不带微商的边界型求积公式*

何天晓

（合肥工业大学）

摘　　要

本文在不带微商项的条件下，对一些特殊区域构造了具有最高代数精确度的边界型求积公式。还对某些较广泛的区域解决了构造3次边界型或非边界型求积公式的“最少结点数”的问题。

首先，我们在立方体区域上将Sadowsky的42点5次边界型求积公式的结点个数减少到32点，并证明了要构造立方体区域上的5次边界型对称求积公式，结点个数不能少于32。文中还构造出n维双层球壳区域上具有最高（3次）代数精度和最少结点个数（$(2n+2)$点）的边界型求积公式。因此，[5]中构造出的3维双层球壳区域上的8点3次边界型求积公式是“最少结点数”的求积公式。最后，证明了对于2维、3维轴对称区域（即关于所有坐标轴都对称的区域）构造3次求积公式，至少分别用到4个和6个结点。对于n维球域构造3次求积公式至少要用到$2n$个结点。

本文出现的求积公式都是不带微商项的。

§1. 立方体区域上的32点5次边界型求积公式

考察立方体区域C_3：

$$-1\leqslant x\leqslant 1;\quad -1\leqslant y\leqslant 1;\quad -1\leqslant z\leqslant 1.$$

Sadowsky在C_3上构造出具有最高（5次）代数精度的42点边界型求积公式[6],[1]。我们把结点个数减少到32个，仍然构造出5次代数精度的边界型求积公式。

我们把满足下述条件的点组称为5次对称点组：

i）含有奇次方幂的次数$\leqslant 5$的n元单项式在该点组的值的和为零；

ii）只含偶次方幂的次数$\leqslant 5$的n元单项式在该点组的值的和关于n个元对称，即仅由单项式的方幂决定。

易知，凡是对称点组都是5次对称点组，反之不然。

可以验证C_3边界上的点组

I. $(\pm 1, \pm x_0, 0)$, $(\pm x_0, 0, \pm 1)$, $(0, \pm 1, \pm x_0)$, $0<x_0<1$

*1980年12月9日收到.

就是一个5次对称点组。例如，单项式x^2y^2，x^2z^2，y^2z^2在点组I上的值的和都是$4x_0^2$。

显然，如果能用特殊的5次对称点组代替一般的对称点组构造5次求积公式的话，则可以减少结点个数。

为构造C_3上的5次边界型求积公式，除上述点组I以外，另取边界上的点组：

Ⅱ．(±1，±1，0)，(±1，0，±1)，(0，±1，±1)，

Ⅲ．(±1，±1，±1)，

共32个点作为求积结点。设结点组Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ对应的权系数分别为a_1，a_2，a_3。我们的目标是构造5次求积公式，易知只要考虑该公式对单项式1，x^2，x^4，x^2y^2精确成立即可。因此得到关于a_1，a_2，a_3和x_0的方程组：

$$\begin{cases} 12a_1+12a_2+8a_3=8, \\ (4+4x_0^2)a_1+8a_2+8a_3=\dfrac{8}{3}, \\ (4+4x_0^4)a_1+8a_2+8a_3=\dfrac{8}{5}, \\ 4x_0^2a_1+4a_2+8a_3=\dfrac{8}{9}. \end{cases}$$

解出：$x_0=\sqrt{\dfrac{3}{10}}$，$a_1=\dfrac{80}{63}$，$a_2=-\dfrac{52}{63}$，$a_3=\dfrac{1}{3}$，

从而得到C_3上一个32点5次边界型求积公式

$$\int_{C_3} f(x,y,z)dxdydz \approx \frac{1}{63}\left[80\sum_1^{12} f(\mathrm{I})-52\sum_1^{12} f(\mathrm{II})+21\sum_1^{8} f(\mathrm{III})\right],$$

其中在点组Ⅰ的坐标中$x_0=\sqrt{\dfrac{3}{10}}$.

往证对于由5次对称点组构成的边界型求积公式，上述公式用到的结点个数最少。除上述3组点外，C_3边界上的5次对称点组还有

Ⅳ．$(1,0,0)_{FS}$*，6点；

Ⅴ．$(\pm y_0,\pm 1,0)$，$(\pm 1,0,\pm y_0)$，$(0,\pm y_0,\pm 1)$，$0<y_0<1$，12点；

Ⅵ．$(1,x_1,x_2)_{FS}$，$0<x_1<1$，$0<x_2<1$，24点；

Ⅶ．$(1,1,x_3)_{FS}$，$0<x_3<1$，24点。

首先，为构造5次边界型求积公式，每个界面上至少应取一个结点。如果每个界面上恰有一点，按要求，它们应是点组Ⅳ。经验证，它们不能构成5次求积公式。

按要求，每个界面上的结点个数应相等。如果每个界面上有2个结点，则它们应是点组Ⅰ或点组Ⅴ。经检验，它们不适用（即不能用来构成5次求积公式，下同）。

如果每个界面上有3个结点，则它们是点组Ⅰ和Ⅳ或者Ⅴ和Ⅳ。经检验，不适用。

如果每个界面上有4个结点，则它们是点组Ⅲ或者点组Ⅱ或者点组Ⅰ和Ⅴ或者点组Ⅵ。经检验，它们都不适用。

*此处$(1,0,0)_{FS}$表示由点$(1,0,0)$生成的对称点组。

如果每个界面上有5个结点，则它们是点组Ⅳ和Ⅲ或者点组Ⅱ和Ⅳ或者点组Ⅰ，Ⅳ和Ⅴ或者点组Ⅵ和Ⅳ。经检验，不适用。

如果每个界面上有6个结点，考虑到需要构造结点个数少于32的5次求积公式，则它们只能是点组Ⅲ和Ⅰ或者点组Ⅲ和Ⅴ或者点组Ⅱ和Ⅰ或者点组Ⅱ和Ⅴ。经检验，它们都不适用。

如果每个界面上有7个结点，考虑到结点总数应少于32，则它们只能是点组Ⅰ，Ⅳ和Ⅲ或者点组Ⅴ，Ⅳ和Ⅲ或者点组Ⅰ，Ⅱ和Ⅳ或者点组Ⅴ，Ⅱ和Ⅳ。经检验，它们都不适用。

如果每个界面上有8个结点，考虑到结点总数应少于32，则它们只能是点组Ⅶ或者点组Ⅱ和Ⅲ。经检验，它们不适用。顺便指出，适当地选取Ⅰ和Ⅴ，用它们和点组Ⅳ作为结点，可以构成无穷多个32点5次求积公式。

如果每个界面上有9个结点，考虑到结点总数应少于32，则它们只能是点组Ⅶ和Ⅳ或者点组Ⅲ，Ⅱ和Ⅳ。经验证，它们都不适用。

如果每个界面上有不少于10个的结点，则无论怎样安排，结点总个数都不能少于32。

这就说明用5次对称点组构造 C_3 上5次边界型求积公式，结点个数不能少于32。因为对称点组都是5次对称点组，故有

命题1. 在立方体区域上存在着任意多个32点5次边界型求积公式。并且要构造对称的5次边界型求积公式，结点个数不能少于32。

下面顺便给出一个结点不落在 C_3 内部的26点5次（非边界型）求积公式。选取点组Ⅳ，Ⅲ和

$$\mathrm{I}'.\quad \left(\pm 1,\pm\sqrt{\frac{8}{5}},0\right),\ \left(\pm\sqrt{\frac{8}{5}},0,\pm 1\right),\ \left(0,\pm 1,\pm\sqrt{\frac{8}{5}}\right)$$

作为结点。易见此时点组Ⅰ′在 C_3 的外部。求积公式为

$$\int_{C_3} f(x,y,z)\,dxdydz \approx \frac{1}{18}\left[-5\sum_{1}^{12} f(\mathrm{I}) + 6\sum_{1}^{8} f(\mathrm{III}) + 26\sum_{1}^{6} f(\mathrm{IV})\right].$$

§2. n维双层球壳区域上最少点数的边界型求积公式

首先考察 n 维双层球壳区域 S_n^{shell}：

$$a^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant b^2.$$

命题2. 对 n 维双层球壳区域而言，存在着 $2(n+1)$ 点的3次代数精度的边界型求积公式。并且这个代数精确度不能再提高了。

证。如果要求结点均取在边界上，可设

$$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-a^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-b^2\right).$$

一方面

$$\int_{S_n^{shell}}P(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n<0,$$

另一方面求积和为零。因此在不许引进微商项的条件下，S_n^{shell} 上的边界型求积公式不能具有高于3次的代数精确度。

下面取点组

Ⅰ. $(\pm b,0,0,\cdots,0,0)$, $(0,\pm b,0,\cdots,0,0)$, $\cdots$, $(0,0,0,\cdots,\pm b,0)$,

Ⅱ. $(0,0,0,\cdots,0,\pm b)$,

Ⅲ. $(0,0,0,\cdots,0,\pm a)$

作为结点构造3次求积公式。设点组Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ对应的求积系数分别是 a_1，a_2，a_3。易知只要求积公式对1，x_1^2，x_n^2 精确成立即可。由此获得关于 a_1，a_2，a_3 的方程组

$$\begin{cases}2(n-1)a_1+2a_2+2a_3=\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}(b^n-a^n)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)},\\[2ex] 2b^2a_1=\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}(b^{n+2}-a^{n+2})}{(n+2)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)},\\[2ex] 2b^2a_2+2a^2a_3=\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}(b^{n+2}-a^{n+2})}{(n+2)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}.\end{cases}$$

解出

$$a_1=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}(b^{n+2}-a^{n+2})}{2b^2(n+2)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)},$$

$$a_2=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2b^2(b^2-a^2)(n+2)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}[b^{n+4}+(n+1)a^{n+2}b^2-3b^{n+2}a^2-(n-1)a^{n+4}],$$

$$a_3=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2(b^2-a^2)(n+2)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}[2b^{n+2}-(n+2)a^nb^2+na^{n+2}].$$

由此得到 S_n^{shell} 上的3次边界型求积公式

$$\int_{S_n^{shell}}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n\approx\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2b^2\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)(n+2)(b^2-a^2)}\Big\{(b^2-a^2)$$

$$\cdot(b^{n+2}-a^{n+2})\sum_{1}^{2n-2}f(\mathrm{I})+b^2[2b^{n+2}-(n+2)a^nb^2+na^{n+2}]\sum_{1}^{2}f(\mathrm{III})+[b^{n+4}+(n+1)$$

$$\cdot a^{n+2}b^2-3b^{n+2}a^2-(n-1)a^{n+4}]\sum_{1}^{2}f(\mathrm{II})\Big\}. \qquad (1)$$

当 $n=2,3$时，分别得到园环上的6点3次边界型求积公式和3维双层球壳上8点3次边界型求积公式：

$$\iint_{S_2^{shell}} f(x,y)dxdy\approx\frac{\pi(b^2-a^2)}{8b^2}\{(b^2+a^2)[f(b,0)+f(-b,0)]+2b^2[f(0,a)$$

$$+f(0,-a)]+(b^2-a^2)[f(0,b)+f(0,-b)]\},$$

$$\iiint_{S_3^{shell}} f(x,y,z)dxdydz\approx\frac{2\pi}{15b^2(b^2-a^2)}\{(b^2-a^2)(b^5-a^5)[f(b,0,0)+f(-b,0,0)$$

$$+f(0,b,0)+f(0,-b,0)+b^2(2b^5-5a^3b^2+3a^5)[f(0,0,a)+f(0,0,-a)]$$

$$+(b^7-3b^5a^2+4a^5b^2-2a^7)[f(0,0,b)+f(0,0,-b)]\}.$$

我们在[5]中已得到这两个公式．顺便说明，在公式(1)中令 $a\to 0$，可得到 n 维球域 S_n 上的个一3次求积公式：

$$\int_{S_n} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1,dx_2\cdots dx_n\approx\frac{\pi^{\frac{n}{2}}b^n}{2(n+2)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\left[\sum_{1}^{2n-2}f(\mathrm{I})+\sum_{1}^{2}f(\mathrm{II})+4f(0)\right],$$

其中 $f(0)$ 表示函数 f 在原点的值．

命题3． 构造 S_n^{shell} 上的3次边界型求积公式，结点个数不能少于 $2(n+1)$ 个．换句话说，公式(1)是 S_n^{shell} 上最少点数3次边界型求积公式．

证． 我们先来证明，对于区域 S_n^{shell}，3次边界型求积公式的结点在外层球壳上的个数不能少于$2n$个．事实上，如果少于$2n$个的话，将会引出矛盾．不妨以 $2n-1$ 个结点为例证明之（当结点个数少于$2n-1$个时，证明更简单）．这时令内层球壳的半径$a\to 0$，就会得到一个 n 维球域 S_n 上的 $2n$ 点3次求积公式

$$\int_{S_n} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n\approx a_0f(0,0,\cdots,0)+\sum_{i=1}^{2n-1}a_if(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ni}), \qquad (2)$$

其中 $(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ni})$ $(i=1,2,\cdots,2n-1)$ 分布在外层球壳上．然而，可以证明这是不可能的，论证如下．

考虑诸 $2n-1$ 维向量：

$\mathbf{a}=(\sqrt{a_1},\ \sqrt{a_2},\cdots,\sqrt{a_{2n-1}})$；

$\mathbf{a}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j=(\sqrt{a_1}x_{i,1}x_{j,1},\ \sqrt{a_2}x_{i,2}x_{j,2},\cdots,\sqrt{a_{2n-1}}x_{i,2n-1}x_{j,2n-1})$；

$\mathbf{a}\mathbf{x}_i=(\sqrt{a_1}x_{i,1},\ \sqrt{a_2}x_{i,2},\cdots,\sqrt{a_{2n-1}}x_{i,2n-1})$； $i,j=1,2,\cdots,n$.

先设诸向量 $\mathbf{ax}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个向量不含零分量。不妨设其为 $\mathbf{ax}_1$。则有如下 $2n$ 个线性无关的 $2n-1$ 维向量：

$$\mathbf{ax}_1,\mathbf{ax}_2,\cdots,\mathbf{ax}_n,\mathbf{ax}_1^2,\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_n. \tag{3}$$

事实上，若有常数 A_i, $i=1,2,\cdots,2n$ 使

$$A_1\mathbf{ax}_1+A_2\mathbf{ax}_2+\cdots+A_n\mathbf{ax}_n+A_{n+1}\mathbf{ax}_1^2+\cdots+A_{2n}\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_n=0, \tag{4}$$

在上式两边同时点乘上 $\mathbf{ax}_1$，左边不考虑系数的话，每一项都是某一单项式的求积和。因为(2)具有3次代数精度，因此除第一项外，其余全部为零；而

$$\mathbf{ax}_1\cdot\mathbf{ax}_1=\sum_{i=1}^{2n-1}a_ix_i^2\neq0.$$

故 $A_1=0$。类似可证 $A_2=A_3=\cdots=A_n=0$。

又因为 $\mathbf{ax}_1$ 不含有零分量，故由(4)可得

$$A_{n+1}\mathbf{ax}_1+A_{n+2}\mathbf{ax}_2+\cdots+A_{2n}\mathbf{ax}_n=0.$$

类似可证 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=A_{2n}=0$。这就证明(3)是线性无关的，因而导出矛盾。

若向量 $\mathbf{ax}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中没有一个向量不含有零分量，则对原坐标系作旋转变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{11}&l_{12}&\cdots&l_{1n}\\l_{21}&l_{22}&\cdots&l_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&l_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix},$$

其中 $(l_{1,i},l_{2,i},\cdots,l_{n,i})$ 是新坐标轴 OX_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 在旧坐标系中的方向余弦，从而使得外层球壳上的 $2n-1$ 个结点在新坐标系中不会落在超平面 $X_1=0$ 上，这是完全可以办得到的。

显然，经过旋转变换后，多项式的次数不会增高，设(2)式经过上述的旋转变换后成为

$$\int_{S_n}F(X_1,X_2,\cdots,X_n)|det\,\mathbf{A}|dX_1dX_2\cdots dX_n\approx a_0F(0,0,\cdots0)+\sum_{i=1}^{2n-1}a_iF(X_{1i},X_{2i}\cdots,X_{ni}). \tag{5}$$

如果(2)式具有3次代数精确度，则(5)式也具有3次代数精度，反之亦然。但是按照前半部分的证明方法，同样可以证明(5)式不具有3次代数精度。因此(2)式也不具有3次代数精度。这就证明了外层球壳上的结点个数不能少于 $2n-1$ 个。

下面证明内层球壳上结点个数不能少于2个。因为假若内层球壳上没有结点或者只有一个结点 $(x_{1,0},x_{2,0},\cdots,x_{n,0})$，则只须取

$$f(x_1x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-b^2$$

或者

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-b^2\right)(x_j-x_{j,0}),$$

其中 $x_{j,0}$ 是 $(x_{1,0},x_{2,0},\cdots,x_{n,0})$ 中任意一个非零的分量，即可知积分值与求积和不等，得出矛盾。故内层球壳上结点个数不得少于2。证毕

系1. 圆环区域上的3次边界型求积公式的结点个数不能少于6。

系2. 3维双层球壳区域上的3次边界型求积公式的结点个数不能少于8。

系1已在[1]中证得。顺便说明，前面给出的圆环区域上的6点3次边界型求积公式和3维双层球壳区域上的8点3次边界型求积公式都是最少点数的公式。

§3. 一些最少点数的问题的解决

在命题3的外层球壳上结点个数不能少于 $2n$ 个的证明中，如果我们并不假定 $2n-1$ 个结点必定落在 n 维球域 S_n 的边界上，证明仍然成立。因此有

定理1. 对 n 维球域构造3次代数精度的求积公式至少需要 $2n$ 个结点。

n 维球域上 $2n$ 点3次求积公式的存在见[2]，[3]，[1]。

把命题3证明中的方法稍许变化一下，可得如下结果。

定理2. 构造平面轴对称区域（即关于所有坐标轴对称的区域，下同）上的3次求积公式至少需要4个结点。

理定3. 构造3维轴对称区域上的3次求积公式至少需要6个结点。

平面轴对称区域上的4点3次求积公式和3维轴对称区域上的6点3次求积公式的存在见[2]，[3]，[1]。

在定理1，2，3中，我们假设权函数 $w(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正的，轴对称的，即

$$w(x_1,x_2\cdots,x_n)=w(-x_1,x_2,\cdots,x_n)=w(x_1,-x_2,\cdots,x_n)=\cdots$$
$$=w(x_1,x_2,\cdots,-x_n)>0.$$

定理2的证明蕴含在定理3的证明中，为节省篇幅，下面仅证明定理3。

定理3的证明。我们证明，如果结点个数少于6个的话，将会引出矛盾。不妨以5个结点为例证明之（当结点个数少于5个时，证明更简单）。

设这5个结点为 $(x_{1i},x_{2i},x_{3i})(i=1,2,\cdots,5)$，它们构成的3维轴对称区域 V_3 上的3次求积公式为

$$\int_{V_3} w(x_1,x_2,x_3)\,f(x_1x_2,x_3)\,dx_1dx_2dx_3\approx\sum_{i=1}^{5}a_if(x_{1i},x_{2i},x_{3i}). \tag{6}$$

考察以下诸5维向量：

$\mathbf{a}=(\sqrt{a_1},\sqrt{a_2},\cdots,\sqrt{a_5})$；

$\mathbf{ax}_i\mathbf{x}_j=(\sqrt{a_1}x_{i1}x_{j1},\ \sqrt{a_2}x_{i2}x_{j2},\cdots,\sqrt{a_5}x_{i5}x_{j5})$；

$\mathbf{ax}_i=(\sqrt{a_1}x_{i1},\ \sqrt{a_2}x_{i2},\cdots,\sqrt{a_5}x_{i5})\ (i,j=1,2,\cdots,5)$.

分成两种情况讨论：

A．如果诸向量 $\mathbf{ax}_i(i=1,2,\cdots,5)$ 中至少有一个向量不含零分量．不妨设其为 $\mathbf{ax}_1$．类似于命题3中的证明，可知6个5维向量

$$\mathbf{ax}_1,\mathbf{ax}_2,\mathbf{ax}_3,\mathbf{ax}_1^2,\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_2,\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_3$$

线性无关，因而引出矛盾．

B．如果诸向量 $\mathbf{ax}_i(i=1,2,\cdots,5)$ 中任何一个向量都含有零分量，那么再分成两种情况讨论：

B_1．若 $\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_2=\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_3=\mathbf{ax}_2\mathbf{x}_3=\mathbf{0}$，则6个5维向量

$$\mathbf{ax}_1,\mathbf{ax}_2,\mathbf{ax}_3,\mathbf{ax}_1^2,\mathbf{ax}_2^2,\mathbf{ax}_3^2 \tag{7}$$

线性无关．事实上，如果存在常数 $A_i(i=1,2,\cdots,6)$ 使得

$$A_1\mathbf{ax}_1+A_2\mathbf{ax}_2+A_3\mathbf{ax}_3+A_4\mathbf{ax}_1^2+A_5\mathbf{ax}_2^2+A_6\mathbf{ax}_3^2=\mathbf{0} \tag{8}$$

由前述，将(8)式两边分别点乘上 $\mathbf{ax}_1,\mathbf{ax}_2,\mathbf{ax}_3$ 后，立知

$$A_1=A_2=A_3=0.$$

又因为 $\mathbf{ax}_3\neq\mathbf{0}$，由条件，对应着 $\mathbf{ax}_3^2$ 的不为零的分量 $\sqrt{a_i}\,x_{3i}^2\neq0$，有 $x_{1i}=0$，$x_{2i}=0$，故由(8)得

$$A_6=0.$$

类似地 $A_5=0$．故 $A_4=0$．这就证明了(7)是线性无关的，因而导出矛盾．

B_2．若 B_1 假设不成立，即 $\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_2$，$\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_3$，$\mathbf{ax}_2\mathbf{x}_3$ 中至少有一个不为零．则再分成三种情况讨论．

(i) 如果 $\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_2\neq\mathbf{0}$，则如下6个5维向量线性无关，因而导出矛盾：

$$\mathbf{ax}_1,\mathbf{ax}_2,\mathbf{ax}_3,\mathbf{ax}_1^2,\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_2,\mathbf{a}. \tag{9}$$

事实上，假如存在常数 $A_i(i=1,2,\cdots,6)$ 使得

$$A_1\mathbf{ax}_1+A_2\mathbf{ax}_2+A_3\mathbf{ax}_3+A_4\mathbf{ax}_1^2+A_5\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_2+A_6\mathbf{a}=\mathbf{0}. \tag{10}$$

则

$$A_1=A_2=A_3=0.$$

因为 $\mathbf{ax}_1$ 中含有零分量 $\sqrt{a_i}\,x_{1i}=0$，而 $a_i\neq0$，因此从(10)式

$$A_6=0.$$

(10)式成为

$$A_4\mathbf{ax}_1^2+A_5\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_2=\mathbf{0}.$$

上式两边同时点乘上 $\mathbf{a}$．注意到 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{ax}_1^2$ 和 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_2$ 分别是函数 $f=x_1^2$ 和 x_1x_2 的求积和．由于(6)式具有3次代数精度．故

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{ax}_1^2\neq0,\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_2=0.$$

因此$A_4=0$，从而$A_5=0$，(9)线性无关，引出矛盾。

(ii) 如果$\mathbf{ax}_1\mathbf{x}_3\neq 0$，类似可知

$$\mathbf{ax}_1, \mathbf{ax}_2, \mathbf{ax}_3, \mathbf{ax}_1^2, \mathbf{ax}_1\mathbf{x}_3, \mathbf{a}$$

线性无关，引出矛盾。

(iii) 如果$\mathbf{ax}_2\mathbf{x}_3\neq 0$，类似地可知

$$\mathbf{ax}_1, \mathbf{ax}_2, \mathbf{ax}_3, \mathbf{ax}_1^2, \mathbf{ax}_2\mathbf{x}_3, \mathbf{a}$$

线性无关，引出矛盾。

这些矛盾说明，5个结点不可能构成V_3上的3次求积公式。证毕。

由定理3立知，[1]中给出的C_3上的6点3次边界型求积公式

$$\int_{C_3} f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3 \approx \frac{4}{3}[f(1,0,0)+f(-1,0,0)+f(0,1,0)+f(0,-1,0)+f(0,0,1)+f(0,0,-1)]$$

是最少点数的求积公式。

本文在成文过程中得到周蕴时同志的帮助，作者谨在此致谢。

参　考　文　献

[1] 徐利治，周蕴时，高维数值积分，科学出版社，1980.

[2] Stroud, A. H., Remarks on the disposition of points in numerical integration formulas, *Math, Tables Aids Comput.* 11(1975), pp. 257—261.

[3] Stroud, A. H., Numerical integration formulas of degree two, *Math. Comput.*, 14 (1960), pp. 21—26.

[4] Stroud, A. H., Approximate calculation of multiple integrals, *Prentice-Hall Series in Automatic Computation*, 1971.

[5] 何天晓，关于几个特殊区域的边界型求积公式，淮北煤炭师范学院学报（自然科学版），1(1980), pp. 50—54.

[6] Sadowsky, M., A formula for the approximate computation of a triple integral, *Amer. Math. Monthly*, 47 (1940), pp. 539—543.

Boundary—Type Quadrature Formulas without Derivative Terms

By He Tianxiao (何天晓)

Abstract

This paper gives some boundary-type quadrature formulas (i. e. those are constructed by boundary nodes) with highest polynomial precision and without derivative terms for some special regions, and determines the minimum number of evaluation points required by certain boundary-type or non-bounbary-type quadrature formulas.