}_1{}^{\varphi}$ 必等于某个 $\bar{H}_r$ 就够了。我们用反证法来做到这一点。注意 $\bar{H}=\bar{H}_1{}^{\varphi}$ 是 $\bar{P}$ 中的一个极大Abel正规子群，并且有

$$|N_{G_1}(\bar{H})|=|N_{\bar{G}}(\bar{H})|+|N_{\tau\bar{G}}(\bar{H})|\ .$$

如果 $\bar{H}$ 不等于 $n-1$ 个子群 $\bar{H}_r$ 之一，则据引理3有

$$|N_{\bar{G}}(\bar{H})|<\frac{1}{2}|G|.$$

为了估计右端的第二个项，注意如果用 $\tau\bar{G}$ 中某个元素 $\sigma\tau$，$(\sigma\in\bar{G})$ 去作 $\bar{H}$ 的共轭变形时子群 $\bar{H}$ 保持不变，那末这意味着我们有

$$H^{\sigma\tau}=H$$

亦即

$$H^{\sigma}=H^{\tau}.$$

但子群 H 和 H^{τ} 或者在 G 的内自同构群下不可递或者恰有 G 的 $|N_G(H)|$ 个内自同构 σ 将前者映成后者，所以我们有

$$|N_{\tau G}(\bar{H})|\leqslant|N_G(H)|<\frac{1}{2}|G|\ ,$$

从而有

$$|G|=|N_{G1}(\bar{H}_1)|=|N_{G1}(\bar{H})|<|G|$$

这一矛盾说明应有$\bar{H}_1^{\varphi}=\bar{H}_1$或$\bar{H}_1^{\varphi}=\bar{H}_{n-1}$，从而可知应有$\bar{G}charG_1$．

现在我们再来证明$AutG_1=I_{nn}G_1$．为了书写方便计，我们引进如下的记法．对任意$\alpha\in G$，我们用σ_α表示由α所决定的G的内自同构（$\sigma_\alpha\in\bar{G}$）．由于$\bar{G}charG_1$作对任意$\varphi\in AutG_1$和$\alpha\in G$有

$$\sigma_\alpha^\varphi=\sigma_{\alpha'}\qquad \alpha'\in G.$$

并且由

$$\sigma_{(\alpha\beta)'}=\sigma_{\alpha\beta}^{\varphi}=(\sigma_\alpha\sigma_\beta)^\varphi=\sigma_\alpha^\varphi\sigma_\beta^\varphi=\sigma_{\alpha'}\sigma_{\beta'}=\sigma_{\alpha'\beta'}$$

可知映射

$$\mu:\alpha\to\alpha'$$

是G的一个自同构，即有$\mu\in G_1$．如果把由μ所诱导的G_1的内自同构记作φ_μ．并命$\psi=\varphi\varphi_\mu^{-1}$，则$\psi|_{\bar{G}}=1$．现在我们再来考察$\psi$在$\tau\in G_1$上的作用．

由于

$$G_1=\bar{G}+\tau\bar{G},$$

而$\bar{G}^\psi=\bar{G}$，故应有

$$\tau^\psi=\tau\sigma_\gamma,\quad \gamma\in G$$

将ψ作用在等式

$$\tau\sigma_\alpha\tau=\sigma_\alpha^\tau$$

的两端我们得到

$$\tau\sigma_\gamma\sigma_\alpha\tau\sigma_\gamma=\sigma_\alpha\tau,$$

或

$$\sigma_{(\gamma\alpha)}\tau_\gamma=\sigma_\alpha\tau,$$

从而可知应有

$$(\gamma\alpha)^\tau\gamma=\sigma_\alpha\tau$$

或

$$\gamma^\tau\beta=\beta\gamma^{-1},\quad(\beta=\alpha^\tau),$$

由于β可以是G中的任意元素，从这个等式立即可以推得$\gamma=1$，亦群有

$$\pi^\psi=\tau.$$

但G_1由τ与$\bar{G}$生成，故应在整个群G_1上有$\psi=1$，从而可知

$$\varphi=\varphi_\mu\in I_{nn}G_1.$$

定理证毕．

本文是在中国科学技术大学曾肯成教授的亲切指导下完成的，谨此致谢．

参 考 文 献

[1] 郑燕生，杨德荣，完全群的几个例子，数学通报，11(1980)，21—29．

[2] Passman, D, Permutation Groups, Yale, 1968.

On a Class of Complete Solvable Groups of Finite Order

By Zheng Yiansheng, Liu Fang, Yiang Derong

Abstract

It has been shown in the present paper that the automorphism group of the group of upper triangular matrices with entries in the finite prime fieid Ep(P>3) with identity (1, 1)—entry is solvable and complete.