一个重特征方程的一类定解问题*

王传芳　　陆柱家

（杭州大学）　（中国科学院数学研究所）

摘　要

本文提出了当 $p=2h+1$（$h\geqslant 0$为整数）时，重特征方程

$$L_p u\equiv u_{xx}-x^2u_{tt}+pu_t=0$$

的一类新的定解问题，证明其适定性，推广了[2]、[3]和[4]中的相应结果。

§1 引　言

Treves[1]及王光寅等[2]都曾研究过下述重特征方程

$$L_p u\equiv u_{xx}-x^2u_{tt}+pu_t=0. \tag{1}$$

他们讨论了方程(1)的Cauchy问题和Goursat问题存在唯一性中的离散现象，得到其离散值均为 $p=1,3,5\cdots$。即当 $p\neq 1,3,5,\cdots$时，方程(1)的Cauchy问题和Goursat问题的解存在唯一；而当$p=1,3,5,\cdots$这些离散值时，上述两个问题的解既不唯一，一般说来也不存在。

当 $p=2h+1$（$h\geqslant 0$为整数）时，在[2]中曾讨论过如下两个定解问题：

$$\begin{cases} L_p u=0,\ t\geqslant 0,\\ u(x,0)=\varphi_1(x),\ u_t(x,0)=\varphi_2(x),\\ (X^h u)(0,t)=\psi(t), \end{cases} \tag{2}$$

及

$$\begin{cases} L_p u=0,\ t\geqslant \dfrac{x^2}{2},\\ u(x,\dfrac{x^2}{2})=\varphi_3(x),\\ (X^h u)(0,t)=\psi(t) \end{cases} \tag{3}$$

*1980年12月1日收到。

的适定性*)(这里仍沿用[2]的记号：$X=\partial_x+x\partial_t$)。

在[3]中曾讨论了方程(1)的混合问题，得到其存在唯一性中的离散值为 $p=4k+3$，其中 $k=0,1,2,\cdots$。

在[4]中，曾讨论了如下两个适定的定解问题：

$$\begin{cases} L_{4k+1}u=0, & t\geqslant \dfrac{x^2}{2}, \\ u(x,\dfrac{x^2}{2})=\varphi(x), \\ u(0,t)=\psi(t), \end{cases} \tag{4}$$

及

$$\begin{cases} L_{4k+3}u=0, & t\geqslant \dfrac{x^2}{2}, \\ u(x,\dfrac{x^2}{2})=\varphi(x), \\ u_x(0,t)=\psi(t). \end{cases} \tag{5}$$

由于方程(1)在 $p=2h+1$($h\geqslant 0$为整数)处有奇特的性质。因此本文讨论 $p=2h+1$时的方程(1)。提出了一类形式统一的定解问题，证明其适定性，从而拓广了[2,3,4]中的相应结果。

§2 在重特征点集上给附加条件的 Cauchy 问题

现在考虑下面的定解问题

$$\begin{cases} L_{2h+1}u=0, & t\geqslant 0, \\ u(x,0)=\varphi_1(x), & u_t(x,0)=\varphi_2(x), \\ (X^j u)(0,t)=\psi(t), \end{cases} \tag{6}_{hj}$$

其中 j 是整数，且 $0\leqslant j\leqslant h$。

为了书写的方便，我们将记

$$\varphi(x)=(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)),$$

$$Q_p\varphi(x)=(\varphi_1'(x)+x\varphi_2(x),\ \varphi_2'(x)+\frac{1}{x}(\varphi_1''(x)+p\varphi_2(x))).$$

定理1. 设$h-j\equiv 0(\mathrm{mod}2)$，$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$，且 $x=0$ 是它们的无限阶零点，$\psi(t)\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$，则问题 $(6)_{hj}$ 有唯一的 C^∞解 $u(x,t)$，当且仅当

$$\begin{cases} (Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(x)\text{是一个偶函数}, \\ \psi(t)\text{在 } t=0 \text{ 处为一无限阶零点}. \end{cases} \tag{7}$$

并且当(7)成立时，解 $u(x,t)$ 为

*) 在[3]的附录里曾指出，[2]中的条件：$\varphi_3(x)$以$x=0$为无限阶零点是不必要的。

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{h!}\displaystyle\int_{-\sqrt{x^2-2t}}^{x}(x-\xi)^h(Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{2(t+\xi^2)-x^2})d\xi\\ \quad+\displaystyle\sum_{l=0}^{h}(Q_{2(h-l)+3}Q_{2(h-l)+5}\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(-\sqrt{x^2-2t})\frac{(x+\sqrt{x^2-2t})^l}{l!}, & \text{在}\overline{\Omega}_-\text{中；}\\ \dfrac{1}{h!}\displaystyle\int_0^x(x-\xi)^h(Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{2(t+\xi^2)-x^2})d\xi\\ \quad+\displaystyle\sum_{l=0}^{h}\psi_l\left(t-\frac{x^2}{2}\right)\frac{x^l}{l!}, & \text{在}\overline{\Omega}_0\text{中；}\\ \dfrac{1}{h!}\displaystyle\int_{\sqrt{x^2-2t}}^{x}(x-\xi)^h(Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{2(t+\xi^2)-x^2}d\xi\\ \quad+\displaystyle\sum_{l=0}^{h}(Q_{2(h-l)+3}Q_{2(h-l)+5}\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{x^2-2t})\frac{(x-\sqrt{x^2-2t})^l}{l!}, & \text{在}\overline{\Omega}_+\text{中。}\end{cases}\quad(8)$$

其中

$$\Omega_-=\left\{(x,t)\in I\!R^2\,|\,0<t<\frac{x^2}{2},x<0\right\},$$

$$\Omega_+=\left\{(x,t)\in I\!R^2\,|\,0<t<\frac{x^2}{2},x>0\right\},$$

$$\Omega_0=\left\{(x,t)\in I\!R^2\,|\,t>\frac{x^2}{2}\right\},$$

$$\psi_{h+1-2l}(t)=\frac{(-1)^l}{2^l}\cdot\frac{1}{(2l-1)!!}\frac{1}{(l-1)!}\int_0^t(t-s)^{l-1}(Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{2s})ds,$$

$$l=1,2,\ \cdots,\ \left[\frac{h+1}{2}\right],\quad(9)$$

$$\psi_{h-2l}(t)=\begin{cases}(-2)^{(h-j-2l)/2}\cdot\dfrac{(h-j)!!}{(2l)!!}\psi^{\left(\frac{h-j-2l}{2}\right)}(t),\quad l=0,1,2\cdots,\dfrac{h-j}{2};\\ \dfrac{(-1)^{\frac{2l-h+j}{2}}}{2^{\frac{2l-h+j}{2}}}\cdot\dfrac{(h-j)!!}{(2l)!!}\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{2l-h+j}{2}-1\right)!}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{\frac{2l-h+j}{2}-1}\psi(s)ds,\\ \qquad l=\dfrac{h-j}{2}+1、\dfrac{h-j}{2}+2、\cdots、\left[\dfrac{h}{2}\right].\end{cases}\quad(10)$$

注： 我们约定，当 $l=0$ 时

$$(Q_{2(h-l)+3}Q_{2(h-l)+5}\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(x)\equiv\varphi_1(x).$$

证明　设 $(6)_{h,j}$ 有 C^∞ 解 $u(x,t)$，令 $\tilde{u}=X^hu$，$(X^hu)(0,t)=\psi_h(t)$，则 $\tilde{u}$ 必满足

$$\begin{cases}L_1u=0,\ t\geqslant 0;\\ u(x,0)=(Q_3Q_5\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(x),u_t(x,0)=(Q_3Q_5\cdots Q_{2h+1}\varphi)_2(x);\\ u(0,t)=\psi_h(t),\end{cases}\quad(11)$$

由[2]知问题(11)有C^∞解，当且仅当

$$\begin{cases}(Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(x)\text{是一个偶函数,}\\ \psi_h(t)\text{在 }t=0\text{ 处为一无限阶零点.}\end{cases}\tag{12}$$

记$(X^lu)(0,t)=\psi_l(t)$，$l=0,1,2,\cdots,h+1$。于是有

$$\begin{cases}2(h-l)\psi'_l(t)+\psi_{l+2}(t)=0,\\ \psi_l(0)=0.\end{cases}\tag{13}$$

由$\psi_j(t)=\psi(t)$，$h-j\equiv0\pmod 2$，从(13)就得着

$$\psi_h(t)=(-2)^{\frac{h-j}{2}}(h-j)!!\,\psi^{(\frac{h-j}{2})}(t).\tag{14}$$

由(12)知$\psi^{(\frac{h-j}{2})}(t)$在$t=0$处为一无限阶零点，又因

$$\psi_l(t)=(-2)^{\frac{l-j}{2}}(l-j)!!\,\psi^{(\frac{l-j}{2})}(t),\quad l=j,j+2,\cdots,h-2.$$

从$\psi_l(0)=0$，即得$\psi(0)=\psi'(0)=\psi''(0)=\cdots=\psi^{(\frac{h-j}{2}-1)}(0)=0$。故$\psi(t)$在$t=0$处为一无限阶零点，条件(7)的必要性得证。

反之，当条件(7)成立时，由[2]的定理2知问题(11)(其中$\psi_h(t)$由(14)定义)有唯一的C^∞解$\tilde{u}(x,t)$。记$(X^lu)(0,t)=\psi_l(t)$，$l=0,1,2\cdots,h+1$。易知

$$\psi_{h+1}(t)=(Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{2t}).\tag{15}$$

由于$h-j\equiv0\pmod 2$，所以从(15)，$\psi_j(t)=\psi(t)$及(13)，知所有的$\psi_l(t)$均被唯一地确定。于是问题$(6)_{h,j}$的解$u(x,t)$必满足

$$\begin{cases}X^hu=\tilde{u},\ t\geqslant\dfrac{x^2}{2},\\ (X^lu)(0,t)=\psi_l(t),\quad l=0,1,2,\cdots,h-1,\end{cases}\tag{16}$$

及

$$\begin{cases}X^hu=\tilde{u},\ 0\leqslant t\leqslant\dfrac{x^2}{2},\\ u(x,0)=\varphi_1(x),\\ X^lu(x,0)=(Q_{2(h-l)+3}Q_{2(h-l)+5}\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(x),\quad l=1,2,\cdots,h-1.\end{cases}\tag{17}$$

这样的$u(x,t)$必可在$t\geqslant0$的由$t=\dfrac{x^2}{2}$所划分的三个区域$\overline{\Omega}_-$，$\overline{\Omega}_+$及$\overline{\Omega}_0$中唯一地表示出来，并且在条件(7)下构成一个在$t\geqslant0$上的C^∞函数，因而它便是我们所要求的解。此外，由于$\tilde{u}$及$\psi_l(t)$均是唯一地被确定，所以所求的$(6)_{h,j}$的C^∞解是唯一的。

我们进而证明问题$(6)_{h,j}$的C^∞解$u(x,t)$必定由(8)所表示。

当$h=0$时，必$j=0$。此时(8)即为[2]的(10)式。

现设$h>0$。令$\tilde{u}=X^hu$，则$\tilde{u}$满足(11)式。其中$\psi_h(t)$由(14)表达。这样由[2]之(10)式，我们有

$$\tilde{u}(x,t)=X^h u(x,t)=\begin{cases}(Q_3Q_5\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\pm\sqrt{x^2-2t})\\ \quad+\int_{\pm\sqrt{x^2-2t}}^{x}(Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{2(t+\xi^2)-x^2})d\xi, \text{ 在 } \overline{\Omega}_\pm \text{ 中；}\\ \psi_h(t-\frac{x^2}{2})+\int_0^x(Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{2(t+\xi^2)-x^2})d\xi, \text{ 在 } \overline{\Omega}_0 \text{ 中。}\end{cases}$$

于是

$$\begin{cases}X^h u=(Q_3Q_5\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\pm\sqrt{x^2-2t})+\int_{\pm\sqrt{x^2-2t}}^{x}(Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{2(t+\xi^2)-x^2})d\xi,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{在 } \overline{\Omega}_\pm \text{ 中，}\\ u(x,0)=\varphi_1(x),\\ X^l u(x,0)=(Q_{2(h-l)+3}Q_{2(h-l)+5}\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(x), \quad l=1,2,\cdots,h-1\text{。}\end{cases}$$

这样，在$\overline{\Omega}_-$和$\overline{\Omega}_+$中，$u(x,t)$的表达式即为(8)的第一及第三式。

令$\varphi_3(x)\equiv u(x,\frac{x^2}{2})$，则在$\Omega_0$中 u 满足

$$\begin{cases}L_{2h+1}u=0, \quad t\geqslant\frac{x^2}{2},\\ u(x,\frac{x^2}{2})=\varphi_3(x),\\ (X^h u)(0,t)=\psi_h(t)\end{cases}\tag{18}$$

由$u(x,t)$在$\overline{\Omega}_\pm$中的表达式(8)，得

$$\varphi_3(x)=\frac{1}{h!}\int_0^x(x-\xi)^h(Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{2}\xi)d\xi.\tag{19}$$

由此，由[2]的定理 4，知$\overline{\Omega}_0$中解 $u(x,t)$必由(8)的第二式表示，其中诸 $\psi_l(t)$($l=0,1,2,\cdots,h$)通过[2]的定理 4 及(14)即知由(9)，(10)表示。定理证毕。

显然，定理 1 蕴含有[2]的定理 2。

定理2. 设 $h-j-1\equiv0(\mathrm{mod}2)$，$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$，且 $x=0$ 是它们的无限阶零点，$\psi(t)\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$，则问题$(6)_{h;j}$有 C^∞解，当且仅当

$$\begin{cases}(Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(x)\text{是一个偶函数，}\\ \psi(t)=\dfrac{(-1)^{\frac{h-j+1}{2}}}{2^{\frac{h-j+1}{2}}}\cdot\dfrac{1}{(h-j)!!}\cdot\dfrac{1}{(\frac{h-j-1}{2})!}\\ \qquad\cdot\int_0^t(t-s)^{\frac{h-j-1}{2}}(Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{2s})ds.\end{cases}\tag{20}$$

并且当(20)成立时，$(6)_{h;j}$的 C^∞解有无穷多个。

证明. 设问题 $(6)_{h;j}$ 有 C^∞ 解 $u(x,t)$，令$(X^{j+1}u)(0,t)=\psi_{j+1}(t)$。则 u 满足 $(6)_{h,j+1}$（其中 $\psi(t)$应代以 $\psi_{j+1}(t)$）。因$h-j-1\equiv0$ (mod2)，故由定理 1 得 $(Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(x)$ 是一个偶函数，且由(8)知$\psi(t)=(X^j u)(0,t)=\psi_j(t)$。由(9)得(20)的后一部份，必要性得证。

反之，若(20)成立，则任取在 $t=0$ 处有无限阶零点的 C^∞ 函数 ψ_{j+1}，由 $\psi(t)=\psi_j(t)$，$\psi_{j+1}(t)$ 及(13)式，可决定所有的 $\psi_l(t)$、$l=0,1,2,\cdots,h$。因而由此决定的(8)式 $u(x,t)$ 即为问题 $(6)_{h;j}$ 的 C^∞ 解。由于 $\psi_{j+1}(t)$ 的任意性。知 $(6)_{h;j}$ 的 C^∞ 解有无穷多个。定理证毕。

下面我们考虑与问题 $(6)_{h;j}$ 相应的混合问题：

$$\begin{cases} L_{2h+1}u=0,\ t\geqslant 0,\ x\geqslant 0, \\ u(x,0)=\varphi_1(x),\ u_t(x,0)=\varphi_2(x), \\ (X^j u)(0,t)=\psi(t). \end{cases} \tag{$(6)'_{h;j}$}$$

类似于定理 1 和定理 2，我们有以下两个相应的定理。

定理1′　设 $h-j\equiv 0\ (\mathrm{mod}2)$，$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$，且 $x=0$ 是它们的无限阶零点，$\psi(t)\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$，则问题 $(6)'_{h;j}$ 有唯一的 C^∞ 解 $u(x,t)$，当且仅当

$$\psi(t)\text{在 } t=0 \text{ 处为一无限阶零点。} \tag{$(7)'$}$$

并且当 $(7)'$ 满足时，解 $u(x,t)$ 为

$$u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{h!}\displaystyle\int_0^x (x-\xi)^h (Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{2(t+\xi^2)-x^2})\,d\xi \\ \qquad +\displaystyle\sum_{l=0}^{h}\psi_l\Big(t-\frac{x^2}{2}\Big)\frac{x^l}{l!},\ \text{在}\ \overline{\Omega'_0}\ \text{中}; \\ \dfrac{1}{h!}\displaystyle\int_{\sqrt{x^2-2t}}^{x}(x-\xi)^h (Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{2(t+\xi^2)-x^2}\,d\xi \\ \qquad +\displaystyle\sum_{l=0}^{h}(Q_{2(h-l)+3}Q_{2(h-l)+5}\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{x^2-2t})\frac{(x-\sqrt{x^2-2t})^l}{l!}, \\ \qquad\qquad \text{在}\ \overline{\Omega'_+}\ \text{中}, \end{cases}$$

其中 $\psi_l(t)$　$(l=0,1,2,\cdots h)$ 由(9)，(10)给出，且 $\Omega'_+=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\,|\,0<t<\frac{x^2}{2},\ x>0\}$，$\Omega'_0=\{(x,t)\in\overline{\mathbb{R}}^2\,|\,t>\frac{x^2}{2},\ x>0\}$。

定理2′　设 $h-j-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}2)$，$\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$，且 $x=0$ 是它们的无限阶零点，$\psi(t)\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$，则问题 $(6)'_{h;j}$ 有 C^∞ 解，当且仅当

$$\psi(t)=\frac{(-1)^{\frac{h-j+1}{2}}}{2^{\frac{h-j+1}{2}}}\cdot\frac{1}{(h-j)!!}\cdot\frac{1}{\left(\frac{h-j-1}{2}\right)!}\int_0^t (t-s)^{\frac{h-j-1}{2}}(Q_1Q_3\cdots Q_{2h+1}\varphi)_1(\sqrt{2s})\,ds, \tag{$(20)'$}$$

且当 $(20)'$ 成立时，$(6)'_{h;j}$ 的 C^∞ 解有无穷多个。

显然，定理 $2'$ 蕴含有[3]的定理 3。

§3　在重特征点集上给附加条件的 Goursat 问题

现在我们进而考虑下面的定解问题

$$\begin{cases} L_{2h+1}u=0, & t\geqslant \dfrac{x^2}{2}, \\ u\left(x,\dfrac{x^2}{2}\right)=\varphi(x), \\ (X^j u)(0,t)=\psi(t). \end{cases} \tag{$21)_{h;j}$$$

其中 j 是整数，且 $0\leqslant j\leqslant h$。

定理3. 设 $h-j\equiv 0(\mathrm{mod}2)$，$\varphi(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$，$\psi(t)\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$，则定解问题 $(21)_{h;j}$ 有唯一的 C^∞ 解，当且仅当

$$\begin{cases} \varphi^{(h+1)}(x)\text{为一偶函数}, & (22) \\ \psi^{(i)}(0)=\dfrac{(-1)^i}{2^i}\cdot\dfrac{(h-j-2i)!!}{(h-j)!!}\varphi^{(j+2i)}(0), & (23) \\ \qquad i=0,1,2\cdots,\dfrac{h-j}{2}. \end{cases}$$

并且当(22)，(23)成立时，$(21)_{h;j}$ 的 C^∞ 解为

$$u(x,t)=\frac{1}{h!}\int_0^x (x-\xi)^h\varphi^{(h+1)}\left(\sqrt{t-\frac{x^2}{2}+\xi^2}\right)d\xi + \sum_{l=0}^{h}\psi_l\left(t-\frac{x^2}{2}\right)\frac{x^l}{l!}, \tag{24}$$

其中

$$\psi_{h+1-2l}(t)=\frac{(-1)^l}{2^l}\cdot\frac{1}{(2l-1)!!}\cdot\frac{1}{(l-1)!}\int_0^t (t-s)^{l-1}\varphi^{(h+1)}(\sqrt{s})\,ds + \sum_{i=0}^{l-1}\frac{(-1)^i}{2^i}\frac{(2l-2i-1)!!}{(2l-1)!!}\varphi^{(h+1-2l+2i)}(0)\frac{t^i}{i!}, \tag{25}$$

$$l=1,2,\cdots,\left[\frac{h+1}{2}\right],$$

$$\psi_{h-2l}(t)=\begin{cases} (-2)^{\frac{h-j-2l}{2}}\cdot\dfrac{(h-j)!!}{(2l)!!}\psi^{\left(\frac{h-j-2l}{2}\right)}(t), \quad l=0,1,2,\cdots,\dfrac{h-j}{2}, \\ \dfrac{(-1)^{\frac{2l-h+j}{2}}}{2^{\frac{2l-h+j}{2}}}\cdot\dfrac{(h-j)!!}{(2l)!!}\cdot\dfrac{1}{\left(l-1-\frac{h-j}{2}\right)!}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{l-1-\frac{h-j}{2}}\psi(s)\,ds \\ \quad +\displaystyle\sum_{i=\frac{h-j}{2}}^{l-1}\dfrac{(-1)^i}{2^i}\dfrac{(2l-2i)!!}{(2l)!!}\varphi^{(h-2l+2i)}(0)\dfrac{t^i}{i!}, \\ \quad l=\dfrac{h-j}{2}+1,\cdots,\left[\dfrac{h}{2}\right]. \end{cases} \tag{26}$$

证明　设 $(21)_{h,j}$ 有 C^∞ 解 $u(x,t)$。令 $\psi_h(t)=(X^h u)(0,t)$，则 u 满足

$$\begin{cases} L_{2h+1}u=0, & t\geqslant\dfrac{x^2}{2}, \\ u\left(x,\dfrac{x^2}{2}\right)=\varphi(x), \\ (X^h u)(0,t)=\psi_h(t). \end{cases} \tag{27}$$

由[2]的定理 4 知，问题(27)存在唯一的 C^∞ 解，当且仅当

$$\begin{cases} \varphi^{(h+1)}(x)\text{是一个偶函数}, & (28)\\ \psi_h(0)=\varphi^{(h)}(0).^{*)} & (29)\end{cases}$$

且当条件(28)，(29)成立时，解$u(x,t)$由(24)表示，其中$\psi_{h+1-2l}(t)$由(25)给出，而$\psi_{h-2l}(t)$为

$$\psi_{h-2l}(t)=\frac{(-1)^l}{2^l}\cdot\frac{1}{(2l)!!}\frac{1}{(l-1)!}\int_0^t (t-s)^{l-1}\psi_h(s)ds$$

$$+\sum_{i=0}^{l-1}\frac{(-1)^i}{2^i}\cdot\frac{(2l-2i)!!}{(2l)!!}\varphi^{(h-2l+2i)}(0)\frac{t^i}{i!}, \tag{30}$$

$$l=1,2,\cdots,\left[\frac{h}{2}\right].$$

但从(24)易得$(X^j u)(0,t)=\psi_j(t)$。由$(21)_{h;j}$知$\psi_j(t)=\psi(t)$。

$$\psi(t)=\frac{(-1)^{\frac{h-j}{2}}}{2^{\frac{h-j}{2}}}\cdot\frac{1}{(h-j)!!}\cdot\frac{1}{\left(\frac{h-j}{2}-1\right)!}\int_0^t (t-s)^{\frac{h-j}{2}-1}\psi_h(s)ds$$

$$+\sum_{i=0}^{\frac{h-j}{2}-1}\frac{(-1)^i}{2^i}\cdot\frac{(h-j-2i)!!}{(h-j)!!}\varphi^{(j+2i)}(0)\frac{t^i}{i!}. \tag{31}$$

所以

$$\psi^{(i)}(0)=\frac{(-1)^i}{2^i}\cdot\frac{(h-j-2i)!!}{(h-j)!!}\varphi^{(j+2i)}(0). \tag{32}$$

$$i=0,1,2,\cdots,\frac{h-j}{2}-1.$$

由(31)和(29)有

$$\psi^{\left(\frac{h-j}{2}\right)}(0)=\frac{(-1)^{\frac{h-j}{2}}}{2^{\frac{h-j}{2}}}\cdot\frac{1}{(h-j)!!}\varphi^{(h)}(0). \tag{33}$$

综合(32)和(33)就是(23)。必要性得证。

反之，若(22)，(23)成立。则令

$$\psi_h(t)=(-2)^{\frac{h-j}{2}}(h-j)!!\psi^{\left(\frac{h-j}{2}\right)}(t). \tag{34}$$

于是由(25)，(30)表达的(24)式$u(x,t)$就满足定解问题(27)。由(23)和(34)知(31)成立。又由(24)知$(X^j u)(0,t)=\psi_j(t)$，从(31)及(30)得$\psi_j(t)=\psi(t)$。故(24)满足$(21)_{h,j}$。又从(30)得

$$\psi_{h-2l}(t)=\frac{(-1)^l}{2^l}\cdot\frac{1}{(2l)!!}\cdot\frac{1}{(l-1)!}\int_0^t (t-s)^{l-1}\psi_h(s)ds$$

$$+\sum_{i=0}^{l-1}\frac{(-1)^i}{2^i}\cdot\frac{(2l-2i)!!}{(2l)!!}\varphi^{(h-2l+2i)}(0)\frac{t^i}{i!}$$

$$=(-2)^{\frac{h-j-2l}{2}}\cdot\frac{(h-j)!!}{(2l)!!}\cdot\frac{1}{(l-1)!}\int_0^t (t-s)^{l-1}\psi^{\left(\frac{h-j}{2}\right)}(s)ds$$

$$+\sum_{i=0}^{l-1}\frac{(-1)^i}{2^i}\cdot\frac{(2l-2i)!!}{(2l)!!}\varphi^{(h-2l+2i)}(0)\frac{t^i}{i!}.$$

*)[2]中原为$\psi_h(0)=0$. 由于如[3]的附录所述，可去掉$\varphi(x)$以$x=0$为无限阶零点的条件，故此关系式成为(29)式.

利用(23)，即知 $\psi_{h-2l}(t)$ 就是(26)式。

由于当 $\psi(t)\equiv 0$时，$\psi_h(t)\equiv 0$。于是由[2]的定理 4 知问题(27)的 C^∞解为唯一。即定解问题$(21)_{h,j}$ 的 C^∞ 解为唯一，定理证毕。

显然，[2]的定理 4 及[4]的定理 1，2 均为此处的特例。

定理4　设 $h-j-1\equiv 0 \pmod 2$，$\varphi(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$，$\psi(t)\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$，则定解问题$(21)_{h,j}$ 有 C^∞ 解，当且仅当

$$\begin{cases} \varphi^{(h+1)}(x)\text{是一个偶函数}, & (35)\\ \psi^{\left(\frac{h-j+1}{2}\right)}(t)=\dfrac{(-1)^{\frac{h-j+1}{2}}}{2^{\frac{h-j+1}{2}}}\cdot\dfrac{1}{(h-j)!!}\varphi^{(h+1)}(\sqrt{t}), & (36)\\ \psi^{(i)}(0)=\dfrac{(-1)^i}{2^i}\cdot\dfrac{(h-j-2i)!!}{(h-j)!!}\varphi^{(j+2i)}(0), & \\ \qquad\qquad i=0,1,2,\cdots,\dfrac{h-j-1}{2}. & (37)\end{cases}$$

并且在条件(35)—(37)下，$(21)_{h;j}$ 的 C^∞解有无穷多个。

证明　与定理 3 的证明类似，设$(21)_{h;j}$ 有 C^∞解 $u(x,t)$，则由(25)，(30)式表达的诸 $\psi_l(t)$代入(24)式，即知由(24)式表达的 $u(x,t)$是问题(27)的 C^∞解。因此(35)和(37)式成立。又因 $h-j-1\equiv 0 \pmod 2$。令 $j=h+1-2l$，则由(23)知

$$\psi(t)=\psi_1(t)=\frac{(-1)^{\frac{h-j+1}{2}}}{2^{\frac{h-j+1}{2}}}\cdot\frac{1}{(h-j)!!}\cdot\frac{1}{\left(\frac{h-j-1}{2}\right)!}\int_0^t(t-s)^{\frac{h-j-1}{2}}\varphi^{(h+1)}(\sqrt{s})ds$$
$$+\sum_{i=0}^{\frac{h-j-1}{2}}\frac{(-1)^i}{2^i}\cdot\frac{(h-j-2i)!!}{(h-j)!!}\varphi^{(j+2i)}(0)\frac{t^i}{i!}, \tag{38}$$

由此即得(36)。

反之，当条件(35)—(37)成立时，任取 $\psi_h(t)\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$。利用关系式(13)，由此即可确定诸 $\psi_{h-2l}(t)$。利用 (38) 式，即可确定诸 $\psi_{h+1-2l}(t)$。这样由诸 $\psi_l(t)$ 构成的 (24) 式 $u(x,t)$ 即为定解问题$(21)_{h;j}$ 的 C^∞ 解。

由于 $\psi_h(t)$ 的任意性，知$(21)_{h,j}$ 的 C^∞ 解有无穷多个．定理证毕。

当 $j=0$ 或 1 时，定理 4 即为[4]中的相应结果。

类似于问题$(6)'_{h,j}$，我们可以讨论如下的混合问题。

$$\begin{cases} L_{2h+1}u=0,\ x\geqslant 0,\ t\geqslant\dfrac{x^2}{2},\\ u\left(x,\dfrac{x^2}{2}\right)=\varphi(x),\\ (X^ju)(0,t)=\psi(t).\end{cases} \tag{$(21)'_{h;j}$}$$

类似于定理 3 和定理 4，我们有以下两个相应的定理。

定理3′　设 $h-j\equiv 0 \pmod 2$，$\varphi,\psi\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$，则混合问题$(21)'_{h,j}$ 有唯一的 C^∞解，当且仅当

$$\psi^{(i)}(0)=\frac{(-1)^i}{2^i}\cdot\frac{(h-j-2i)!!}{(h-j)!!}\varphi^{(j+2i)}(0),\qquad (23)$$

$$i=0,1,2,\cdots,\frac{h-j}{2}.$$

并且当(23)成立时，$(21)'_{h,j}$的C^∞解由(24)表示。其中诸$\psi_i(t)$由(25)和(26)给出。

定理4' 设$h-j-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}2)$，$\varphi,\psi\in C^\infty(\overline{R}_+)$，则混合问题$(21)'_{h,j}$有$C^\infty$解，当且仅当(36)和(37)成立。并且此时$(21)'_{h,j}$的$C^\infty$解有无穷多个。

当$j=0$及1时，定理3'和4'即为[4]中的相应结果。

参考文献

[1] Treves, F., Discrete phenomena in uniqueness in the Cauchy problem. Proc. Amer. Math. Soc. 46(1974)229—233.

[2] Lu Zhujia, Mai Mingcheng, Wang Guangyin, Discrete phenomena in existence in the initial Value problems, Scientia Sinica, 22(1979), 1229—1237.

[3] 王传芳，关于混合问题的离散现象，数学年刊，1卷3、4期（1980）469—475.

[4] 陆柱家，重特征方程一类定解问题的适定性（未发表）.

On the Well Posed Problems for a Class of PDE with Double Characteristics

By Wang Chuanfang(王传芳) *and Lu Zhujia*(陆柱家)

Abstract

In[1],[2], F. Treves and G. Y. Wang at. al. have studied the following equation

$$L_pu\equiv u_{xx}-x^2u_{tt}+pu_t=0,$$

where p stands for a real parameter; They proved that both the Cauchy problem and Goursat problem have a unique solution if and only if $p=2h+1$, where $h\geqslant 0$ is an integer.

In this paper, we consider the following problems

$$\begin{cases} L_{2h+1}u=0,\ t\geqslant 0,\\ u(x,0)=\varphi_1(x),\ u_t(x,0)=\varphi_2(x),\\ (\partial_x+x\partial_t)^ju(0,t)=\psi(t), \end{cases}\qquad (1)$$

and

$$\begin{cases} L_{2h+1}u=0,\ t\geqslant \frac{x^2}{2},\\ u(x,\frac{x^2}{2})=\varphi_3(x),\\ (\partial_x+x\partial_t)^ju(0,t)=\psi(t), \end{cases}\qquad (2)$$

where j is an integer and $0\leqslant j\leqslant h$. We prove that both the problems (1) and (2) are well posed. These results generalize that of[2],[3] and[4].