赋范线性空间的第二对偶空间*

李容录

（哈尔滨工业大学）

1973年，R.D. Mauldin[1]求得了$C[0,1]$的第二对偶空间元素之表示。但是对一般的赋范线性空间，这个问题尚未得到解决。

本文利用Г.М.Фихтенгольц，Л.В.Канторович和H. Hildebrandt关于有界函数空间$B(S)$上的表现定理（以下简称FKH定理，[2]，IV.5.3)，对一般的赋范线性空间解决其第二对偶空间的表示问题。

这个问题的解决对一类无限多Banach空间来说其上有界线性泛函的表示问题按同一的格式得到了十分简单的解决。

§1

X是赋范线性空间，S是X的闭单位球，α、β等表示标量域Φ中的数。X上的有界线性泛函取值于Φ。其他不加解释的记号同[2]。

定义1　若$f\in B(S)$适合

$$f(s+t)=f(s)+f(t),\quad f(\alpha s)=\alpha f(s)\quad (s,t,s+t,\ \alpha s\in S),$$

则称f为$B(S)$中的线性函数。

引理1　$B(S)$中线性函数的全体A构成$B(S)$的闭子空间，且和X^*等距同构。

证　对$x^*\in X^*$命

$$(Hx^*)(s)=x^*(s),\quad s\in S, \tag{1}$$

则H显然是自X^*至$B(S)$的子空间A上的等距同构映射。证毕。

定理1　X是赋模线性空间，S是X的闭单位球。于是自X^*至标标量域Φ的映射x^{**}属于X^{**}当且仅当有$\mu\in ba(S)$适合

$$x^{**}(x^*)=\int_s x^*(s)\mu(ds),\quad x^*\in X^*. \tag{2}$$

*1981年1月28日收到。

推荐者：吴从炘（哈尔滨工业大学）。

证　充分性　设有$\mu\in ba(S)$。由[2]之Ⅲ。2.17，$s\in S\Rightarrow|x^*(s)|\leqslant\|x^*\|$表明$x^*(s)$在$S$上$\mu$－可积，亦即$x^{**}$是自$X^*$至$\Phi$的映射。由于

$$\int_S(x^*+\alpha y^*)(s)\mu(ds)=\int_S x^*(s)\mu(ds)+\alpha\int_S y^*(s)\mu(ds),$$

$$\left|\int_S x^*(s)\mu(ds)\right|\leqslant\int_S|x^*(s)|\nu(\mu,ds)\leqslant\|x^*\|\nu(\mu,S),$$

所以$x^{**}\in X^{**}$。

必要性　设$x^{**}\in X^{**}$。由于引理1，X^{**}和A^*通过下式等距同构：

$$a^*(Hx^*)=x^{**}(x^*),\quad x^*\in X^*. \tag{3}$$

另一方面，由Hahn—Banach定理，有$b^*\in(B(S))^*$适合

$$b^*(f)=a^*(f),\quad f\in A;\quad\|b^*\|=\|a^*\|. \tag{4}$$

又由FKH定理，有$\mu\in ba(S)$使

$$b^*(f)=\int_S f(s)\mu(ds),\quad f\in B(S);\quad\|b^*\|=\nu(\mu,S). \tag{5}$$

于是由(1)、(3)、(4)、(5)知$\|x^{**}\|=\nu(\mu,S)$和(2)式成立。证毕。

系1　对于$x^{**}\in X^{**}$有$\mu\in ba(S)$适合(2)式及$\|x^{**}\|=\nu(\mu,S)$。

证　定理必要性证明。

系2　赋范线性空间X是自反的当且仅当对每个$\mu\in ba(S)$有$y\in X$适合

$$x^*(y)=\int_S x^*(s)\mu(ds),\quad x^*\in X^*. \tag{6}$$

证　必要性　由定理充分性证明知，对每个$\mu\in ba(S)$，(6)式右端必属于X^{**}。命其为x^{**}。于是由X之自反性可知有$y\in X$使得$x^{**}(x^*)=x^*(y)$，$x^*\in X^*$。

充分性　设对每个$\mu\in ba(S)$有$y\in X$使(6)成立。由定理，对每个$x^{**}\in X^{**}$有$\mu\in ba(S)$使(2)成立，所以有$y\in X$使$x^{**}(x^*)=x^*(y)$，$x^*\in X^*$。
证毕。

今设Y是X的子空间。命$\backsim$为X^*上如此一个二元关系：

$$x_1^*\backsim x_2^*\Longleftrightarrow x_1^*(y)=x_2^*(y),\quad y\in Y. \tag{7}$$

易知$\backsim$是一等价关系。若以X_0^*表示将X^*依$\backsim$分类而得的商集，则有下面著名的Dieudonné定理。

引理2　Y是赋范线性空间X的子空间。于是X_0^*在适当的线性运算和范数之下作成X^*关于等价关系(7)的商空间，且和Y^*等距同构。

证　由于[3]，只须证明当$\xi\in X_0^*$时$\|\xi\|=inf\{\|x^*\|:x^*\in\xi\}$。设$\xi$中泛函在$Y$上的限制为$y^*$，则显然有$\|y^*\|\leqslant\|x^*\|$，$x^*\in\xi$。但因Hahn—Banach定理，有$y^*$的保范扩张属于$\xi$。于是得证。

现在对 μ, $\omega\in ba(S)$ 命

$$\mu\backsim\omega\Longleftrightarrow\int_S x^*(s)\mu(ds)=\int_S x^*(s)\omega(ds),x^*\in X^*,\tag{7'}$$

则由引理2立得如下 X^{**} 的表现定理。

定理2　赋范线性空间 X 的第二对偶空间 X^{**} 同 $ba(S)$ 关于等价关系（7′）的商空间 E 通过下式等距同构：

$$\mu\in e(x^{**})\in E\Rightarrow x^{**}(x^*)=\int_S x^*(s)\mu(ds),\ \ x^*\in X^*.\tag{8}$$

证　由引理1，X^* 可视为 $B(S)$ 的子空间。
于是由定理1及引理2得证。

系　κ 是自 X 至 X^{**} 的自然嵌入。于是自 X 至标量域的映射 x^* 是有界线性泛函当且仅当 x^* 满足积分方程组

$$x^*(x)=\int_S x^*(s)\mu_x(ds),\ \ x\in X,\tag{9}$$

其中 $\mu_x\in e(\kappa x)$。

证　$(\kappa x)(x^*)=x^*(x)$, $x^*\in X^*$。于是由定理立得。

§2

R.D. Mauldin[1]在承认连续统假设的前提之下对 Banach 空间 $ca(S,\Sigma)$ 就其势为 $2^{\aleph_0}$ 情形（如 $ca([0,1])$）给出了有界线性泛函的表示。下面定理3之系则求得了一般情形之下的结果，并且不需要连续统假设。

定理3　S是任一集合，Σ 的 S 的一些子集所作的代数。于是 $F\in ba(S,\Sigma)^*$ 当且仅当有 $\lambda\in ba(T)$，T是 $B(S,\Sigma)$的闭单位球，使得

$$F(\mu)=\int_T\left(\int_S x(s)\mu(ds)\right)\lambda(dt),\ \ \mu\in ba(S,\Sigma).$$

证　对于 $X=B(S,\Sigma)$应用§1之定理1，由 FKH 定理([2]，IV.5.1)立得。

系　S 是任一集，Σ 是 S 的一些子集所作 σ…代数。于是 $F\in ca(S,\Sigma)^*$当且仅当有 $\lambda\in ba(T)$，T是$B(S,\Sigma)$的闭单位球，使得

$$F(\mu)=\int_T\left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda(dt),\ \ \mu\in ca(S,\Sigma).$$

证　$ca(S,\Sigma)$是$ba(S,\Sigma)$的闭子空间。于是由 Hahn-Banach 定理立得。

注　R.D.Mauldin[4]在承认连续统假设的前提之下对于 $ca(S,\Sigma,X)$，其中 Banach 空间X具有 Radon-Nikodým 性质，就其势为 $\aleph_1$的情形求得了有界线性泛函的表示。又 Ion chitescu[5]对于 $ca(S),\Sigma,X)$就其一般情形给出了有界线性泛函的表示。但是[5]的结果要用到 X^*，并且表达式本身不够鲜明，就X是标量域的情形而言也显得过于复杂。

将§1之定理2应用于$X=B(S,\Sigma)$的情形，由定理3得到

定理4 $ba(S,\Sigma)^*$同$ba(T)$（T是$B(S,\Sigma)$的闭单位球）关于等价关系

$$\lambda\backsim\omega\Longleftrightarrow\int_T\left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda(dt)=\int_T\left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\omega(dt),\quad \mu\in ba(S,\Sigma)$$

的商空间E通过下式等距同构：

$$\lambda\in e(F)\in E\Rightarrow F(\mu)=\int_T\left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda dt),\quad \mu\in ba(S,\Sigma).$$

显然，对于$ca(S,\Sigma)^*$也有类似的结果。

定理5 S是拓扑空间，则$F\in rba(S)^*$当且仅当有$\lambda\in ba(T)$，T是$C(S)$的闭单位球，使

$$F(\mu)=\int_T\left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda(dt),\quad \mu\in rba(S).$$

证 对于$X=C(S)$应用定理1，由[2]之IV。6.2立得。

定理6 S是紧Hausdorff空间，则$F\in rca(S)^*$当且仅当有$\lambda\in ba(T)$，T是$C(S)$的闭单位球，使得

$$F(\mu)=\int_T\left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda(dt),\quad \mu\in rca(S).$$

证 对于$X=C(S)$应用定理1，由[2]之IV.6.3立得。

系 $F\in V_0[a,b]^*$当且仅当有$\lambda\in ba(T)$，T是$C[a,b]$的闭单位球，使得

$$F(f)=\int_T\left(\int_a^b t(s)df(s)\right)\lambda(dt),\quad f\in V_0[a,b].$$

证 由熟知的Riesz定理立得。

对于空间$rba(S)^*$、$rca(S)^*$及$V_0[a,b]^*$不难给出类似定理4的等距同构表现。

关于有界变差函数空间上的表现定理，虽有一些结果如Ю.А.Шрейдер[6]，却像[2]曾经指出过的，至今还没有一个简单而自然的结果。
下面给出的结果至少可说是简单的。

在区间$[a,b]$上命

$\sum=\{(c,d]:a<c<d\leqslant b\}\cup\{[a,d\}:a<d\leqslant b\}$,

则Σ是代数。

定理7 $F\in V[a,b]^*$当且仅当有$\lambda\in ba(T)$，其中T是$B([a,b],\Sigma)$的闭单位球，和标量α使

$$F(f)=\int_T\left(\int_a^b t(s)df(s)\right)\lambda(dt)+\alpha f(a+),\quad f\in V[a,b].$$

证 由[2]之IV.12，$V[a,b]$和$ba([a,b],\Sigma)\oplus\Phi$等距同构。又$ba([a,b],\Sigma)$和$V_0[a,b]$通过下式等距同构：

$\forall f\in V_0[a,b]\ \exists\mu\in ba([a,b],\Sigma)\ni f(d)=\mu([a,d]),\ a<d\leqslant b.$

于是由定理3得证。

对于$L_\infty(S,\Sigma,\mu)^*$也可以给出如下新结果。

定理8　(S,Σ,μ)是σ一有限的非负测度空间，则$F\in L_\infty(S,\Sigma,\mu)^*$当且仅当有$\lambda\in ba(T)$。$T$是$L_1(S,\Sigma,\mu)$的闭单位球，使得

$$F(f)=\int_T\left(\int_S t(s)f(s)\mu(ds)\right)\lambda(dt),f\in L_\infty(s,\Sigma,\mu).$$

证 由定理1及[2]之IV.8.5立得。

我们要指出，本节使用的方法适用于无限多个Banach空间。这只须指出如下一个事实便足够了：无限维的$ba(S,\Sigma)$不是自反的，所以诸空间$ba(S,\Sigma)^*$，$ba(S,\Sigma)^{**}$，…互不相同。由$B(S,\Sigma)$出发，这一列空间都可以得到表现。

作者对业师吴从炘教授的指导表示衷心的感谢。

参　考　文　献

[1] Mauldin, R.D., A Representation Theorem for the Second dual ofC[0,1, *Studia Math.* TXLVI, (1973), 197—200.

[2] Danford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, PartI: General theory, New york (1958).

[3] 李容录，Orlicz 空间上有界线性泛函的一般形式，哈尔滨工业大学学报3(1980)。

[4] Mauldin, R.D., The Continuum Hypothesis, Spaces, *Illinois* J.*Math*, 19(1975), 33—40.

[5] Ion Chitescu, The Conjugate space of the Space of measures, *Rev.* ROUM. *Math. Pures er Appl.*, Teme XXI, No.10(1976), p.1313—1316.

[6] Шрейдер, Ю.А., Строение Максимальных идеалов в кольцах мер со сверткой матем сб 27 (69)(1950), 297—318.

The Second Duals of the Normed Linear Spaces

By Li Ronglu(李容录)

Abstracf

Theorem. A mapping x^{**} of X^* into scalar field Φ is a linear functional if and only if there exists a $\mu\in ba(S)$ such that

$$x^{**}(X^*)=\int_S x^*(s)\mu(ds),x^*\in X^*.$$

Theorem. $F\in ba(S,\Sigma)^*$ if and only if there exists a $\lambda\in ba(T)$ (T is the closed unit sphere of the space $B(S,\Sigma)$)such that

$$F(\mu)=\int\left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda(dt),\mu\in ba(S,\Sigma).$$