鸽笼原理的一个注记*

王玉丰　吴乐光

（华中工学院）

下面是鸽笼原理应用的一个典型的例子：设有一个运动员在相继的 d 天中参加比赛，每天至少比赛一场，且总共参加比赛的场数不超过 $b(d<b<2d)$。那末可以断言：对于每个正整数 $k\leqslant 2d-b-1$，必有相继的若干天，在这段时间中，他刚好参加 k 场比赛。[1]、[2] J. P. Hutchinson 和 P. B. Trow[3] 把上述结论仍然成立的正整数 k 的范围加以扩大，并提出了一个未解决的问题，就是如何简单的表征使上述结论不成立的正整数的下界。该文给出了当 $b\leqslant\frac{3d}{2}$ 时这个下界等于 $d+1$。本文进一步讨论当 $\frac{3d}{2}<b\leqslant\frac{7d}{4}$ 时这个下界的值。

设 d，b 为固定的正整数，$d<b<2d$。若 $S=(S_1, S_2, \cdots, S_d)$ 为严格递增的正整数序列，且 $S_i\leqslant b$，则称 S 为场数累计序列。又若存在正整数 $m,n(1\leqslant n<m\leqslant d)$，使 $S_m-S_n=k$，或者有某个 $S_i=k(1\leqslant i\leqslant d)$，则称 S 具有性质 k。令

$A=\{k\,|\,$对于任何场数累计序列$\mathbf{S}$，$\mathbf{S}$具有性质$k\}$

$A^c=\{1,2,\cdots,b\}-A$.

由鸽笼原理可知 $\{1,2,\cdots,2d-b-1\}\subseteq A$。J. P. Hutchinson 和 P. B. Trow[3] 给出了 $k\in A$ 的充分必要条件为 $2d-r>b$，其中 r 为 k 除 d 所得的余数。这个命题可以改述为等价的命题：$k\in A^c$ 的充分必要条件为 $2d-r\leqslant b$，其中 $d=mk+r$，$0\leqslant r<k$。由这两个命题可得下列一些结论。

命题 1. 当 $k>d$ 时，$k\in A^c$；当 $k=d$ 时，$k\in A$。

事实上，当 $k>d$ 时，$r=d$，而 $2d-r=d<b$，故 $k\in A^c$。当 $k=d$ 时，$r=0$，而 $2d-r=2d>b$，故 $k\in A$。

命题 2. 当 $k<d$ 时，则 $k\in A^c$ 的充分必要条件为存在正整数 m，使 $\frac{d}{m+1}<k\leqslant\frac{b-d}{m}$。

事实上，若 $k\in A^c$，则存在正整数 m，使 $d=mk+r$，$0\leqslant r<k$，且 $2d-r\leqslant b$。于是 $d<(m+1)k$。从而 $k>\frac{d}{m+1}$。由 $2d-r\leqslant b$ 及 $d=mk+r$ 可得 $k\leqslant\frac{b-d}{m}$。反之，若存在正整数 m，使 $\frac{d}{m+1}<k\leqslant\frac{b-d}{m}$。由 $mk\leqslant b-d<d$ 得 $d-mk>0$。再由 $(m+1)k>d$ 得 $d-mk<k$，故 $d=mk+r$，$r=d-mk$，且 $2d-r\leqslant b$，因此 $k\in A^c$。

*1981年4月20日收到。

推荐人：俞玉森。

命题3．对于正整数m，存在正整数k满足$\frac{d}{m+1}<k\leqslant\frac{b-d}{m}$的充分必要条件为$m$满足$0<m<\frac{b-d}{2d-b}$及$\left[\frac{b-d}{m}\right]-\left[\frac{d}{m+1}\right]\geqslant1$．

事实上，由$m>0$及$\frac{d}{m+1}<k\leqslant\frac{b-d}{m}$即得$0<m<\frac{b-d}{2d-b}$．由$\frac{d}{m+1}<k\leqslant\frac{b-d}{m}$有$\left[\frac{d}{m+1}\right]+1\leqslant k\leqslant\left[\frac{b-d}{m}\right]$，故$\left[\frac{b-d}{m}\right]-\left[\frac{d}{m+1}\right]\geqslant1$．反之，由$\left[\frac{b-d}{m}\right]-\left[\frac{d}{m+1}\right]\geqslant1$可知$\frac{d}{m+1}<1+\left[\frac{d}{m+1}\right]\leqslant\frac{b-d}{m}$，令$k=1+\left[\frac{d}{m+1}\right]$，则有$\frac{d}{m+1}<k\leqslant\frac{b-d}{m}$．

综合上述命题1，2，3即得

定理．设$k_0=\min\limits_{k\in A'}k$，$M=\left\{m\,\middle|\,0<m<\frac{b-d}{2d-b},\ \left[\frac{b-d}{m}\right]-\left[\frac{d}{m+1}\right]\geqslant1\right\}$．若$M=\phi$，则$k_0=d+1$；若$M\neq\phi$，记$m_0=\max\limits_{m\in M}m$，则$k_0=\left[\frac{d}{m_0+1}\right]+1$．

下面讨论当$\frac{3d}{2}<b\leqslant\frac{7d}{4}$时$A'$的下界$k_0$．

（一）当$\frac{3d}{3}<b\leqslant\frac{5d}{3}$时，函数$f(x)=\frac{x-d}{2d-x}$为递增函数，而$f\left(\frac{3d}{2}\right)=1$．$f\left(\frac{5d}{3}\right)=2$，故当$\frac{3d}{2}<b\leqslant\frac{5d}{3}$时，$1<\frac{b-d}{2d-b}\leqslant2$，因此只有唯一的$m=1$满足$0<m<\frac{b-d}{2d-b}$．

i）当$d=2n$时，$\frac{3d}{2}=3n$，$\frac{5d}{3}=3n+\frac{n}{3}$，于是$b=3n+i\left(i=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{3}\right]\right)$，而$\left[\frac{b-d}{m}\right]-\left[\frac{d}{m+1}\right]=i\geqslant1$；

ii）当$d=2n+1$时，$\frac{3d}{2}=3n+1+\frac{1}{2}$，$\frac{5d}{3}=3n+1+\frac{n+2}{3}$，于是$b=3n+i\left(i=2,3,\cdots,\left[\frac{n+5}{3}\right]\right)$，而$\left[\frac{b-d}{m}\right]-\left[\frac{d}{m+1}\right]=i-1\geqslant1$．

因此$M=\{1\}$，$m_0=1$．于是由定理可知$k_0=\left[\frac{d}{1+m}\right]+1=\left[\frac{d}{2}\right]+1$．

（二）当$\frac{5d}{3}<b\leqslant\frac{7d}{4}$时，由于$b=\frac{7d}{4}$时，$\frac{b-d}{2d-b}=3$，故当$\frac{5d}{3}<b\leqslant\frac{7d}{4}$时，$2<\frac{b-d}{2d-b}\leqslant3$．因此$m=1$或2时满足$0<m<\frac{b-d}{2d-b}$．

i）当$d=3n$时，$\frac{5d}{3}=5n$，$\frac{7d}{4}=5n+\frac{n}{4}$，于是$b=5n+i\left(i=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{4}\right]\right)$．$m=2$且$b=5n+i\,(i\geqslant2)$时，

$$\left[\frac{b-d}{m}\right]-\left[\frac{d}{m+1}\right]=\left[\frac{i}{2}\right]\geqslant1；$$

$m=1$且$b=5n+1$时，

$$\left[\frac{b-d}{m}\right]-\left[\frac{d}{m+1}\right]=n+1-\left[\frac{n}{2}\right]>1.$$

故由定理有

$$k_0=\begin{cases}\left[\dfrac{d}{2}\right]+1 & \text{当 } b=5n+1 \text{ 时,}\\ \left[\dfrac{d}{3}\right]+1 & \text{当 } b=5n+i\left(i=2,\cdots,\left[\dfrac{n}{4}\right]\right)\text{时.}\end{cases}$$

ii) 当$d=3n+1$时，$\dfrac{5d}{3}=5n+1+\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{7d}{4}=5n+2+\dfrac{n-1}{4}$，于是$b=5n+i\left(i=2,3,\cdots,\left[\dfrac{n+7}{4}\right]\right)$. $m=2$ 且 $b=5n+i(i\geqslant 3)$ 时，

$$\left[\frac{b-d}{m}\right]-\left[\frac{d}{m+1}\right]=\left[\frac{i-1}{2}\right]\geqslant 1;$$

$m=1$ 且 $b=5n+2$时，

$$\left[\frac{b-d}{m}\right]-\left[\frac{d}{m+1}\right]=n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]>1,$$

故

$$k_0=\begin{cases}\left[\dfrac{d}{2}\right]+1 & \text{当 } b=5n+2 \text{ 时,}\\ \left[\dfrac{d}{3}\right]+1 & \text{当 } b=5n+i\left(i=3,4,\cdots,\left[\dfrac{n+7}{4}\right]\right)\text{时.}\end{cases}$$

iii) 当$d=3n+2$时，$\dfrac{5d}{3}=5n+3+\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{7d}{4}=5n+3+\dfrac{n+2}{4}$，于是$b=5n+i\left(i=4,5,\cdots,\left[\dfrac{n+14}{4}\right]\right)$. $m=2$时，

$$\left[\frac{b-d}{m}\right]-\left[\frac{d}{m+1}\right]=\left[\frac{i-2}{2}\right]\geqslant 1,$$

故$k_0=\left[\dfrac{d}{3}\right]+1$.

总结(一)(二)可知，当$\dfrac{3d}{2}<b\leqslant\dfrac{5d}{3}$时，$k_0=\left[\dfrac{d}{2}\right]+1$；当$\dfrac{5d}{3}<b\leqslant\dfrac{7d}{4}$时，

$$k_0=\begin{cases}\left[\dfrac{d}{2}\right]+1 & \text{当 } d=3n \text{ 且 } b=5n+1 \text{ 或 } d=3n+1 \text{ 且 } b=5n+2 \text{ 时,}\\ \left[\dfrac{d}{3}\right]+1 & \text{其它}\end{cases}$$

参 考 文 献

[1] Liu C. L., Elements of discrete mathematics, McGraw-Hill, New York (1977).

[2] Brualdi R.A., Introductory combinatorics, North—Holland, New York (1977).

[3] Hutchinson J. P. and Trow P. E., Some pigeonhole principle results extended, Amer. Math. Monthly, Vol. 87, 8(1980), 648—651.

A Note On Pigonhole Principle

By Wang Yifeng (王玉丰) & *Wu Leguang* (吴乐光)

Abstract

Let d, b be fixed positive integers, $d<b\leqslant 2d$. A positive integer sequence $S=(s_1,s_2,\cdots,s_d)$ is called a game sum sequence if it is a strictly increasing sequence and $s_d\leqslant b$. Further, if there exist two positive integers m, $n(1\leqslant n<m\leqslant d)$ such that $s_m-s_n=k$ or some term $s_i=k(1\leqslant i\leqslant d)$. S is said to have the property k. Let A be the set of integers k such that every game sum sequence has the property k and $A^c=\{1,2,\cdots,b\}-A$. In[3], J. P. Hutchinson and P. B. Trow proved that the least bound of A^c is $d+1$ for $b\leqslant\frac{3d}{2}$. This note consider the least bound for $\frac{3d}{2}<b\leqslant\frac{7d}{4}$.