(N) 模 糊 积 分*

赵汝怀

(西安交通大学数学系)

摘　要

本文定义了一种新的模糊积分，它较[2]所定义的模糊积分与 Lebesgue 积分有更多的相似之处。特别是作为人类思维过程的模拟，较[2]更切近于实际。文中研究了这种积分的性质，证明了类似 Lebesgue 积分中 Levi 定理、Fatou 定理等关于积分序列的收敛性定理，给出了把一般的模糊测度空间上的 (N) 模糊积分转化为 R^1 上以 Lebesgue 测度为模糊测度的 (N) 模糊积分的公式。§4中引进了一类特殊的所谓 λ 次可加模糊测度空间，给出了这种测度空间上收敛性的 Eropoв 定理和 Riesz 定理并得到了该空间上的 (N) 模糊积分在积分号下取极限的一些充分条件。

§1 引　言

模糊测度与模糊积分的概念为日本学者菅野道夫于1972年首先提出[2]，其后，展开了和通常积分论相类似的工作[3]～[5]。菅野所定义的模糊测度是把概率空间上的测度去掉可加性而代之以单调性所得到的集函数，而模糊积分只限于对应的模糊测度空间上取值于[0,1]的可测函数。后来，Dan Ralescu 和 Gregory Adams 把菅野的概念进行了推广[6]，从而得到下面的

定义1.1 论域 Ω 上的子集系 $\mathscr{H}$ 叫做单调类，如果它满足：

($\mathscr{H}$1) $\phi\in\mathscr{H}$，$\Omega\in\mathscr{H}$

($\mathscr{H}$2) 若 $A_n\in\mathscr{H}$，$n=1,2,\cdots\{A_n\}$ 单调，则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{H}$

若 $\mathscr{H}$ 还是一个 π 类，则称它为 $\mathscr{K}$ 类。

定义1.2 Ω 上的集函数 R：$\mathscr{H}\to[0,\infty]$ 叫做 $(\Omega,\mathscr{H})$ 上的模糊测度，如果它满足：

($R1$) $R(\phi)=0$

($R2$) $A\subset B\Rightarrow R(A)\leqq R(B)$

($R3$) $\{A_n\}\subset\mathscr{H}$，$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots\Rightarrow R(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}R(A_n)$

($R4$) $\{A_n\}\subset\mathscr{H}$，$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$，$\exists A_i\in\{A_n\}$ 使 $R(A_i)<\infty\Rightarrow R(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n)$
$=\lim\limits_{n\to\infty}R(A_n)$

* 1981年元月6日收到。

相应地称（$\Omega,\mathscr{H}$）为模糊可测空间，（$\Omega,\mathscr{H},R$）为模糊测度空间。

关于模糊积分的定义，[2]与[6]在形式上也不相同，而且[2]是对一个所谓$\mathscr{K}$可测函数（见定义 1.3）来定义的，而[6]则假定被积函数为Ω上的一个 Lebesgue 可测函数。不过[6]中证明了两种定义对于同一测度空间是等价的。为给出这个定义首先有关于$\mathscr{K}$可测函数的

定义1.3 （$\Omega,\mathscr{K}$）上的函数 f：$\Omega\to[0,\infty]$叫做$\mathscr{K}$可测函数，如果对 $\forall\alpha\in[0,\infty]$都有$N_\alpha(f)\in\mathscr{K}$。

其中 $N_\alpha(f)=\{\omega\,|\,f(\omega)>\alpha\}$，叫做 f 的 α 截集。

定义1.4 模糊测度空间（$\Omega,\mathscr{K},R$）上的$\mathscr{K}$可测函数 f 在集合 $A\in\mathscr{K}$ 上的(S) 模糊积分（Sugeno 模糊积分）定义为：

$$(S)\int_A fdR=\sup_{\alpha\geq 0}[\alpha\wedge R(A\cap N_\alpha(f))] \tag{1.1}$$

§2 (N) 模糊积分的定义

定义2.1 模糊测度空间($\Omega,\mathscr{K},R$)上的$\mathscr{K}$可测函数 f 在集合 $A\in\mathscr{K}$上的（N）模糊积分定义为：

$$(N)\int_A fdR=\sup_{\alpha>0}[\alpha R(A\cap N_\alpha(f))] \tag{2.1}$$

当(1.1)和(2.1)中的A取为Ω时，将分别简记之为 $(S)\int fdR$ 和 $(N)\int fdR$。

上面定义的两种积分，差别是显然的。以概率空间($\Omega,\mathscr{F},P$) 及其上函数 $f_1\equiv0.5$，$f_2\equiv2$，$f_3\equiv100$ 在Ω上的积分为例，按 Sugeno 模糊积分有

$$(S)\int f_1dR=0.5$$

$$(S)\int f_2dR=1$$

$$(S)\int f_3dR=1$$

而按(N)模糊积分则为

$$(N)\int f_1dR=0.5$$

$$(N)\int f_2dR=2$$

$$(N)\int f_3dR=100$$

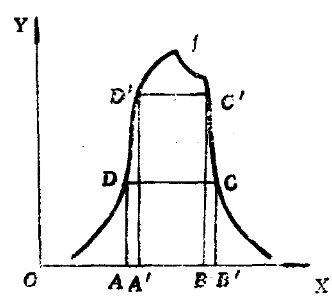

图 1

从某种意义上讲，似乎后者较前者更为合理

从图 1 我们更可直观地看到其概念上的差别：

图中 f 表示半直线 OX 上定义的一个连续函数，模糊测度 R 采用 OX 上的 Lebesgue 测度。于是$(S)\int fdR$ 表示曲线 f “盖在” OX 上的最大正方形 $ABCD$ 的边长，而$(N)\int fdR$ 则表示曲线 f 所“盖住”的矩形的最大面积，即 $A'B'C'D'$ 的面积。

关于两种积分的联系，有如下的

命题2.1 若 f 为$(\Omega,\mathscr{K},R)$上的$\mathscr{K}$可测函数，则

$$(N)\int_A fdR \geqq [(S)\int_A fdR]^2,\quad \forall A\in\mathscr{K} \tag{2.2}$$

证明

$$\begin{aligned}(N)\int_A fdR &= \sup_{a>0}[aR(A\cap N_a(f))]\\ &\geqq \sup_{a>0}\{[a\wedge R(A\cap N_a(f))][a\wedge R(A\cap N_a(f))]\}\\ &= \{\sup_{a>0}[a\wedge R(A\cap N_a(f))]\}^2\\ &= [(S)\int_A fdR]^2 \end{aligned}$$

▮

命题2.2 (N)模糊积分有如下的性质(我们假定下面所用的集合都是$(\Omega,\mathscr{K},R)$上的可测集，而所用的函数均为其上之$\mathscr{K}$可测函数)：

(1)

$$\begin{aligned}&f_1\leqq f_2\Rightarrow(N)\int_A f_1dR\leqq(N)\int_A f_2dR\\ &(N)\int_A(f_1\vee f_2)dR\geqq(N)\int_A f_1dR\vee(N)\int_A f_2dR\\ &(N)\int_A(f_1\wedge f_2)dR\leqq(N)\int_A f_1dR\wedge(N)\int_A f_2dR\end{aligned} \tag{2.3}$$

(2)

$$\begin{aligned}&A_1\subset A_2\Rightarrow(N)\int_{A_1}fdR\leqq(N)\int_{A_2}fdR\\ &(N)\int_{A_1\cup A_2}fdR\geqq(N)\int_{A_1}fdR\vee(N)\int_{A_2}fdR\\ &(N)\int_{A_1\cap A_2}fdR\leqq(N)\int_{A_1}fdR\wedge(N)\int_{A_2}fdR\end{aligned} \tag{2.4}$$

(3)

$$R(A)=0\Rightarrow(N)\int_A fdR=0 \tag{2.5}$$

(4)

$$C\geqq 0\text{ 为常数}\Rightarrow(N)\int_A CdR=CR(A) \tag{2.6}$$

证明 是容易的，从略。

命题2.3 设 f 为$(\Omega,\mathscr{K},R)$上的$\mathscr{K}$可测函数，$A\in\mathscr{K}$，若$(N)\int_A fdR=0$，则 $R\{\omega\in A\mid f(\omega)>0\}=0$

证明 令$A_n=\{\omega\in A\mid f(\omega)>\frac{1}{n}\}$，显然有 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$和 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{\omega\in A\mid f(\omega)>0\}$。于是

$$0=(N)\int_A fdR\geqq(N)\int_{A_n}fdR\geqq(N)\int_{A_n}\frac{1}{n}dR=\frac{1}{n}R(A_n)$$

即对任意 n 都有 $R(A_n)=0$，所以

$$R\{\omega\in A\mid f(\omega)>0\}=R(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}R(A_n)=0$$

▮

命题2.4　设 f 为$(\Omega,\mathscr{K},R)$上的$\mathscr{K}$可测函数，$A\in\mathscr{K}$，若$C\geqq 0$为常数，则

$$(N)\int_A(C\vee f)dR=CR(A)\vee(N)\int_A fdR \tag{2.7}$$

证明　当$C=0$，(2.7)式显然真，假定$C>0$，有

$$\begin{aligned}(N)\int_A(C\vee f)dR&=\sup_{\alpha>0}[\alpha R(A\cap N_\alpha(C\vee f))]\\&=\sup_{\alpha\in(0,C)}[\alpha R(A\cap N_\alpha(C\vee f))]\vee\sup_{\alpha\geqq C}[\alpha R(A\cap N_\alpha(C\vee f))]\\&=CR(A)\vee\sup_{\alpha\geqq C}[\alpha R(A\cap N_\alpha(f))]\end{aligned}$$

因为
$$\sup_{\alpha\in(0,C)}[\alpha R(A\cap N_\alpha(f))]\leqq\sup_{\alpha\in(0,C)}[\alpha R(A)]=CR(A)$$

所以
$$\begin{aligned}(N)\int_A(C\vee f)dR&=CR(A)\vee\sup_{\alpha\in(0,C)}[\alpha R(A\cap N_\alpha(f))]\vee\\&\qquad\sup_{\alpha\geqq C}[\alpha R(A\cap N_\alpha(f))]\\&=CR(A)\vee(N)\int_A fdR\end{aligned}$$
▮

命题2.5　设 f 为$(\Omega,\mathscr{K},R)$上的$\mathscr{K}$可测函数，$A\in\mathscr{K}$，若$C\geqq 0$为常数，则

$$(N)\int_A CfdR=C(N)\int_A fdR \tag{2.8}$$

证明　当$C=0$，(2.8)式显然真，假设$C>0$，有

$$\begin{aligned}(N)\int_A CfdR&=\sup_{\alpha>0}[\alpha R(A\cap N_\alpha(Cf))]\\&=\sup_{C\beta>0}[C\beta R(A\cap N_{C\beta}(Cf))]\\&=\sup_{\beta>0}[C\beta R(A\cap N_\beta(f))]\\&=C(N)\int_A fdR\end{aligned}$$

§3　积分序列的极限

本节讨论$\mathscr{K}$可测函数为(ω)模糊可积的条件，然后研究(N)模糊积分和极限运算的次序交换问题．首先有关于可积性的．

定义3.1　设 f 为$(\Omega,\mathscr{K},R)$上的$\mathscr{K}$可测函数，$A\in\mathscr{K}$，若$(N)\int_A fdR<\infty$则称 f 在 A 上为(N)模糊可积的，记为$f\in L_A(R)$．

定理3.1　设f_1，f_2为$(\Omega,\mathscr{K},R)$上的$\mathscr{K}$可测函数，$f_1\leqq f_2$，$A\in\mathscr{K}$，若$f_2\in L_A(R)$，则$f_1\in L_A(R)$．

证明　由命题2.2即得．

定理3.2　设 f 为$(\Omega,\mathscr{K},R)$上有界$\mathscr{K}$可测函数，即$f(\omega)\leqq M$，$\forall\omega\in\Omega$，又$R(\Omega)<\infty$，则对$\forall A\in\mathscr{K}$，$f\in L_A(R)$．

证明
$$(N)\int_A fdR=\sup_{\alpha>0}[\alpha R(A\cap N_\alpha(f))]$$
$$=\sup_{\alpha\in(0,M)}[\alpha R(A\cap N_\alpha(f))]\vee\sup_{\alpha\geqq M}[\alpha R(A\cap N_\alpha(f))]$$
$$=\sup_{\alpha\in(0,M)}[\alpha R(A\cap N_\alpha(f))]$$
$$\leqq MR(\Omega)<\infty$$ ‖

定理3.3　设$(\Omega,\mathscr{D},\mu)$为Lebesgue测度空间（又可视为模糊测度空间），f为其上之正值可测函数，则f为Lebesgue可积推出f为(N)模糊可积。

证明
$$(L)\int fd\mu\geqq(L)\int_{N_\alpha(f)}fd\mu$$
$$\geqq(L)\int_{N_\alpha(f)}\alpha d\mu=\alpha\mu(N_\alpha(f)),\quad\forall\alpha>0$$

从而
$$(N)\int fd\mu=\sup_{\alpha>0}[\alpha\mu(N_\alpha(f))]$$
$$\leqq(L)\int fd\mu<\infty$$ ‖

下面是关于积分号下取极限的

定理3.4　设$\{f,f_n\}$为$(\Omega,\mathscr{K},R)$上的$\mathscr{K}$可测函数，$f_n\to f$对$\forall\omega\in\Omega$一致，又$R(\Omega)<\infty$，则
$$\lim_{n\to\infty}(N)\int f_ndR=(N)\int\lim_{n\to\infty}f_ndR=(N)\int fdR \tag{3.1}$$

证明　因为f_n一致收敛于f，所以对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon$使$n>N_\varepsilon$时，$|f_n(\omega)-f(\omega)|<\varepsilon$对$\forall\omega\in\Omega$一致成立，即$f_n-\varepsilon<f<f_n+\varepsilon$，于是对$\forall\alpha\geqq\varepsilon$有
$$N_\alpha(f_n-\varepsilon)\subset N_\alpha(f)\subset N_\alpha(f_n+\varepsilon)$$

易得
$$N_{\alpha+\varepsilon}(f_n)\subset N_\alpha(f)\subset N_{\alpha-\varepsilon}(f_n)$$

从而
$$\sup_{\alpha\geqq\varepsilon}[(\alpha+\varepsilon)R(N_{\alpha+\varepsilon}(f_n))-\varepsilon R(N_{\alpha+\varepsilon}(f_n))]\leqq\sup_{\alpha\geqq\varepsilon}[\alpha R(N_\alpha(f))] \tag{3.2}$$
$$\sup_{\alpha\geqq\varepsilon}[(\alpha-\varepsilon)R(N_{\alpha-\varepsilon}(f_n))+\varepsilon R(N_{\alpha-\varepsilon}(f_n))]\geqq\sup_{\alpha\geqq\varepsilon}[\alpha R(N_\alpha(f))] \tag{3.3}$$

显然
$$\sup_{\alpha\in(0,\varepsilon)}[(\alpha+\varepsilon)R(N_{\alpha+\varepsilon}(f_n))]\leqq2\varepsilon R(\Omega) \tag{3.4}$$

由(3.2)
$$\sup_{\alpha>0}[(\alpha+\varepsilon)R(N_{\alpha+\varepsilon}(f_n))]$$
$$\leqq\{\sup_{\alpha>\varepsilon}[\alpha R(N_\alpha(f))]+\varepsilon R(\Omega)\}\vee2\varepsilon R(\Omega)$$
$$\leqq\{\sup_{\alpha\in(0,\varepsilon)}[\alpha R(N_\alpha(f))]\vee\sup_{\alpha\geqq\varepsilon}[\alpha R(N_\alpha(f))]+\varepsilon R(\Omega)\}\vee2\varepsilon R(\Omega)$$
$$\leqq\sup_{\alpha>0}[\alpha R(N_\alpha(f))]+2\varepsilon R(\Omega)$$
$$=(N)\int fdR+2\varepsilon R(\Omega) \tag{3.5}$$

令 $\beta=\alpha+\varepsilon$，则 $\alpha>0\Leftarrow\Rightarrow\beta>\varepsilon$，代入(3.5)得

$$\sup_{\beta>\varepsilon}[\beta R(N_\beta(f_n))]\leqq(N)\int fdR+2\varepsilon R(\Omega)$$

再用

$$\sup_{\beta\in(0,\varepsilon)}[\beta R(N_\beta(f_n))]\leqq\varepsilon R(\Omega)$$

得

$$(N)\int f_n dR-2\varepsilon R(\Omega)\leqq(N)\int fdR \tag{3.6}$$

类似可证

$$(N)\int fdR\leqq(N)\int f_n dR+\varepsilon R(\Omega) \tag{3.7}$$

由(3.6)，(3.7)及 $R(\Omega)$的有限性和 ε 的任意性，便得

$$\lim_{n\to\infty}(N)\int f_n dR=(N)\int fdR \qquad \blacksquare$$

需要指出的是 $R(\Omega)<\infty$ 的假设是不能去掉的，例如，$\forall\in\mathscr{K}$，$R(A)<\infty$，又 $f_n=\chi_A+\frac{1}{n}\chi_{A^c}$，$f=\chi_A$，则显然有 $f_n\to f$，对 $\forall\,\omega\in\Omega$ 一致。若 $R(\Omega)=\infty$，则 $(N)\int f_n dR=\infty$，$n=1,2,\cdots$，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}(N)\int f_n dR=\infty$，但 $(N)\int fdR=R(A)<\infty$，定理不再成立。

为证下面的 Levi 定理，我们先给出一个

引理 若 $f_n\uparrow f$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}N_\alpha(f_n)=N_\alpha(f)$，$\forall\alpha\geqq0$。

证明 因为 $f_n\uparrow$，所以 $N_\alpha(f_1)\subset N_\alpha(f_2)\subset\cdots\subset N_\alpha(f_n)\subset\cdots$，于是，$\lim\limits_{n\to\infty}N_\alpha(f_n)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}N_\alpha(f_n)$。这样，$\omega\in\lim\limits_{n\to\infty}N_\alpha(f_n)\Rightarrow\exists n_0$ 使 $\omega\in N_\alpha(f_{n_0})$，即 $f_{n_0}(\omega)>\alpha$，由 $f_n\uparrow\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\omega)>\alpha$，从而 $\omega\in N_\alpha(f)$。

反之，若 $\omega\in N_\alpha(f)\Rightarrow\exists n_0'$ 使 $f_{n_0'}(\omega)>\alpha$，故 $\omega\in N_\alpha(f_{n_0'})\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}N_\alpha(f_n)$，即 $\omega\in\lim\limits_{n\to\infty}N_\alpha(f_n)$。$\blacksquare$

定理3.5 (Levi 定理)设 $f_1\leqq f_2\leqq\cdots\leqq f_n\leqq\cdots$ 均为 $(\Omega,\mathscr{K},R)$ 上的$\mathscr{K}$可测函数，又对 $\forall\,\omega\in\Omega$，$f_n(\omega)\to f(\omega)$，则

(i) f 为$(\Omega,\mathscr{K},R)$ 上的$\mathscr{K}$可测函数；

(ii) $$\lim_{n\to\infty}(N)\int f_n dR=(N)\int\lim_{n\to\infty}f_n dR=(N)\int fdR \tag{3.8}$$

证明 (i) 由引理，对 $\forall\alpha\geqq0$，$N_\alpha(f)=N_\alpha(\lim\limits_{n\to\infty}f_n)=\lim\limits_{n\to\infty}N_\alpha(f_n)$，因 $f_n\uparrow$，故$\{N_\alpha(f_n)\}$单调，由$(\mathscr{H}_2)$，$N_\alpha(f)\in\mathscr{K}$。即证得(i)。

(ii)

$$\begin{aligned}(N)\int f_n dR&\geqq(N)\int_{N_\alpha(f_n)}f_n dR\\&\geqq(N)\int_{N_\alpha(f_n)}\alpha dR=\alpha R(N_\alpha(f_n))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(N)\int f_n dR&\geqq\lim_{n\to\infty}\alpha R(N_\alpha(f_n))\\&=\alpha R(N_\alpha(f))\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}(N)\int f_n dR\geqq(N)\int fdR \tag{3.9}$$

显然
$$(N)\int f dR \geqq \lim_{n\to\infty}(N)\int f_n dR \tag{3.10}$$

由(3.9)及(3.10)便得到(ii)

定理3.6 (Lebesgue-Fatou 定理)若f_n，$n=1,2,\cdots$为$(\Omega,\mathscr{K},R)$上的$\mathscr{K}$可测函数列，则
$$(N)\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n dR \leqq \underline{\lim}_{n\to\infty}(N)\int f_n dR \tag{3.11}$$

证明 显然$\inf\limits_{k\geqq n} f_k \leqq \inf\limits_{k\geqq n+1} f_k \leqq \cdots$，由定理3.5
$$(N)\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n dR = (N)\int \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k dR$$
$$= \lim_{n\to\infty}(N)\int \inf_{k\geq n} f_k dR$$
$$\leqq \underline{\lim}_{n\to\infty}(N)\int f_n dR \qquad \blacksquare$$

作为积分转化定理的准备，我们给出

引理1 设f为$(\Omega,\mathscr{K},R)$上的$\mathscr{K}$可测函数，则
$$(N)\int f dR = \sup_{\alpha>0}[\alpha R(N_{\bar\alpha}(f))] \tag{3.12}$$

其中$N_{\bar\alpha}(f)=\{\omega|f(\omega)\geqq\alpha\}$，称为$f$的弱$\alpha$截集。

证明 由$N_\alpha(f)\subset N_{\bar\alpha}(f)$及$R$的单调性，有
$$\sup_{\alpha>0}[\alpha R(N_\alpha(f))] \leqq \sup_{\alpha>0}[\alpha R(N_{\bar\alpha}(f))]$$

令$\beta<\alpha$，则$N_\alpha(f)\supset N_{\bar\beta}(f)$，于是$\alpha R(N_\alpha(f))\geqq\beta R(N_{\bar\beta}(f))$。先对$\alpha>0$，再对$\beta>0$取上确界即有
$$\sup_{\alpha>0}[\alpha R(N_\alpha(f))] \geqq \sup_{\beta>0}[\beta R(N_{\bar\beta}(f))]$$
这便证得了引理。

引理2 设$g(\alpha)=R(N_{\bar\alpha}(f))$在点$s$处右严格下降（即当$\alpha>s$有$g(\alpha)<g(s)$），则有
$$\mu[N_{\overline{g(s)}}(g)]=s \tag{3.13}$$

证明 因$g(\alpha)$在点s右严格下降，故当$g(\alpha)\geqq g(s)$，必有$\alpha\leqq s$，故有
$$N_{\overline{g(s)}}(g)=\{\alpha|g(\alpha)\geqq g(s)\}\subset[0,s]$$
又由$g(\alpha)$单调递降，且$\{s\}\subset N_{\overline{g(s)}}(g)$，故有
$$N_{\overline{g(s)}}(g)\supset[0,s]$$
于是
$$N_{\overline{g(s)}}(g)=[0,s] \qquad \blacksquare$$
由此证得引理。

定理3.7 （积分转化定理）设 f 为 $(\Omega,\mathscr{K},R)$ 上的 $\mathscr{K}$ 可测函数，又取 $(R',\mathscr{B}',\mu)$ 为模糊测度空间，其中 μ 为 Lebesgue 测度，则

$$(N)\int fdR=(N)\int_0^\infty R(N_\alpha(f))d\mu \tag{3.14}$$

证明 由于 $g(\alpha)=R(N_{\bar{\alpha}}(f))=R(N_\alpha(f))$，$\alpha\cdot e[\mu]$，故可等价地证明

$$(N)\int fdR=(N)\int_0^\infty R(N_{\bar{\alpha}}(f))d\mu.$$

设 $(N)\int fdR=I_1$，　$(N)\int_0^\infty R(N_{\bar{\alpha}})(f))d\mu=I_2$，有

$$I_1=\sup_{\alpha>0}[\alpha R(N_{\bar{\alpha}}(f))]=\sup_{\alpha>0}[\alpha g(\alpha)]$$

$$I_2=\sup_{\beta>0}[\beta\mu(N_{\bar{\beta}}[R(N_{\bar{\alpha}}(f))])]=\sup_{\beta>0}[\beta\mu(N_{\bar{\beta}}(g))]$$

对 $\forall\varepsilon>0$，必有 $S>0$，使

$$sg(s)\geqq I_1-\varepsilon$$

令

$$s^*=\sup\{\alpha\,|\,g(\alpha)=g(s)\}$$

注意 $g(\alpha)$ 是单调递降且左连续的，易证 $g(\alpha)$ 在点 s^* 是右严格下降的．又 $S^*\geqq S$，$g(S^*)$，从而

$$S^*g(S^*)\geqq sg(S)\geqq I_1-\varepsilon$$

令 $g(S^*)=\alpha^*$，由引理 2 知有

$$S^*g(S^*)=\mu(N_{\overline{g(S^*)}}(g))\cdot g(S^*)=\alpha^*\mu(N_{\bar{\alpha}^*}(g))\leqq I_2$$

故知 $I_1-\varepsilon\leqq I_2$．由 ε 的任意性，有 $I_1\leqq I_2$．

另一方面要证 $I_2\leqq I_1$．只须考虑 $I_2>0$ 的情形．任给 $0<\varepsilon<I_2$，必有 $\beta>0$，使

$$\beta\mu(N_\beta(g))\geqq I_2-\varepsilon>0$$

如果 β 属于 g 的值域，即有 α，使

$$g(\alpha)=\beta$$

则取

$$\alpha^*=\sup\{\alpha\,|\,g(\alpha)=\beta\}$$

由 g 的左连续性，知

$$g(\alpha^*)=\beta$$

且 $g(\alpha)$ 在点 α^* 是右方严格下降的，从而有

$$\beta\mu(N_{\bar{\beta}}(g))=\mu(N_{\overline{g(\alpha^*)}}(g))\beta=\alpha^*\beta=\alpha^*g(\alpha^*)\leqq I_1$$

从而 $I_2-\varepsilon\leqq I_1$．

如果 β 不属于 g 的值域，注意 $\mu(N_{\bar{\beta}}(g))>0$，故

$$\{\alpha\,|\,g(\alpha)\geqq\beta\}\neq\varnothing$$

故必有唯一确定的 $s^*>0$，使

$$g(s^*+0)<\beta<g(s^*) \tag{3.15}$$

令

$$\beta^*=g(s^*)$$

β^* 便属于 g 的值域，$\beta^*>\beta$，且有

$$N_{\overline{\beta^*}}(g)=N_{\overline{\beta}}(g)$$

故有

$$\beta^*\mu(N_{\overline{\beta^*}}(g))\geqq\beta\mu(N_{\overline{\beta}}(g))\geqq I_2-\varepsilon$$

按照前面的叙述，知亦有

$$I_2-\varepsilon\leqq I_1$$

由 ε 的任意性，便得

$$I_2\leqq I_1$$

终于有 $I_1=I_2$。定理得证。

推论　若 f_1,f_2 为 $(\Omega,\mathscr{K},R)$ 上的 $\mathscr{K}$ 可测函数，又对数直线上的 Lebesgue 测度 μ，$R(N_\alpha(f_1))=R(N_\alpha(f_2))$，$a\cdot e[\mu]$，则

$$(N)\int f_1dR=(N)\int f_2dR \tag{3.16}$$

事实上，由(3.14)

$$\begin{aligned}(N)\int f_idR&=(N)\int_0^\infty R(N_\alpha(f_i))d\mu\\&=\sup_{\beta>0}[\beta\mu\{N_\beta(R[N_\alpha(f_i)])\},\quad i=1,2\end{aligned} \tag{3.17}$$

但已知 $R(N_\alpha(f_1))=R(N_\alpha(f_2))$，$a\cdot e[\mu]$，故 $R(N_\alpha(f_1))>\beta\Rightarrow R(N_\alpha(f_2))>\beta$，$a\cdot e[\mu]$。反之亦然。所以对 $\forall\beta>0$ 有

$$\mu\{N_\beta(R[N_\alpha(f_1)])\}=\mu\{N_\beta(R[N_\alpha(f_2)])\}$$

代入(3.17)便得到证明。

定理3.8　设 f 为 $(\Omega,\mathscr{K},R)$ 上的 $\mathscr{K}$ 可测函数，若 $\sup_{\omega\in\Omega}f(\omega)=M$，$R(\Omega)=N$，$\mu$ 为 $(R^1,\mathscr{B}^1)$ 上的 Lebesgue 测度，则

$$0\leqq(L)\int_0^\infty R(N_\alpha(f))d\mu-(N)\int fdR\leqq MNe^{-1} \tag{3.18}$$

证明　左边的不等式是明显的，只要用定理3.7把 $(N)\int fdR$ 转化为 $(N)\int_0^\infty R(N_\alpha(f))d\mu$，再用定理 3.3 就得到证明。

令

$$I=(N)\int fdR\leqq MN$$

则有

$$R(N_\alpha(f))\leqq\frac{I}{\alpha},\quad \alpha\in[\frac{I}{N},\ M)$$

$$R(N_\alpha(f))\leqq R(\Omega)=N,\quad \alpha\in(0,\frac{I}{N})$$

于是

$$(L)\int_0^\infty R(N_\alpha(f))d\mu-(N)\int fdR$$
$$\leqq(L)\int_0^{\frac{I}{N}}Nd\mu+(L)\int_{\frac{I}{N}}^{M}\frac{I}{a}d\mu-(N)\int fdR$$
$$=I(\ln M+\ln N-\ln I) \qquad (3.19)$$

容易算得

$$\max_{I\in[0,MN]} I(\ln M+\ln N-\ln I)=MNe^{-1} \qquad 1$$

当我们已知积分值 I 时，(3.19)给出比(3.18)更好的估计。

§4　λ 次可加模糊测度空间

我们现在研究 Ω 上的 $\mathscr{K}$ 类对“并”和“余”都封闭，即成为 σ 代数 $\mathscr{D}$ 的情形。

定义4.1　R_λ 叫做 $(\Omega,\mathscr{D})$ 上的 λ 次可加模糊测度，如果它满足：

$(R_\lambda 1)$ R_λ 为模糊测度

$(R_\lambda 2)$ $R_\lambda(A\cup B)\leqq\lambda[R_\lambda(A)+R_\lambda(B)]$，$\lambda\geqq1$，$\forall A,\ B\in\mathscr{D}$

容易理解，这对 $(\Omega,\mathscr{D},R_\lambda)$ 上的 $\mathscr{K}$ 可测函数，称为 $\mathscr{D}$ 可测函数，和经典的非负 Lebesgue 可测函数的定义等价，于是自然有关于 $\mathscr{D}$ 可测函数的。

命题4.1　设 f_n，$n=1,2\cdots$ 是模糊可测空间 $(\Omega,\mathscr{D})$ 上的 $\mathscr{D}$ 可测函数，则如下的函数是 $\mathscr{D}$ 可测函数：

(1)　$c+f_i$，cf_i；$(c\in[0,\infty)$，$f_i\in\{f_n\})$

(2)　f_i+f_j，f_if_j，$f_i/f_j(f_j\neq0)$；$(f_i,f_j\in\{f_n\})$

(3)　$\inf\limits_{i\geq1}f_i$，$\sup\limits_{i\geq1}f_i$，$\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}f_i$，$\underline{\lim\limits_{i\to\infty}}f_i$；$(f_i\in\{f_n\})$

(4)　$(f_i-f_j)\vee0$；$(f_i,f_j\in\{f_n\})$

定义4.2　设 R_λ 为模糊可测空间 $(\Omega,\mathscr{D})$ 上的 λ 次可加模糊测度，f,g 为 $\mathscr{D}$ 可测函数，我们称

(1) f 为关于 R_λ 几乎处处有限（有界），以 f 有限（对应地，有界）a·e$[R_\lambda]$ 记之，如果 $R_\lambda\{\omega|f(\omega)=\infty\}=0$（对应地，存在一个数 $M>0$ 使 $R_\lambda\{\omega|f(\omega)>M\}=0$）。

(2) f 与 g 关于 R_λ 几乎处处相等，以 $f=g$，a·e$[R_\lambda]$记之，如果 $R_\lambda\{\omega|f(\omega)\neq g(\omega)\}=0$

(3) f 关于 R_λ 是几乎处处为 $\mathscr{D}$ 可测（连续），以 f 为 $\mathscr{D}$ 可测（连续）a·e $[R_\lambda]$记之，如果存在一个 $\mathscr{D}$ 可测（连续）函数 g，使得 $f=g$，a·e$[R_\lambda]$。

定义4.3　设 $\{f,f_n\}$ 是模糊测度空间 $(\Omega,\mathscr{D},R_\lambda)$ 上的 $\mathscr{D}$ 可测函数列，f,f_n 有限a·e$[R_\lambda]$，$n=1,2,\cdots$

(1)如果 $R_\lambda\{\omega|f_n(\omega)\underset{n\to\infty}{\not\to}f(\omega)\}=0$，则称 $\{f_n\}$ 关于 R_λ 是几乎处处收敛于 f 的，以 $f_n\to f$，a·e$[R_\lambda]$记之。

(2)如果 $R_\lambda\{\omega|f_n(\omega)-f_m(\omega)\underset{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}{\not\to}0\}=0$，则称 $\{f_n\}$关于 R_λ 是几乎处处收敛的基本列，以 $\{f_n\}$为基本列 a·e$[R_\lambda]$记之。

由定义和简单的推证易得如下的

命题4.2　设$\{f,g,f_n\}$是$(\Omega,\mathscr{D},R_\lambda)$上a•e$[R_\lambda]$有限的$\mathscr{D}$可测函数列，若$f_n\to f$，a•e$[R_\lambda]$且$f_n\to g$，a•e$[R_\lambda]$，则$f=g$，a•e$[R_\lambda]$。反之，若$f=g$，a•e$[R_\lambda]$，$f_n\to f$，a•e$[R_\lambda]$，则$f_n\to g$，a•e$[R_\lambda]$。

命题4.3　设$\{f_n\}$是$(\Omega,\mathscr{D},R_\lambda)$上a•e$[R_\lambda]$有限的$\mathscr{D}$可测函数列，$f_n\to f$，a•e$[R_\lambda]$，则$f$是$\mathscr{D}$可测a•e$[R_\lambda]$的。

命题4.4　$\{f_n\}$是$(\Omega,\mathscr{D},R_\lambda)$上基本列a•e$[R_\lambda]$的充要条件是存在一个a•e$[R_\lambda]$有限的$\mathscr{D}$可测函数$f$，使$f_n\to f$，a•e$[R_\lambda]$。

定理4.1　设$\{f,f_n\}$是$(\Omega,\mathscr{D},R_\sigma)$上a•e$[R_\lambda]$有限的$\mathscr{D}$可测函数列，则$f_n\to f$，a•e$[R_\lambda]$的充分必要条件是

$$R_\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=0}^{\infty}\{\omega\,\big|\,|f_{n+\nu}(\omega)-f(\omega)|\geqq\varepsilon\}\right)=0,\quad\forall\varepsilon>0\tag{4.1}$$

若更有$R_\lambda(\Omega)<\infty$，则(4.1)可写为

$$\lim_{n\to\infty}R_\lambda\left(\bigcup_{\nu=0}^{\infty}\{\omega)\,\big|\,|f_{n+\nu}(\omega)-f(\omega)|\geqq\varepsilon\}\right)=0,\quad\forall\varepsilon>0\tag{4.2}$$

证明　令$A_n=\{\omega|f_n(\omega)=\infty\}$，则$A_n\in\mathscr{D}$，$n=1,2,\cdots$

显然$\bigcup_{n=1}^{N}A_n$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{D}$。由$R_\lambda$的性质和数学归纳法易证

$$R_\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{N}A_n\right)\leqq\lambda R_\lambda(A_1)+\lambda^2R_\lambda(A_2)+\cdots+\lambda^NR_\lambda(A_N)=0$$

$$\begin{aligned}R_\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)&=R_\lambda\left(\lim_{N\to\infty}\bigcup_{n=1}^{N}A_n\right)\\&=\lim_{N\to\infty}R_\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{N}A_n\right)=0\end{aligned}$$

以A记$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，则当$\omega\in A^c$时，$f_n$，$n=1,2,\cdots$便都有限，于是

$$A^c\cap\{\omega|f_n(\omega)\to f(\omega)\}=A^c\cap\left(\bigcup_{K=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=0}^{\infty}\{\omega\,\big|\,|f_{n+\nu}(\omega)-f(\omega)|\geqq\frac{1}{k}\}\right)\tag{4.3}$$

由R_λ的λ次可加性有

$$\begin{aligned}&R_\lambda\{\omega|f_n(\omega)\nrightarrow f(\omega)\}\\&=R_\lambda([\{\omega|f_n(\omega)\nrightarrow f(\omega)\}\cap A]\cup[\{\omega|f_n(\omega)\nrightarrow f(\omega)\}\cap A^c])\\&\leqq\lambda R_\lambda(\{\omega|f_n(\omega)\nrightarrow f(\omega)\}\cap A^c)\end{aligned}$$

显然　$$R_\lambda\{\omega|f_n(\omega)\nrightarrow f(\omega)\}\geqq R_\lambda(\{\omega|f_n(\omega)\nrightarrow f(\omega)\}\cap A^c)$$

故　$$R_\lambda\{\omega|f_n(\omega)\nrightarrow f(\omega)\}=0\Longleftrightarrow R_\lambda(\{\omega|f_n(\omega)\nrightarrow f(\omega)\}\cap A^c)=0\tag{4.4}$$

用(4.3)得(4.4)和下式等价

$$R_\lambda\left[A\cap\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=0}^{\infty}\{\omega|f_{n+\nu}(\omega)-f(\omega)|\geqq\frac{1}{k}\}\right)\right]=0\tag{4.5}$$

重复(4.4)的证明有(4.5)等价于

$$R_\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=0}^{\infty}\left\{\omega\,\middle|\,|f_{n+\nu}(\omega)-f(\omega)|\geqq\frac{1}{k}\right\}\right)=0\Longleftrightarrow$$

$$R_\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=0}^{\infty}\left\{\omega\,\middle|\,|f_{n+\nu}(\omega)-f(\omega)|\geqq\frac{1}{k}\right\}\right)=0,k=1,2\cdots$$

这便是(4.1)，注意到 $\bigcup\limits_{\nu=0}^{\infty}\{\omega\,|\,|f_{n+\nu}(\omega)-f(\omega)|\geqq\varepsilon\}$是$n$的单减集列，当$R_\lambda(\Omega)<\infty$时，用上连续性得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}R_\lambda\left(\bigcup_{\nu=0}^{\infty}\{\omega\,|\,|f_{n+\nu}(\omega)-f(\omega)|\geqq\varepsilon\}\right)\\&=R_\lambda\left(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{\nu=0}^{\infty}\{\omega\,|\,|f_{n+\nu}(\omega)-f(\omega)|\geqq\varepsilon\}\right)\\&=R_\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=0}^{\infty}\{\omega\,|\,|f_{n+\nu}(\omega)-f(\omega)|\geqq\varepsilon\}\right)=0,\ \forall\varepsilon>0\end{aligned}$$ **1**

类似的证明可得如下的

定理4.2 $(\Omega,\mathscr{D},R_\lambda)$上a·e $[R_\lambda]$有限的α可测函数列$\{f_n\}$为a·e $[R_\lambda]$基本列的充要条件是

$$R_\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=0}^{\infty}\{\omega\,|\,|f_{n+\nu}(\omega)-f_n(\omega)|\geqq\varepsilon\}\right)=0,\quad\forall\varepsilon>0\tag{4.6}$$

若更有$R_\lambda(\Omega)<\infty$，则(4.6)尚可写为

$$\lim_{n\to\infty}R_\lambda\bigcup_{\nu=0}^{\infty}\{\omega\,|\,|f_{n+\nu}(\omega)-f_n(\omega)|\geqq\varepsilon\})=0,\ \forall\varepsilon>0\tag{4.7}$$

定理4.3 (Егоров 定理)设$\{f,f_n\}$是$(\Omega,\mathscr{D},R_\lambda)$上a·e$[R_\lambda]$有限的$\mathscr{D}$可测函数列，$R_\lambda(\Omega)<\infty$，那么，$f_n\to f$，a·e$[R_\lambda]$的充分必要条件是对任给$\varepsilon>0$都存在$A\in\mathscr{D}$，使$R_\lambda(A)<\varepsilon$且在$A^c$上$f_n(\omega)\to f(\omega)$对任意$\omega\in\Omega$一致，并记为$f_n\to f$，a·u$[R_\lambda]$。

证明 仿通常证法并注意利用R_λ的λ次可加性即得。

定义4.4 所谓$(\Omega,\mathscr{D},R_\lambda)$上a·e$[R_\lambda]$有限的$\mathscr{D}$可测函数列$\{f_n\}$按糊糊测度$R_\lambda$收敛于$f$指的是对$\forall\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}R_\lambda\{\omega\,|\,|f_n(\omega)-f(\omega)|\geqq\varepsilon\}=0$$

记为$f_n\xrightarrow{R_\lambda}f$。

定理4.4 (Lebesgue 定理)设$\{f,f_n\}$是$(\Omega,\mathscr{D},R_\lambda)$上a·e$[R_\lambda]$有限的$\mathscr{D}$可测函数列，$R_\lambda(\Omega)<\infty$，则$f_n\to f$，a·e$[R_\lambda]\Rightarrow f_n\xrightarrow{R_\lambda}f$。

证明 仿通常证法证明。

定理4.5 (Riesz 定理)在定理 4.4 的条件下，$f_n\xrightarrow{R_\lambda}f\Rightarrow$存在$\{f_{n_k}\}\subset\{f_n\}$使$f_{n_k}\to f$，a·e$[R_\lambda]$。

证明 仿通常证法并注意利用R_λ的λ次可加性即得。

类似地还有

定理4.6　$\{f_n\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{D},R_\lambda)$ 上 $\mathscr{D}$ 可测函数列，$R_\lambda(\Omega)<\infty$，则 $\{f_n\}$ 为 a·e $[R_\lambda]$ 的充分必要条件是存在一个 a·e$[R_\lambda]$ 有限的 $\mathscr{D}$ 可测函数 f，使 $f_n\xrightarrow{R_\lambda}f$。

定理4.7　设 $\{f_n\}$ 为 $(\Omega,\mathscr{D},R_\lambda)$ 上一致有界 a·e$[R_\lambda]$ 的 $\mathscr{D}$ 可测函数，$R_\lambda(\Omega)<\infty$，若 $f_n\xrightarrow{R_\lambda}f$，则 $f\in L(R_\lambda)$，且

$$\frac{1}{\lambda}(N)\int fdR_\lambda\leqq\varliminf_{n\to\infty}(N)\int f_n dR_\lambda$$

$$\leqq\varlimsup_{n\to\infty}(N)\int f_n dR_\lambda\leqq\lambda(N)\int fdR_\lambda \tag{4.10}$$

特别，当 $\lambda=1$，即 R_λ 为 $(\Omega,\mathscr{D})$ 上次可加模糊测度时，(4.10)中有等号成立。

证明　对 $\forall\varepsilon>0$，$\forall\alpha>0$ 我们有

$$N_\alpha(f)\subset\{\omega\,|\,|f_\alpha(\omega)-f(\omega)|\geqq\varepsilon\}\cup N_{\alpha-\varepsilon}(f_n)$$

$$R_\lambda[N_\alpha(f)]\leqq\lambda R_\lambda\{\omega\,|\,|f_n(\omega)-f(\omega)|\geqq\varepsilon\}+\lambda R_\lambda[N_{\alpha-\varepsilon}(f_n)]$$

于是

$$\alpha R_\lambda[N_\alpha(f)]\leqq\lambda\alpha R_\lambda\{\omega\,|\,|f_n(\omega)-f(\omega)|\geqq\varepsilon\}$$

$$+\alpha(\alpha-\varepsilon)R_\lambda[N_{\alpha-\varepsilon}(f_\alpha)]+\lambda\varepsilon R_\lambda[N_{\alpha-\varepsilon}(f_n)]$$

$$\leqq\lambda\alpha R_\lambda\{\omega\,|\,|f_n(\omega)-f(\omega)|\geqq\varepsilon\}+\lambda(N)\int f_n dR_\lambda+\lambda\varepsilon R_\lambda(\Omega)$$

由 $f_n\xrightarrow{R_\lambda}f$，得

$$\alpha R_\lambda[N_\alpha(f)]\leqq\lambda\varliminf_{n\to\infty}(N)\int f_n dR_\lambda+\lambda\varepsilon R_\lambda(\Omega)$$

从而

$$\frac{1}{\lambda}(N)\int fdR_\lambda\leqq\varliminf_{n\to\infty}(N)\int f_n dR_\lambda+\varepsilon R_\lambda(\Omega) \tag{4.11}$$

同理可得

$$\alpha R_\lambda[N_\alpha(f_n)]\leqq\lambda\alpha R_\lambda\left\{\omega\,\middle|\,|f_n(\omega)-f(\omega)|\geqq\varepsilon\right\}+\lambda(N)\int fdR_\lambda+\lambda\varepsilon R_\lambda(\Omega)$$

由题设知存在正数 M，使得

$$R_\lambda\{\omega\,|\,f_n(\omega)>M\}=0,\quad n=1,2,\cdots$$

所以

$$(N)\int f_n dR_\lambda\leqq\lambda MR_\lambda\left\{\omega\,\middle|\,|f_n(\omega)-f(\omega)|\geqq\varepsilon\right\}+\lambda(N)\int fdR_\lambda+\lambda\varepsilon R_\lambda(\Omega)$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(N)\int f_n dR_\lambda\leqq\lambda(N)\int fdR_\lambda+\lambda\varepsilon R_\lambda(\Omega) \tag{4.12}$$

由 $R_\lambda(\Omega)<\infty$ 及 ε 的任意性就得到(4.10)和 $f\in L(R_\lambda)$　　▮

定理4.8　设 $\{f,f_n\}$ 为 $(\Omega,\mathscr{D},R_\lambda)$ 上 a·e$[R_\lambda]$ 有限的 $\mathscr{D}$ 可测函数，$R_\lambda(\Omega)<\infty$，若 $\lambda=1$（并简记 R_λ 为 R），$f_n\leqq f$，a·e$[R]$，又 $f_n\xrightarrow{R}f$，则

$$\lim_{n\to\infty}(N)\int f_n dR=(N)\int fdR \tag{4.13}$$

证明 同定理4.7类似可得

$$(N)\int f dR \leq \varliminf_{n\to\infty}(N)\int f_n dR \tag{4.14}$$

显然又有

$$R[N_a(f_n)] \leq R[N_a(f)]$$

于是

$$\sup_{a>0}[aR(N_a(f_n))] \leq \sup_{a>0}[aR(N_a(f))]$$

故

$$\varlimsup_{n\to\infty}(N)\int f_n dR \leq (N)\int f dR \tag{4.15}$$

综(4.14)及(4.15)即得证。 ∎

定理4.9 设 f_1, f_2 为 $(\Omega, \mathscr{D}, R_\lambda)$ 上 $\mathscr{D}$ 可测函数，$f_1, f_2 \in L(R_\lambda)$，则 $f_1+f_2 \in L(R_\lambda)$ 且

$$(N)\int (f_1+f_2)dR_\lambda \leq 2\lambda[(N)\int f_1 dR + (N)\int f_2 dR] \tag{4.16}$$

证明 对 $\forall a>0$，$f_1+f_2>2a \Rightarrow f_1>a$ 或 $f_2>a$

故

$$N_{2a}(f_1+f_2) \subset N_a(f_1) \cup N_a(f_2)$$

于是

$$R_\lambda[N_{2a}(f_1+f_2)] \leq \lambda R_\lambda[N_a(f_1)] + \lambda R_\lambda[N_a(f_2)]$$

$$\frac{1}{2}\sup_{2a>0}[2aR_\lambda(N_{2a}(f_1+f_2))]$$

$$\leq \lambda \sup_{a>0}[aR_\lambda(N_a(f_1))] + \lambda \sup_{a>0}[aR_\lambda(N_a(f_2))]$$

即

$$(N)\int (f_1+f_2)dR_\lambda \leq 2\lambda\left[(N)\int f_1 dR_\lambda + (N)\int f_2 dR_\lambda\right]$$ ∎

定理4.10 设 f 是 $(\Omega, \mathscr{D}, \mu)$ 上的 $\mathscr{D}$ 可测函数，$f(\omega) \leq M$，a·e$[\mu]$，$\mu(\Omega)=N$，则

$$0 \leq (L)\int f d\mu - (N)\int f d\mu \leq MNe^{-1} \tag{4.17}$$

证明 显然 f 是(N)模糊可积的，令 $I=(N)\int f d\mu$，又 $\mu(E)=\mu\left\{\omega \mid f(\omega)=\infty\right\}=0$。

由可测函数的构造定理，存在非负不减的简单函数列 $\{f_n\}$，使 $f_n \uparrow f$。

设

$$f_n = \sum_{i=1}^{m_n} a_i \chi_{A_i} + n\chi_E$$

其中，$0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{m_n} \leq M$，$A_i \in \mathscr{D}$ $(i=1,2,\cdots,m_n)$，$A_i \cap A_j = \phi$，$(i \neq j)$，$E \in \mathscr{D}$，

$A_i \cap E = \phi$ $(i=1,2,\cdots,m_n)$，$\sum_{i=1}^{m_n} A_i + E = \Omega$。

作

$$g_n = \sum_{i=1}^{m_n} b_i \chi_{B_i} + n\chi_E$$

其中，$b_i=a_i\,(i=1,2,\cdots,m_n)$，而$B_i$由如下做法构成：首先作$B_{m_n}$。显然$\mu(A_{m_n})\leqq\frac{I}{a_{m_n}}$，若$\mu(A_{m_n})=\frac{I}{a_{m_n}}$，则令$B_{m_n}=A_{m_n}$，否则，取$A_{m_n-1}$的某一子集$A'_{m_n-1}\in\mathscr{D}$，使$\mu(A_{m_n}+A'_{m_n-1})=\frac{I}{a_{m_n}}$。若对$\forall A'_{m_n-1}\subset A_{m_n-1}$（注意$A'_{m_n-1}\in\mathscr{D}$是$A_{m_n-1}$的一个子集）都有$\mu(A_{m_n}+A'_{m_n-1})<\frac{I}{a_{m_n}}$，则再取$A'_{m_n-2}\subset A_{m_n-2}$，$A'_{m_n-2}\in\mathscr{D}$，使$\mu(A_{m_n}+A_{m_n-1}+A'_{m_n-2})=\frac{I}{a_{m_n}}$。若还有$\mu(A_{m_n}+A_{m_n-1}+A'_{m_n-2})<\frac{I}{a_{m_n}}$，$\forall A'_{m_n-2}\subset A_{m_n-2}$，则再继续前面的做法。这样经过有限步后必可找到一个$A'_{m_n-j_0}$使$\mu(A_{m_n}+A_{m_n-1}+\cdots+A_{m_n-j_0+1}+A'_{m_n-j_0})=\frac{I}{a_{m_n}}$[注]，于是取$B_{m_n}=A_{m_n}+A_{m_n-1}+\cdots+A_{m_n-j_0}+A_{m_n-j_0}$。

然后确定B_{m_n-1}。设A_{m_n}，A_{m_n-1}，…，A_1中第一个使$A_K\backslash B_{m_n}$不空的的集合为A_{k_1}，在$A_{k_1}\backslash B_{m_n}$中取适当的子集$(A_{k_1}\backslash B_{m_n})'\in\mathscr{D}$，使$\mu[B_{m_n}+(A_{K_1}\backslash B_{m_n})']=\frac{I}{a_{m_n-1}}$，若对$\forall(A_1\backslash B_{m_n})'\subset A_{K_1}\backslash B_{m_n}$都有$\mu[B_{m_n}+(A_{K_1}\backslash B_{m_n})']<\frac{I}{a_{m_n-1}}$，则继续在$A_{k_1-1}$中选……。设在$A_{k_1-j_1}$中已有子集$A_{k_1-j_1}\in\mathscr{D}$使$\mu[B_{m_n}+(A_{k_1}\backslash B_{m_n})+A_{k_1-1}+\cdots+A_{k_1-j_1+1}+A'_{k_1-j_1}]=\frac{I}{a_{m_n-1}}$，则令$B_{m_n-1}=(A_{K_1}\backslash B_{m_n})+A_{k_1-1}+\cdots+A_{k_1-j_1+1}+A'_{k_1-i_1}$。如此等等，即可对所有的$b_i=a_i>\frac{I}{N}$找出相应的$B_i$。

又设a_{i_*}是a_{m_n}，a_{m_n-1}，…，a_1中第一个不大于$\frac{I}{N}$的数，则令$b_{i_*}=\frac{I}{N}$，

$B_{i_*}=\Omega\backslash\sum_{i=i_*+1}^{m_n}B_i$。而对$\forall i<i_*$，令$b_i=0$，$B_i=\phi$。于是一个$\Omega$上的简单函数$g_n$构造成功，且$g_n$单调不减。

令
$$g=\lim_{n\to\infty}g_n$$
则g有性质：

(1) g在$(\Omega,\mathscr{D},\mu)$上为Lebesgue可积

(2) $g\geqq f$

(3) $\mu[N_\alpha(g)]=\mu[N_\alpha(\lim_{n\to\infty}g_n)]$

$$=\lim_{n\to\infty}\mu[N_\alpha(g_n)]=\begin{cases}N, & \alpha\in\left[0,\frac{I}{N}\right)\\ \frac{I}{\alpha}, & \alpha\in\left[\frac{I}{N},M\right)\\ 0, & \alpha\geqq M\end{cases}\tag{4.18}$$

显然，$(\Omega,\mathscr{D},\mu)$上的任何$\mathscr{D}$可测函数φ，若有$\varphi(\omega)\leqq M$，a·e$[\mu]$，$(N)\int\varphi d\mu=I$，则$(L)\int\varphi d\mu\leqq(L)\int gd\mu$。于是

$$(L)\int f d\mu-(N)\int f d\mu \leqq (L)\int g d\mu-(N)\int f d\mu \tag{4.19}$$

用 $F_g(a)$ 记 g 的分布函数，则

$$F_g(a)=\mu(g^{-1}(+\infty,a])=N-\mu[N_a(g)]$$

于是

$$\begin{aligned}(L)\int g d\mu &=(L-S)\int_{-\infty}^{\infty} a dF_g(a)\\ &=(R-S)\int_{\frac{I}{N}}^{M} a dF_g(a)\\ &=(R)\int_{\frac{I}{N}}^{M} a\left(N-\frac{I}{a}\right)_a' da+M[F_g(M)-F_g(M_{-0})]\\ &=I(\ln M+\ln N-\ln I+1)\end{aligned}$$

代之入(4.19)并重复定理3.8的后部就得到全部证明。

注 如果这样的 $A'_{m_n-i_0}$ 不存在，则必有 $A''_{m_n-i_0}\in\mathscr{D}$，使

$$\mu(A_{m_n}+A_{m_n-1}+\cdots+A_{m_n-j_0+1}+A''_{m_n-i_0})$$

$$=\max\left\{\mu(A_{m_n}+A_{m_n-1}+\cdots+A_{m_n-i_n+1}+A^*_{m_n-i_0}\middle| A^*_{m_n-i_0}\in\mathscr{D},\ A^*_{m_u-i_0}\subset\right.$$

$$\left.A_{m_n-i_0},\ \mu(A_{m_n}+A_{m_n-1}+\cdots+A_{m_n-i_0+1}+A^*_{m}{}_{i_0})<\frac{I}{a_{m_n}}\right\}$$

事实上只需取 $A''_{m_n-i_0}$ 为满足上式中限制条件的所有 $A^*_{m_n-i_0}$ 的并即可。此时令 $B'_{m_0}=A_{m_n}+A_{m_n-1}+\cdots+A_{m_n-i_0+1}+A''_{m_n-i_0}$，余类推，则构成之函数 g' 有

$$(L)\int f d\mu\leqq(L)\int g' d\mu\leqq(L)\int g d\mu$$

不影响前面的证明。

§5 (N) 模糊积分的扩展

上面讨论的模糊测度与模糊积分尚可进行扩展，这首先有关于模糊单调类的

定义5.1 Ω 上的模糊子集系 $\underset{\sim}{\mathscr{H}}$ 叫做模糊单调类，如果它满足

($\mathscr{H}$1) $0\in\mathscr{H}$，$1\in\mathscr{H}$

($\mathscr{H}$2) 若 $\underset{\sim}{A}_n\in\underset{\sim}{\mathscr{H}}$ $(n=1,2,\cdots)$，$\{\underset{\sim}{A}_n\}$ 单调，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{A}_n\in\underset{\sim}{\mathscr{H}}$

若进而有 $\underset{\sim}{\mathscr{H}}$ 对"$\wedge$"封闭，则称之为 $\underset{\sim}{\mathscr{K}}$ 类。

其中 0 和 1 和通常一样，表示模糊子集作为映射时其值空间的最小元与最大元。

定义5.2 模糊单调类 $\underset{\sim}{\mathscr{H}}$ 上的模糊集函数 $\underset{\sim}{R}$：$\underset{\sim}{\mathscr{H}}\to[0,\infty]$ 叫做双模糊测度，如果它满足：

(R1)　$\underset{\sim}{R}(\mathbf{0})=0$

(R2)　$\underset{\sim}{A}\leqq\underset{\sim}{B}\Rightarrow\underset{\sim}{R}(\underset{\sim}{A})\leqq\underset{\sim}{R}(\underset{\sim}{B}),\ \forall\underset{\sim}{A},\forall\underset{\sim}{B}\in\underset{\sim}{\mathscr{H}}$

(R3)　$\underset{\sim}{A}_1\leqq\underset{\sim}{A}_2\leqq\cdots\leqq\underset{\sim}{A}_n\leqq\cdots,\ \{\underset{\sim}{A}_n\}\subset\underset{\sim}{\mathscr{H}}\Rightarrow\underset{\sim}{R}\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{A}_n\right)=\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{R}(\underset{\sim}{A}_n)$

(R4)　$\underset{\sim}{A}_1\geqq\underset{\sim}{A}_2\geqq\cdots\geqq\underset{\sim}{A}_n\geqq\cdots,\{\underset{\sim}{A}_n\}\subset\underset{\sim}{\mathscr{H}},\exists\underset{\sim}{A}_{n_0}\in\{\underset{\sim}{A}_n\}$ 使 $\underset{\sim}{R}(\underset{\sim}{A}_{n_0})<\infty$

$$\Rightarrow\underset{\sim}{R}\left(\bigwedge_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{A}_n\right)=\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{R}(\underset{\sim}{A}_n)$$

类似地称 $(\Omega,\underset{\sim}{\mathscr{H}})$ 为双模糊可测空间，而称 $(\Omega,\underset{\sim}{\mathscr{H}},\underset{\sim}{R})$ 为双模糊测度空间．

容易看出，对模糊测度空间 $(\Omega,\mathscr{H},R)$ 总可以构造双模糊测度空间 $(\Omega,\underset{\sim}{\mathscr{H}},\underset{\sim}{R})$，使 $\underset{\sim}{\mathscr{H}}=\{\chi_A|A\in\mathscr{H}\}$，$\underset{\sim}{R}(\chi_A)=R(A)$，$\forall A\in\mathscr{H}$，所以有

命题5.1　模糊测度空间 $(\Omega,\mathscr{H},R)$ 总可以等测地嵌入某一双模糊测度空间中．

定义5.3 映射 f：$\Omega\to(-\infty,\infty)$ 叫做 $(\Omega,\underset{\sim}{\mathscr{K}})$ 上的 $\underset{\sim}{\mathscr{K}}$ 可测函数指的是对 $\forall\alpha\geqq0$ 都有 $\chi_{N_\alpha(f^+)}\in\underset{\sim}{\mathscr{K}}$ 和 $\chi_{N_\alpha(f^-)}\in\underset{\sim}{\mathscr{K}}$．

其中

$$f^+(\omega)\triangleq\begin{cases}f(\omega), & f(\omega)\geqq0\\ 0, & f(\omega)<0\end{cases}$$

$$f^-(\omega)\triangleq\begin{cases}0, & f(\omega)>0\\ -f(\omega), & f(\omega)\leqq0\end{cases}$$

定义5.4　双模糊测度空间 $(\Omega,\underset{\sim}{\mathscr{K}},\underset{\sim}{R})$ 上的 $\underset{\sim}{\mathscr{K}}$ 可测函数 f 在模糊子集 $\underset{\sim}{A}\in\underset{\sim}{\mathscr{K}}$ 上的 $(\underset{\sim}{N})$ 模糊积分定义为

$$(\underset{\sim}{N})\int_{\underset{\sim}{A}}fd\underset{\sim}{R}=(\underset{\sim}{N})\int_{\underset{\sim}{A}}f^+d\underset{\sim}{R}-(\underset{\sim}{N})\int_{\underset{\sim}{A}}f^-d\underset{\sim}{R}$$

其中

$$(\underset{\sim}{N})\int_{\underset{\sim}{A}}f^{\pm}d\underset{\sim}{R}=\sup_{\alpha>0}[\alpha\underset{\sim}{R}(\underset{\sim}{A}\wedge\chi_{N_\alpha(f^{\pm})})]$$

关于这些推广，可以完全类似地研究它们的性质和得出对应的结果．至于这种积分的应用，尚在探索中；我们首先用它研究了可能度空间[7]上模糊变量的数字特征和模糊变量序列的收敛性，此外，在模糊优化及模糊判别等方面的应用也可望成功[8]．

本文承游兆永、张文修老师指导，汪培庄老师对全文进行了精心修改并重证了定理3.7，上面的证法就是汪培庄老师给出的，在此一并致谢．

参考文献

[1] Zadeh, L. A. Fuzzy Sets, Information and Control, 8, 3, 338-353 (1965).

[2] 菅野道夫，Fuzzy 測度と Fuzzy 積分，計測自動制御學製會論文集，82. 218～226, 1972.

[3] 菅野道夫，Fuzzy 測度の構成と Fuzzy 積分によるパターンの类似度評価，(同上)，9, 3, 361～368, 1973.

[4] 菅野道夫，Fuzzy 積分の逆演算と条件付 Fuzzy 測度，(同上)，11, 1, 32～37, 1975.

[5] Terano, T. and Sugeno, M. Conditional Fuzzy Measures and their Applications, Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Dicision Processes (ed. by L. A. Zadeh and K. Tanaka et al.), Academic Press. 151～170 (1975).

[6] Dan Ralescu and Gregory Adams: The Fuzzy Integral, Department of Mathematices, Indiana University, Bloomington, Indiana 47405.

[7] 张文修，赵汝怀，可能度空间，西安交通大学学报，14, 3, 137～141, 1980.

[8] 陈小君、赵汝怀，具有学习过程的判别模型，西安交通大学科学技术报告，81-027.

(N) Fuzzy Integral

By Zhao Ruhuai (赵汝怀)

Abstract

In this paper a new type of fuzzy integral is defined, which is more similar to Lebesgue's integral than the integral defined by Sugeno [2]. Especially, as an imitation for process of men's thinking, it is closer to circumstances than [2]. In the paper the properties of this type of integral are studied. There are proved the theorems on convergence of sequences of the integrai, which are similar to Levi's theorem, Fatou's theorem and so on in Lebesgue's integral. The formula is given, which trnsform a (N)Fuzzy Integral in general measure space into a (N)Fuzzy Integral with Lebesgue measure in R^1. In §4 a special type of so-called λ-semiadditive Fuzzy measure space is led in. The Egorov's theorem and Riesz's theorem on convergence in this measure space are given. Some of sufficient conditions on obtaining limit under the signal of integral has been got.