

## 评华罗庚与王元合著的 《数论在近似分析中的应用》\*

邵品琮

(曲阜师范学院)

华罗庚教授与王元教授合著的《数论在近似分析中的应用》一书，作为纯粹数学与应用数学专著，已于1978年底由科学出版社出版。这本书（为简便起见，以下简称《数论应用》）是近二十年来用数论方法对于多维积分近似计算研究成果的一个系统全面的总结。

众所周知，1859年 Riemann 引进复变数函数的  $\zeta$  函数，1896年 Hadamard 用解析方法证实了素数定理，1921年 Hardy-Littlewood 创建“圆法”，以及特别是1937年 N.M. Vinogradov 创造了“三角和方法”解决了大奇数 Goldbach 问题以来，分析方法渗透到了数论领域，解决了许多著名难题，出现了蓬勃发展的解析数论分支。本世纪五十年代末，开始了用相当成熟的数论方法回过头来解决分析中近似计算问题的的工作。掀起了数论方法渗透到分析领域的研究热潮。世界各国的许多数论专家作出了不少研究成果。

本书两位作者从六十年代利用实分圆域的独立单位组来构造高维空间一致分布点集贯的思想，成功地解决了高维积分最佳逼近问题。此后数论方法用于近似分析的发展很快。象当初富氏分析这一分支从分析中成长分出、或如同微分几何分支从几何学中分出、或类似于李代数分支从代数中分出一样，这一个既与纯粹数学的数论方法有关、又与现代分析的近似计算这一重要课题有关的新兴分支，必将更加迅速地发展起来。

《数论应用》是引导青年数学工作者研究数论应用于分析的一本专著。阅读该书自然要有较好的分析基础，以及数论基础（例如阅读过华罗庚著《数论导引》有关章节），除此以外，当遇到一些较深的数论定理时，书末均提供了有关参考资料的出处。该书写法系统全面，并且汇集了到八十年代为止时的有关研究资料，是研究这一主题的一本指导性专著。

本书的写作过程可分为两个阶段。第一阶段是六十年代初期，为奠基阶段。作为代表性的奠基论文有如上述基于二次分圆域的高次实分圆域的独立单位组来构造高维一致分布点集贯的著名工作（就是“华—王方法”）。相应地，为吸引广大青年数学工作者来了解这一课题，为参加这一工作创造条件，该书作者于1961年出版了第一版的《积分的近似计算》一书。接着，于1963年第二版出了修订本为《数值积分及其应用》一书。“一版”与

\*1980年11月15日收到。

“二版”两书均有一定数量的入门基础性知识。尤其“一版”还有相当篇幅的普及部份，“二版”中对新方法、新结果有所增添。第二阶段就是七十年代末期的发展与总结阶段。在这期间，他们发表了许多重要论文，例如1974年提出了 $PV$ 数的极小多项式构造的递推公式用来定义高维空间一致分布点集贯的方法，在理论上与实用上均得到了很成功的结果。于是条件成熟，作了系统总结，出版了专著《数论应用》一书。

《数论应用》全书有十章一个附录，其重点明确，就是，多元函数的数值积分如何用数论方法作近似计算的问题。其中第五、七、八这三章是本书主要内容。前四章是之后各章的准备，其中有的工作不少就是两位作者的研究成果，它本身的叙述也是颇有意义的。第五章是第六章的前奏，第八章和第九章则是对各种近似插值方法的误差作一评价比较，在计算实践上，例如该书提到一般方法在电子计算机上作同精度近似计算时需100秒钟者，改用数论方法只10秒钟即可算得等等。而且该书作者们从中还找出了最佳分析的结论（例如书中提到格点点集法的好处，其误差估计还与其维数无关，且下界已是不可改进的了）。第十章则是对数值积分的进一步发展及扩充，引向了若干数学物理方程，如二阶偏微分方程的初值问题及定界问题，以及对于几种特殊类型的多维积分方程，均给出了较好的近似解法的介绍。全书充分体现了：运用数论方法在分析中作近似计算或甚至求某些偏微分方程数值解，具有相当说服力的优越性。它必将对爱好应用数论的读者有很大的帮助。