1981年　数学研究与评论　第2期

环结构中的若干新成果(一)*

谢邦杰

(吉林大学)

代数结构的理论发展起来后，Artin, E. 在环中引进极小条件，建立了具极小条件的半单纯环与单纯环的结构理论，被誉为是抽象代数中仅次于Galois理论的工作。对称地，Goldie[1—3]与Lesieur and Croisot [4—5] 等又建立了具极大条件的半质环的结构理论，其结果也是很漂亮的。

对一般的环，Baer[6]定义了下根（即所谓Baer根），McCoy[7]与Levitzki[8]得到Baer半单纯环的结构定理；Levitzki[9]定义了半幂零根（即Levitzki根），Babic[10]得到Levitzki半单纯环的结构定理；Jacobson [11—14] 定义了根并得到半单纯环以至具极小单边理想的本原环的结构理论，迄今仍为一般环结构的主要理论；Brown与McCoy[15—19]也得到所谓Brown—McCoy根与半单纯环的结构定理。这些都是一般环的根与半单纯环的重要结构定理。

下面将按照环的不同类型来进行陈述。

一、Noether 环

Faith (1964, [22]) 把Wedderburn—Artin定理推广到有1的右Noether单纯环。Robson (1967, [20]) 证明了：如果右Noether单纯环R的右商环的中心为无穷的，则R有1。特别地，示性数为0的右Noether单纯环恒有1。Gilmer (1967, [21]) 得到：如果R[x]为Noether环，则R有1。

Michler (1967, [23]) 证明了：在右Noether环中，每个幂零子环恒含于一个极大幂零子环，且所有极大幂零子环之交即最大幂零理想。M.Djabali (1967, [24]) 证明了：如果A为左Noether或Artin环，则A的每个诣零（乘法）半群均为幂零的且幂零指数有界；又若b是一个左正则元，则它模根后便成正则的。

Gilmer (1967, [25]) 提出问题：设D为整闭整环，其商域K有一个有限可离扩张L。如果D在L中的整闭包为Noether环，则D是否为Noether环？Eakin (1968, [26]) 对此得到：若L/K的判别式为D中单位，则D为Noether环。Gilmer (1970, [27]) 又证明了：如果有1的整环D的商域为K且F为D的一个质子环的商域，则D的每个含1的子

*1981年4月20日收到。

环为Noether的必要而且只要在示性数为0时有$[K:F]<\infty$；域K/F为代数的；或对K中超越元x，K/F[x]为有限的。

由于1维的Krull环为Dedekind环从而恒为Noether的，但高维的则未必。[30]中已有3维的例子，而Eakin与Heinzer（1970，[28]）又用该书中的技巧作出了2维的例子。Heinzer（1969，[29]）再证明了：如果R为Noether整环，K为其商域，D为一个Krull环且$R\subset D\subset K$，则D为Noether的。

Eisenbud（1970，[31]）用同调代数证明了一个左Noether环R的一个子环S仍为左Noether环的充分条件是R作为S-模是由有限个可中心化S的元素生成的。

在环R的右理想I的正规化子$N(I)=\{x\in R\mid xI\subset I\}$的基础上再定义

$$N^*(I)=\{x\in N(I)\mid xy\in I\Longleftrightarrow y\in I\},$$

并记I在R中之余集为$R\backslash I$。真右理想I叫做几乎极大的，如果（1）对a，$b\in R\backslash I$就有r_1，$r_2\in R$及$c\in N^*(I)$使$ar_1\equiv br_2\equiv c\ (mod I)$；（2）如果$a\in R\backslash I$，则或$a\in N(I)$或$ar\equiv ai(mod I)$对某$r\in R\backslash I$及$i\in I$。Koh（1970，[32]）证明了：如果R是有1的环，则R为右Artin环的充要条件是R的每个几乎极大右理想为极大的且R为右Noether的。

Latyšev[33]找到一个多项恒等式使得示性数为0的域上的有限生成代数满足它时便是左Noether的。L'vov（1969，[34]）证明了：示性数为0的域上的一类代数满足此多项恒等式的充要条件是此类中每个有限生成的代数是左Noether的。进一步还对此恒等式的系数给出一个充要条件使此类中每个有限生成的代数是右Noether的。

如果质环R的每个本性右理想恒含R的非零两边理想，则说R是右有界的。Lenagan（1971，[35]）证明了：一个右Noether右有界的质环R其两边分式理想形成群时必为遗传的，而且R也是左有界左Noether的。

如果环R对每个整数n恒满足$nR=R$，则说R是可分的。Hansen（1974，[36]）证明了可分的右Noether环必有右单元。此为Szász（1963，[37]）与Robson（1967，[20]）关于存在右单元的结果的推广。

设P为右Noether环R的一个质理想。在[38]的意义下，定义D_P为相伴于P的右理想的等方漏斗。Raynaud（1975，[39]）证明了$P\rightarrow D_P$是R的极小质理想到右理想的不含{0}的所有等方漏斗中的超漏斗的双射。这就回答了Walker等（1972，[40]）提出的一个问题。

Cozzens（1972，[41]）作出一个例子说明一个单纯主左理想整环未必是右Noether环。这确是一个稀罕的例，此例的存在使单纯Noether环的结构理论增加了复杂性。

在非交换环中，如何来陈述并证明类似于交换Noether环的主理想定理？这确是一个较难的问题。Jategaonkar（1975，[42]）应用其[43]中的理论来证明了：如果R是一个右与左Noether质多项恒等式环，P是R的一个质理想且在xR上为极小（x为R的一个非零中心元），则P是一个极小非零质理想（即有高1）。接着又在[44]中对非交换环证明了更一般的主理想定理。

Robson（1974，[45]）给出一个Noether环是一个Artin环与一个半质环的乘积的充要条件。设环R的质根为N而$C=\{c\in R\mid c+N$在R/N中为正则的$\}$。于是R有这样一

个分解必要而且只要对所有 $c\in C$ 有 $cN=Nc=N$。由此还可得出[46]与[47]中有关结果的简化证明。

设 A 是一个有 1 的右 Noether 环，B 为其含于中心的子环而 $1\in B$ 且 A 在 B 上为整的。Blair（1973，[48]）证明了：（1）A 可嵌入一个右 Artin 环，（2）对A的Jacobson根 J 有 $\cap J^n=0$，（3）A 的质理想满足降链条件，（4）A 是右 Artin 环必要而且只要其质理想均为极大理想。Cauchon（1974，[49]）又证明了一个左与右 Noether 的完全左有界环的 Jacobson 根的幂的交为零。Lenagan（1975，[50]）再证明了左与右 Noether 环的一个两边理想如果是左 Artin 的则必为右 Artin 的。

设 T 为半质右 Noether 环 R 与其商环之间的中间环。Schelter（1976，[51]）证明了：如果对所有 $t\in T$ 有R的理想 I 使 $tI+It\subset R$ 且 R/I 为右 Artin 环，则 T 为右 Noether 环。Dinh 与 Kertész（1976，[52]）又给出了一个左 Noether 环为左但非右 Artin 环的充要条件。Johns（1977，[53]）再证明了：（1）如果有 1 的右 Noether 环 R 的右理想恒为右零化子，则 R 为右 Artin 环。（2）如果环 R的右零化子合极大条件且主右理想恒为右零化子并对左理想 I，J 恒有 $r(I\cap J)=r(I)+r(J)$，则 R 为拟 Frobenius 的。其中 $r(X)$ 表 X 在 R中的右零化子。

如果环 R 不满足两边理想的 A.C.C. 但其真两边理想则恒满足此条件，则说 R 是极小非 Noether 的。例如把 $Z(p^\infty)$ 群定义成零乘环即是。在[54]中已知具有非平凡乘法的极小非 Noether 环存在。Watters(1977，[55]）证明了极小非 Noether PI-环必然具平凡的乘法。在这以前，Gilmer 与 O'Malley（1972，[56]）曾证明了：真子环恒为 Noether 的非 Noether 环均为 p- 拟循环群上的零乘环。

如果交换环 R 对每个极大理想 M 的局部化 R_M 恒为 Noether 环，则说 R 是一个局部的Noether 环。Arnold 与 Brewer（1971，[57]）对局部 Noether 环证明了下列诸命题是等价的：（1）R 为 Noether 环；（2）R中有限生成的理想 I 恒为有限个准质理想之交；（3）I 仅有有限个质因子；（4）I 仅有有限个极小质因子且 I 的诣零根为有限生成的。并指出在一般情形下，（2），（3），（4）未必是等价的。

设 R 为有 1 的交换环。如果 R 的每个理想均有基底而含 k 个元素，则说 R 具有限秩 k。Gilmer（1972，[58]）证明了：R 具有限秩的充要条件是 R 为 Noether 环且有 t 使 R_M 具有限秩 t，对 R 的每个极大理想 M。此外，他还在[59]中得到了有单位元素的交换环而非 Noether 环的存在定理。

设 R 为 Noether 整环，K 为其商域，K 的子环 T含 R。McAdam（1972，[60]）证明了：如果 R 的非零理想恒含 T 的理想的非零收缩，则 T 在 R 上为整的。

设B是Noether整环A的有限生成的扩张整环。Ratliff，（1973，[61]）证明了在 B 中只有有限个质理想能嵌入某些主理想的质因子中必要而且只要在A中亦然。再设B为Noether整环 A 的整扩张整环且 B 含质理想的一个极大链其长为 n。Houston 与 McAdam（1974，[62]）证明存在 A 的一个有限整扩张整环C亦含一极大链其长为 n。Ratliff（1976，[63]）进一步证明可这样取 C 使 B 中链与 C 中链均为 B[C]中一个长 n 的极大链的收缩。

设P是 Noether环R的一个质理想。于是 $P^{(n)}=P^nR_P\cap R$为 P的 n 次符号幂。Mochster

(1973,[64])给出了$P^{(n)}=P^n$(对所有n)及R_p的相伴等级环为整环的四项充要条件,并阐明了一些应用。

关于Noether整环的整闭包,Huckaba(1976,[65])把熟知结果"整闭包仍为Noether的"推广为:如果Noether环R的高≤2,则其整闭包的正则理想恒为有限生成的;Querré(1977,[66])则对"Noether整环的整闭包为Krull环(Mori-Nagata)"给出一个初等证明,既不用完满化也不用完全局部环的性质。

称交换环R为乘法环,如果理想A<B就有C使A=BC且恒有RA=A。Mott(1969,[67])证明了一个乘法环为Noether的必要而且只要它只有有限个极小质理想。且下列诸命题等价:(a) R为Noether乘法环;(b) R的每个理想均为质理想的积;(c) R为Noether环且每个有质根(即其诣零根为质理想)的理想必为一质理想的幂。最后还得出一环为有限个Dedekind环的直接和的充要条件。Johnson与Lediaev(1971,[68])又证明了:一个有1的Noether环R为Dedekind环的充要条件是对R的每个理想A及极大理想M恒有AM:M=A(即极大理想为可消去理想)。

设S是一个有限交换半群。如果S能嵌入整数模n的环的乘法半群,则说S是算术的。Walton(1971,[69])证明了一个Noether整环R是Dedekind环的充要条件是R关于一个理想的剩余环的所有有限乘法子半群均为算术的。

设R为有1的交换环,A,B均为其理想。Hays(1973,[70])定义B为A的一个缩减,如果B⊂A且有n使$BA^n=A^{n+1}$。当一个理想没有真的缩减时,就说它是基本的。然后证明了:一个Noether环的一个理想是基本的必要而且只要它是局部基本的;一个Noether环的一个正则理想为C-理想(即它不是任何较大理想的缩减,此系基本理想的对偶概念)必要而且只要它是局部的C-理想。如果环R的每个理想均为基本的,则说R具有基本理想性质。这样的环类已证实真小于Prüfer整环类。事实上,一个整环为Prüfer的必要而且只要其每个有限生成的理想恒为基本的。具基本性质的Noether环即为Dedekind环。Hays(1975,[71])又证明了:一个整环为1维Prüfer整环的充要条件为其理想恒为基本的。

设R为一个Dedekind环,α在R上为整的,于是α满足R上一个不可约整多项式$\phi(x)$,称为α的定义多项式。Uchida(1977,[72])证明了:$R[\alpha]$为Dedekind环必要而且只要$\phi(x)\notin M^2$对$R[x]$的任意极大理想M。

二、Artin 环

当一环之左(右)理想满足极小条件时即称之为左(右)Artin环。Szász(1961,[73—74])证明了:如果一个Ω-环(即其单边理想恒为主的)A为本原环且含非零极小右理想,则A为单纯Artin环;一个有1的正则环A为Ω-环必要而且只要A为半单纯Artin环。Murase(1962,[75])对有1及根N的Artin环R证明了:如果$\overline{R}=R/N$为其子环$\overline{S}$上的n阶全阵环,则R亦为其子环R_0上的n阶全阵环且可取矩阵基底$\{e_{ij}\}$使$\{\overline{e_{ij}}\}$为$\overline{R}$在$\overline{S}$上的矩阵基底而$\overline{R}_0=\overline{S}$。又若R又是子环$R_0^*$上的$n$阶全阵环并以$\{e_{ij}^*\}$为基底,

则有 $g\in R$ 使 $e^*_{ij}=g^{-1}e_{ij}g$，$R^*_0=g^{-1}R_0g$.

Nobusawa (1964, [76]) 从环R的两个左R-模A，B出发而考虑一对子群M，N满足

$$M\subset \mathrm{Hom}_R(A,B),\ N\subset \mathrm{Hom}_R(B,A);\ mnm'\in M,\ nmn'\in N$$

等一些基本要求，然后通过公理把它抽象化成考虑一对交换群M，N并定义具有极小条件的单纯与半单纯性，从而证明了与Wedderburn定理类似的结果：一个"单纯对"M，N就分别是由一个体上的 $m\times n$ 以及 $n\times m$ 的矩阵组成，其乘法即矩阵的乘法；一个"半单纯对"则为一些"单纯对"的直和。

本文作者在[77]中把左（右）极小条件推广为左（右）半极小条件。例如当环Ω的任意真同态象恒满足左极小条件时就说Ω满足左半极小条件。满足左极小条件的环恒能满足左半极小条件，但反之则未必。该文得到了具有半极小条件的各种半单纯环（分别在Baer、Köthe、Jacobson意义下）的结构定理。

Eldridge与Fischer (1967, [79]) 把Gilmer (1963,[78]) 的环S所满足的一部分条件"交换与有限"推广为左或右极小条件而证明了S为有限的，且 $S=B\oplus M$，B 为交换环，M为2元域上的2阶上三角矩阵环。此后，他们在[80]中再证明了：具有一个循环拟正则群的Artin环为有限环。并通过某直和分解而得出这样的环共有十一类，其中只有一类是交换的。

Michler (1967, [23]) 又证明了：在不含 p^∞ 型加法子群的右Artin环中，所有极大幂零子环均为共轭的。Freĭdman (1974, [81]) 证明了：如果一个代数A的每个交换的子代数均为Artin的，则A为左与右Artin的。Naoum与Salloum (1974, [82]) 把Yohe (1968, [83]) 的结果改进为：如果有1的交换环R的的理想恒为有限子集在R中的零化子，则R为Artin环。此处的假设"有限集"正是原假设"一元集"的改进。

设R为有1的环。如果对 $x\in R$ 恒有 $n>m$ 使 $x^n=x^m$，则说R是周期的。Chacron (1968, [84]) 证明了：一环R是周期的Artin半单纯环必要而且只要R是有限个周期域的直和。

视环R为其子环A的左A-模时，如果R是有限生成的，则易知当A为左Artin环时R亦然。Björk (1971, [85]) 举例说明其逆不成立，并证明了：如果把A自然地作为Lie环来看而是幂零的，则有

（1）当R是左Artin环时，A就是左与右Artin的。

（2）当R是右Artin环时，R在A上就是右有限生成的且R与A均为两边Artin的。

如果环R的每个左理想都是R中一个非空子集（有限子集，n 元子集）的左零化子，则分别称之为LA(LFA，L(n)A)。同理对右边可定义RA(RFA，R(n)A)。Jaegermann与Krempa (1972, [86]) 证明了：（1）一个半质环R为半单纯Artin环必要而且只要它是LFA的，必要而且只要它是L(1)A与R(1)A的。（2）环R是L(1)A与R(1)A的必要而且只要R是有限个有1的完全准质左与右Artin主左与主右理想环上的全阵环的直接和。Kertész (1973, [87]) 对半单纯Artin环又给出一个新的刻划。在这以前，他曾在[88]

中得到：一个右 Noether 环R为右 Artin 环必要而且只要 R/P 为单纯 Artin 环（对每个质理想P）且R的每个剩余环R′的左零化子为有限的。

Tominaga（1969，[89]）对下列定理给出一个完全初等的证明：如果单纯 Artin 环 A 的中心为C。示性数非2，且$A'=\{x\in A|x\notin C,\ x^2\in C\}\cup\{0\}$，则A为一个四元数代数必要而且只要A′为非零的加法群。Kishimoto与 Motose（1970，[90]）又证明了：如果 $S, T_1,\cdots,T_n$ 均为单纯 Artin 环U的含1的单纯 Artin 子环，而 $S\subset(T_1\cup\cdots\cup T_n)$，且 $S\cap T_i$（对每个 i）均为单纯 Artin 环，则S必含于某一个 T_i 中。这是关于体的一个结果的推广，即[91]中的定理。

Herstein 与 Neumann（1975，[92]）证明了：设Z为半质环 R 的中心，而有 $a\in R$ 使 $a^n\in Z$。如果中心化子 $C(a)$ 为单纯 Artin 的，则R亦然。又若R的示性数为$p\neq 0$而$a^{p^n}\in Z$，则不设 R 为半质的也可。Cohen（1975,[93]）则把条件“单纯 Artin 的”推广为“半质 Goldie 的”。

有1且右理想恒为主的环叫做 *pri*-环，易右为左即称 *pli*-环。又若两边理想恒为主右（或左）理想时，则叫*ipri*-环（或*ipli*-环）。已知有1的右Artin *ipri*-环为 *pri*-环，且为准质 *pri*-环的一个直接和。McLean(1976,[94])则去掉有1的假设而证明了：一个右Artin *ipri*-环为 *pri*-环，但存在另外类型的直和分量。

设 J 为环R的 Jacobson 根，而 R/J 有右单元。Dink(1977，[95])证明了：如果R的含于 J 的理想满足极小条件，则有R 的左理想 L_1 与 L_2 使 $R=L_1\oplus L_2$，且 L_1 为有右单元的环，L_2 为幂零 Artin 环。

一个没有1的左 Artin 环A何时为左 Noether 的？早期已有的判别为（1）若A有一个左或右单位元（C.Hopkins）；（2）必要而且只要 A 的加群中没有 $C(p^\infty)$ 型的子群（Fuchs.L.）；（3）必要而且只要对A的 Jacobson 根N来说，A/N 为有限的（Tominaga, H.）。Murase（1978，[96]）又得出一个充要条件，且由此可导出前三者。此外还证明了：示性数为0的域上的一个代数为左 Artin 的就必有一个左单元，从而为左 Noether 的。

三、Jacobson 根与半单纯环方面

Thierrin（1967，[97]）对环A的 Jacobson 根R(A）作了几种刻划：A的一个右理想 I 叫做 Neumann 的，如果对所有 $a\in A$有一个 $b\in A$使$aba\equiv a(I)$。于是R(A）就是A的所有 Neumann 右理想之交；A 的一个非空子集 H 叫做一个右余-理想，如果有右理想 I 使 $H=I+a$。又若有 $x\in A$ 使 $HxH\subset H$，则说 H 为正则的。于是 $a\in R(A)$ 必要而且只要每个含 a 的正则右余-理想为右理想；称 $e\neq 0$ 为 global 等方的，如果有右理想 I 使得 $e\notin I$ 但 $e^2-e\in I$。于是 $a\in R(A)$ 必要而且只要由 $eA\subset aA$ 可推出 $e=0$。Szász（1971，[98]）又把 R(A）刻划为 A 中所有这样的 a 作成的集合。对每个 $y\in A$ 及 $x\in(a)_r$，主右理想 $(y)_r$ 与 $(y+yx)_r$ 相等。

一个 R-模 M 称为一个弱 von Neumann 模，如果对 $m\in M$ 及 $a\in R$ 有 $a_1\in(a)$ 使

$ma=maa_1$。相应地，R的一个右理想I为弱 von Neumann 的，如果对$a\in$R恒有$a_1\in(a)$使$a-aa_1\in$I。Andrunakievič（1974，[99]）由此来刻划环R的 Jacobson 根为

$$J(R)=\cap I=\cap(I:R)$$

其中I取遍R的所有弱 von Neumann 右理想，而（I：R）$=\{x\in R|Rx\subset I\}$。J(R) 恰由所有零化每个弱 von Neumann R-模的元素组成。此外也得出了上述的一些刻划。

环R的所有极大右[左]理想之交$\Gamma_R[{}_R\Gamma]$为R的理想，而当R有1时又均与R的 Jacobson 根J(R) 重合。Hansen（1973，[100]）用其[101]中的论证得到：如果R的理想I合于RI=I，则${}_R\Gamma(\Gamma_R\cap I)\cap I=J(I)$。特别地，如果$R^2=R$，则${}_R\Gamma(\Gamma_R)=\Gamma_R({}_R\Gamma)=J(R)$。又若R是右Artin 的，则${}_R\Gamma(\Gamma_R)$ 与$\Gamma_R({}_R\Gamma)$ 均与R的极大理想之交重合。

Herstein 与 Small（1973，[102]）对环R的 Jacobson 根J定义$J_0=J$，$J_k=\cap\{J_{k-1}^n: n\in\mathbf{Z}^+\}$对所有的正整数$k$。于是证明了：如果R对两边理想适合极大条件且满足一个$2k$次的标准多项恒等式，则J_k为幂零的。Jategaonkar（1974，[43]）又证明了当R为Noether P. I. 环时就有$J_1=\{0\}$。对右 Artin 环R的 Jacobson 根J(R)，Widiger（1974，[103]）证明了：如果R的理想I自已是右 Artin 环且$I\cap J(R)=0$，则I为R的一个直和分量。又若I为左与右Artin 环且含J(R)，则有理想$I^*\supset I$而I^*/I有限且有

$$R=I^*\oplus\sum_{k=1}^{t}S_{n_k}^{(k)}.$$

其中$S^{(k)}$均为体。

设G为环R的自同构的一个n元群，R^G为其定环。Montgomery（1976，[104]）证明了：如果$nR=R$且$nx=o$导出$x=0$，则R与R^G的 Jacobsno 根J(R) 与$J(R^G)$有关系$J(R^G)=R^G\cap J(R)$。

Cohn（1971，[105]）继其与 Sasiada（1967，[106]）提供的单纯 Jacobson 根环的例子而处理三个与根环有关的问题。设a，b为根环R的元素。如果有$s\in$R使$a-sa=b-bs$，则说a，a拟共轭。于是证明了：一个体的任意根子环可嵌入一个根环（仍含于一体内）其中任二非零元为拟共轭的，由此可得下问题的部分回答。即每个不含非零诣零元素的根环是否能嵌入一个根环其中任二非零元为拟共轭的？也提供了这样根环的例子，其中任二非零元为拟共轭的（即问题2）。

在环R中看$a\circ b=a+b-ab$。已知（R，∘）为半群，且R为 Jacobson 根环必要而且只要（R，∘）为群。Clark（1968，[107]）定义R为广义 Jacobson 根环，当（R，∘）为诸群的一并集时。并证明了：强正则环为广义 Jacobson 根环；含有主等方元（即模根而成单位元素的等方元）的环R为广义Jacobson根环必要而且只要它在其 Jacobson 根上是由一个强正则子环eRe（e为等方元）的一个分裂扩张。

环R的元a叫正则的，如有$b\in$R使$aba=a$。如果R的元素或为正则的或为拟正则的，则称之为NJ-环（即 von Neumann-Jacobson 环）。Nicholson（1973，[108]）证明了：R为NJ-环必要而且只要其 Jacobson 根以外的元素全为正则的；必要而且只要R为 von Neumann 正则的或R具有形式

$$\left\{\begin{pmatrix} d_1 & x \\ y & d_2 \end{pmatrix}\right\},\quad d_i\in D_i, x\in V_1, y\in V_2$$

其中 D_i 为体，V_1 是一个 D_1D_2-双模，V_2 是一个 D_2D_1-双模，且 $xy=yx=0$。

如果一环的同态象的质根与Jacobson根恒重合，则称之为Jacobson环。Watters（1975，[109]）得到：当R为Jacobson环时，R[x]亦然。Pearson与Stephenson（1977，[110]）则作出一个交换的Jacobson环R及其一个自同构σ使斜多项式环R[x, σ]不是Jacobson环。

设环R之Jacobson根为J(R)且R对两边理想具降链条件。于是有最小正整数 n 使 $R^n=R^m$（对 $m\geqslant n$），即以K(R)表此R^n。自然就有等式 $(K(R))^2=K(R)$，而且R/K(R)为幂零的。Pearson（1972，[111]）在Kruse与Price(1970，[112]）定义的同族概念下证明了：如果环R与S均对两边理想具降链条件且为同族的，则 $K(R)\simeq K(S)$ 且R/K(R)与S/K(S)同族。又当R与S均为交换环时，其逆亦真。由此又得：如果R与S均为交换Artin环且同族，则 $R/J(R)\simeq S/J(S)$，且J(R)与J(S)同族。但有例说明其逆不真。

设G为任意群，K为任意域其示性数为 p 其质域为 Z_p。Chalabi(1974，[113]）证明了：若群代数 Z_pG 为Jacobson半单纯的，则KG亦然。

设D是一个Jacobson半单纯整环但非域，A为D的一个非零理想而且是由m个元素生成的。Bresinsky与Fuller(1977，[114]）证明对每个整数 $n\geqslant m$ 恒存在A的一个不可缩减的生成集它恰含 n 个元素。

Sasiada（1961，[115]）以简报形式发表存在单纯拟正则环(即单纯Jacobson根环)，并与Cohn于1967年在[106]中发表详细证明。Szász(1963，[116]）在Sasiada的断言的基础上证明了：单纯半幂零环必为质元数的零乘环。并提出问题：是否存在单纯（非幂零的)诣零环？针对此问题，McWorter(1966，[117]）证明了：

（1）如果存在一个单纯环R，它或含一个非幂零的诣零单边理想，或含一个非幂零的诣零子环而具形 $xRy(x,\ y\in R)$，则存在一个非幂零的詣零单纯环。

（2）如果存在非幂零的诣零单纯环，则必存在这样的一个，它是两个真右理想之和。

不过单纯诣零环的存在问题，至今仍未解决。Rjabuhin(1968，[118]）证明了：单纯拟正则环的可数子环恒含于某个可数单纯拟正则子环。特别地，由此可知，如果存在单纯诣零环，则必存在一个可数的这样的环。Rjabuhin(1969，[119]）又证明了：如果存在一个质域上的单纯诣零代数，则必存在一个可数单纯诣零代数。

对拟正则环R，以R°表在运算 $a\circ b=a+b+ab$ 下作成的群。Watters(1968，[120]）证明了：当R°为有限生成的幂零群时，R便是幂零的环。Kruse(1969，[121]）又证明了：如果R是有限生成的，则R为幂零的必要而且只要R°亦然。

关于一个环的元素 x 的右拟逆，Younis(1970，[122]）证明了若 x 有两个不同的右拟逆时它就有无穷多个右拟逆。由此立即可得熟知结果：在有1的环中，如果一个元素有两个不同的右逆时它就有无穷多个右逆。

已知一环的有限个模极大右理想之交仍为一个模右理想。A.Kertész问此对任意模右理想之交是否亦然？Szász(1969，[123]）否定地回答了此问题。Hansen(1972，[101])再

指出任何这样的反例环至少必含16个元素。Szász[124—125]亦均涉及此问题，并在[125]中回答了 Rédei 的一个问题，即作出一个环，对其一个右理想有一个左放大元素（环R的一个元素 c 说是对 R 的真子集 S 为左放大的，如果 $cS=R$）。

如果环R的两个模右理想之交恒为模的，则称R为 Kertész 环。对 $a\in R$，定义

$$Q_a=\{a+x-ax\mid x\in R\}.$$

F.Szász 曾给出一个环R为 Kertész 环的两项充分条件：（1）R有左单元，或（2）$Q_a\cap Q_b$ 恒非空，对所有 a，$b\in R$。Chandran(1973，[126])作例说明此二条件均非必须。以$[Q_a]$表 Q_a 在 R中生成的加法子群。于是R为 Kertész 环的必要但非充分条件为：$[Q_a]\cap[Q_b]\neq O$，对所有 a，$b\in R$。

Steinfeld 与 Szász 曾证明了：一个环R的一个理想 I 为本原的必要而且只要有一个拟模极大右理想L使 $I=R^{-1}L$（可请参看[127]）。Hansen(1972，[101])把此推广为：环R的理想 I 为本原的必要而且只要有 R 的极大右理想 N 使 $R^2\not\subset N$ 且 $I=R^{-1}N$。由此易证 R 的 Jacobson 根为 $R^{-1}D$，此处D为R的所有极大右理想之交。Kertész 又曾问是否存在一个非模的拟模极大右理想？Szász(1967,[124]) 指出存在这样的右理想并称之为特别的右理想。并提出一些问题，如是否存在这样的环它含特别右理想L及 $a_1,\cdots,a_n$ 使得对每个$x\notin L$ 就有一个 a_i 使 $a_ix\notin L$？Hansen (1972，[101]) 否定地回答了此问题，也还讨论了 Szász 的另一些问题。

Százs(1967，[128])定义环R的理想 P为拟(右)本原的，如果有右理想K使 $P=(K:R)\subset K$。Steinfeld(1968，[129]) 证明了拟(右)本原理想即(右)本原理想。

Posner(1961，[130])证明了环R 为(右)本原的必要而且只要全阵环 R_n 亦然。Gupta (1968，[131])对此给出另一证明。说环A根于其子环B上，如果对 $a\in A$ 恒有 $n=n(a)$ 使 $a^n\in B$。Faith(1961，[132])证明了当A为本原环时B亦然。Chacron 等(1975，[133]) 又证明了：当A根于B上而共有 1 且A之示性数为 0 时，若A为质的，则B亦然。

Thierrin(1970，[134])把 Menard(1969，[135])的一个定理推广为：(右)本原环 R 的右理想A为极小的必要而且只要对每个 $x\in A$ 有 $xA=x^2A$。

Formanek 与 Snider((1972，[136])证明了：（1）设G是一个可数局部有限群，F 是一个域，其示性为 0 或为 p 而 G不含周期为 p 的元素。于是群环 F[G] 为本原的必要而且只要G不含有限的正规子群。（2）对任意群 G 及域 F，必存在一个群 $H\supset G$ 使 F[H] 为本原环。

一个质的 von Neumann 正则环是否为本原环？这是 Kaplansky(1971，[137]) 的问题 4 . Koh(1974，[138]) 证明了：一个 von Neumann 正则环中存在一个极大右零化子必要而且只要存在一个极小右理想。于是一个质的 von Neumann 正则环是具非零熟果的本原环必要而且只要它有一个极大右零化子.

设 Ω为一质环，e 为Ω的一个非零等方元，R为Ω的一个右理想，$l(R)$ 为R的左零化子。Lanski(1979，[139]) 证明了：Ω为本原环必要而且只要 $e\Omega e$ 亦然；必要而且只要 $R/R\cap l(R)$ 亦然。

参 考 文 献

[1] Goldie, A. W., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 44 (1958), 584.
[2] Goldie, A. W. Proc. London Math. Soc. 8 (1958), no. 3, 589.
[3] Goldie, A. W. ibid. 10 (1960), no. 38, 201.
[4] Lesieur, L. and Croisot, R., C. R. Acad. Sci. Paris 248 (1959), 2545.
[5] Lesieur, L. Ann. Sci. Ecole Norm. Super. (3), 76 (1959), 161.
[6] Baer, R., Amer. J. Math. 65 (1943) , 537.
[7] McCoy, N. H., ibid. 71 (1949), 823.
[8] Levitzki, J., ibid. 73 (1951), 25.
[9] Levitzki, J., Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), 462.
[10] Babic, A. M., Dokl. Akad. Nauk SSSR, 126 (1959), no. 2, 242.
[11] Jacobson, N., Amer. J. Matn. 67 (1945), 300.
[12] Jacobson, N., Trans. A. M. S. 57 (1945), 228.
[13] Jacobson, N., Ann. Math. (2), 48 (1947), 8.
[14] Jacobson, N., Structure of rings, 1956.
[15] Brown, B. and McCoy, N. H., Amer. J. Math. 69 (1947), 46.
[16] Brown, B., Duke 15 (1948), 495.
[17] Brown, B., Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 165.
[18] Brown, B., Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 302.
[19] Brown, B., Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 114.
[20] Robson, J. C., J. Algebra 7 (1967), 140.
[21] Gilmer, R. W., Jr., Amer. Math. Monthly 74 (1967), 700.
[22] Faith, C., Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 730.
[23] Michler, G., Glasgow Math. J. 8 (1967), 89.
[24] Djabali, M., C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A-B 264 (1967), A493.
[25] Gilmer, R. W., Jr., Duke Math. J. 34 (1967), 561.
[26] Eakin, P. M., Jr., Math. Ann. 177 (1968), 278.
[27] Gilmer, R., Comment. Math. Helv. 45 (1970), 129.
[28] Eakin, P.; Heinzer, W., J. Algebra 14 (1970), 333.
[29] Heinzer, W., Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1969), 217.
[30] Nagata, M., Local rings, 1962.
[31] Eisenbud, D., Math. Ann. 185 (1970), 247.
[32] Koh, K., Proc. Amer, Math. Soc. 25 (1970), 266.
[33] Latyšev, V. N., Sidirk. Mat. ž. 7 (1966), 1422.
[34] L'vov, I. V., Algebra i Logika 8(1969), 449.
[35] Lenagan, T. H., Bull. London Math. Soc. 3 (1971), 67.
[36] Hansen, F., Arch. Math. (Basel) 25 (1974), 589.
[37] Szász, F., Bull. Acad. Polon. Sci. 11 (1963), 351.
[38] Gabriel, P., Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323.
[39] Raynaud, J., Arch. Math. (Basel) 26 (1975), 20.
[40] Walker, E. A.; Walker, C., Rocky Mountain J. Math. 2 (1972), no.4, 513.
[41] Cozzens, J. H., J. Algebra 23 (1972), 66.
[42] Jategaonkar, A. V., J. Alegbra 35 (1975), 17.
[43] Jategaonkar, A. V., ibid. 30 (1974), 103.
[44] Jategaonkar, A. V., Comm. Algebra 2 (1974), 429.
[45] Robson, J C., ibid. 1 (1974), 345.
[46] Goldie, A. W., Arch. Math. 13 (1962), 213.
[47] Chatters, A. W., Bull. London Math. Soc. 4 (1972), 125.
[48] Blair. W. D., J. Algebra 27 (1973), 187.

[49] Cauchon, G., C, R. Acad. Sci. Paris Sér. A 279 (1974), 91.
[50] Lenagan, T. H., Proc. Amer. Math. Soc. 51 (1975), 499.
[51] Schelter, W., J. London Math. Soc. (2) 13 (1976), no.2, 263.
[52] Dinh, V. H.; Kertész, A., Publ. Math. Debrecen 23 (1976), no. 3-4; 335.
[53] Johns, B., J. Algebra 49 (1977), no. 1, 222.
[54] Hausen, J.; Johnson, J. A., Math. Scand. 36 (1975), no. 2, 313.
[55] Watters, J. F., ibid. 40 (1977), no. 2, 176.
[56] Gilmer, R.; O'Malley, M., ibid. 31 (1972), 118.
[57] Arnold, J. T.; Brewer, J. W., J. Math. Kyoto Univ. 11 (1971), 45.
[58] Gilmer, R., Duke Math. J. 39 (1972), 381.
[59] Gilmer, R., Amer. Math. Monthly 77 (1970), 621.
[60] McAdam, S., J. London Math. Soc. (2) 5 (1972), 85.
[61] Ratliff, L. J., Jr., Pacific J. Math. 49 (1973), 199.
[62] Hauston, E. G.; McAdam, S., Indiana Univ. Math. J. 24 (1974/75), 741.
[63] Ratliff, L. J., Jr., J. Algedra 39 (1976), no. 1, 75.
[64] Hochster, M., Math. Z. 133 (1973), 53.
[65] Huckaba, J. A., Trans. Amer. Math. Soc. 220 (1976), 159.
[66] Querré, J., C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 285 (1977), no. 5, A323.
[67] Mott, J. L., J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math. 33 (1969), 73.
[68] Johnson, E. W.; Lediaev, J. P.; Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971), 63.
[69] Walton, R. A., J. London Math. Soc. (2) 3 (1971), 539.
[70] Hays, J. H., Trans. Amer. Math. Soc. 177 (1973), 51.
[71] Hays, J. H., Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 81.
[72] Uchida, K., Osaka J. Math. 14 (1977), no. 1, 155.
[73] Szász, F., Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 12 (1961), 417.
[74] Szász, F., Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser A64 = Indag, Math. 23 (1961), 577.
[75] Murase, I., Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo 12 (1962), 161.
[76] Nobusawa, N., Osaka J. Math. 1 (1964), 81.
[77] 谢邦杰：中国科学，3 (1965), 343.
[78] Gilmer, R. W., Amer. J. Math. 85 (1963), 447.
[79] Eldridge, K. E.; Fischer, I., Duke Math. J. 34 (1967), 243.
[80] Fischer, I.; Eldridge, K. E., ibid. 36 (1969), 43.
[81] Freĭdman, P. A., Sverdlovsk. Gos. Ped. Inst. Naučn. Trudy Sb. 219 Algebra i Mat. Anal., 1974, 81.
[82] Naoum, A. G.; Salloum, R. M., J. Math and Sci. 1 (1974), 171.
[83] Yohe, C. R., Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), 1346.
[84] Chacron, M., Bull. Soc. Math. Belg. 20 (1968), 66.
[85] Björk, Jan-Erik, J. Reine Angew. Math. 247 (1971), 123.
[86] Jaegermann, M.; Krempa, J., Fund. Math. 76 (1972), no. 2, 95.
[87] Kertész, A., Acta Sci. Math. (Szeged) 34 (1973), 169.
[88] Kertész, A., ibid. 31 (1970), 219.
[89] Tominaga, H., Math. J. Okayama Univ. 14 (1969/70), 35.
[90] Kishimoto; K.; Motose, K., J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 5 (1970), 107.
[91] Venkatachaliengar, K.; Soundararajan, T., Nederl. Akod. wetensch. Proc. Ser A72 = Indag. Math. 31 (1969), 441.
[92] Herstein, I. N.; Neumann, L., Ann. Mat. Pura Appl. (4) 102 (1975), 37.
[93] Cohen, M., Israel J. Math. 20 (1975), 37.
[94] McLean, K. R., J. London Math. Soc. (2) 12 (1975/76), no. 1, 53.
[95] Dink V. H., Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 20 (1977), 43.
[96] Murase, I., Canad. J Math. 30 (1978), no. 4, 830.
[97] Thierrin, G., Canad. Math. Bull. 10 (1967), 643.
[98] Szàsz, F., Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 22 (1971/72), 85.

[99] Andrunakievič, A. V., Mat. Issled. 9(1974), vyp. 2(32), 3.
[100] Hansen, F., Math. Nachr. 57 (1973), 259.
[101] Hansen, F., Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 23(1972), 299.
[102] Herstein, I. N.; Small, L. W., Israel J. Math. 16 (1973), 176.
[103] Widiger, A., Publ. Math. Debrecen 21 (1974), 193.
[104] Montgomery, S., Comm. Algebra 4 (1976), no. 5, 459.
[105] Cohn, P. M., Bull. London Math. Soc. 3 (1971), 185, 更正于 4, 54.
[106] Sasiada, E.; Cohn, P. M., J. Algebra 5 (1967), 373.
[107] Clark, W. E., Canad. J. Math. 20 (1968), 88.
[108] Nicholson, W. K., Aequationes Math. 9 (1973), 64.
[109] Watters, J. F., J. Algebra 36(1975)no.2, 302.
[110] Pearson, K. R.; Stephenson, W., Comm. Algebra 5(1977), no.8, 783.
[111] Pearson, K. R., Compositio Math. 24(1972), 273.
[112] Kruse, R.L.; Price, D. T., Math. Z. 113(1970), 215.
[113] Chalabi, A., Tamkang J. Math. 5(1974), no.1, 103.
[114] Bresinsky, H.; Fuller, M. J., Houston J. Math. 3(1977) no.4, 453.
[115] Sasiada, E., Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 9(1961), 257.
[116] Szàsz, F., Monatsh. Math. 67(1963), 359.
[117] McWorter, W. A., Canad. Math. Bull. 9(1966), 197.
[118] Rjabuhin, Ju. M., Mat Zametki 4(1968), 399.
[119] Rjobuhin, Ju. M., Sibirsk. Mat. ž. 10(1969), 950.
[120] Watters, J. F., J. London Math. Soc. 43(1968), 725.
[121] Kruse, R. L., ibid. (2) 1(1969), 743.
[122] Younis, A. H., Bull. College Sci. (Baghdad) 11 (1970), 51.
[123] Szàsz, F., Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 20(1969); 211.
[124] Szàsz, F., idid. 18(1967), 261.
[125] Szàsz, F., Math. Japon. 18(1973), 221.
[126] Chandran, V. R., Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 24(1973), 85.
[127] Szàsz, F., Proc Amer. Math. Soc. 18(1967), 910.
[128] Szàsz, F., Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys 15(1967), 53.
[129] Steinfeld, O., Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 19(1968), 219.
[130] Posner, E. C., Arch. Math. 12 (1961), 97.
[131] Gupta, R. N., Amer. Math. Monthly 75(1968), 636.
[132] Faith, C. C., Proc. Amer. Math. Soc. 12(1961), 274.
[133] Chacron, M.; Lawrence, J.; Madisou, D., Canad. Math. Bull. 18(1975), no.3, 423.
[134] Thierrin, G., Canad. Math. Bull. 13(1970); 385.
[135] Menard, J., ibid. 12(1969), 389.
[136] Formanek, E.; Snider, R. L., Proc. Amer. Math. Soc. 36(1972), 357.
[137] Kaplansky, I., Canad. Math Bull. 14(1971), 594.
[138] Koh, K., ibid. 17(1974), 283.
[139] Lanski. C., J. Algebra 59(1979), 395.