1982年 第2卷 第4期
Vol.2, No.4, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

类2的常数联络黎曼空间*

欧阳崇珍 王仲才

（江西大学数学系）

§1. 常数联络黎曼空间和它的类数

如所知，在笛卡儿直交坐标系下，平坦黎曼空间的第二类Christoffel记号（即联络系数，以下简称克氏记号）全部是零[1]．以下我们考虑非平坦的黎曼空间 V_n．B.Вагнер[2]曾经考虑，在适当坐标系下第二类克氏记号都是常数的黎曼空间 V_n，称为带有常数克氏记号的黎曼空间，简称为常数联络黎曼空间．他的研究仅限于 V_n 的基本度量形式

$$\varphi=g_{ij}dx^idx^j\quad(i,j=1,2,\cdots,n)\dagger \tag{1.1}$$

为正定的情况．1962年罗马尼亚数学家G.Vranceanu[3]讨论了（1.1)不一定正定的情况，将 V_n 分类，即如果空间 V_n 在坐标系 $\{x^i\}$ 下第二类克氏记号 Γ^i_{jk} 是常数，且基本张量的分量可写成

$$g_{ij}=c^{\alpha}{}_{ij}t_{\alpha},\quad(\alpha=1,2,\cdots,p), \tag{1.2}$$

其中 c^{α}_{ij} 是常数，t_α 是 x^i 的函数，$(\alpha=1,2,\cdots,p)$，又如果 p 是最小数，则称 p 为 V_n 的类数．Vranceanu指出，类数 $p\leqslant\frac{n(n-1)}{2}-1$，类1的常数联络黎曼空间 V_n 具有Вагнер的共形平坦度量，即

$$\varphi=e^{a_kx^k}c_{ij}dx^idx^j \tag{1.3}$$

其中 a_k，c_{ij} 是常数．然后他给出了类2的常数联络的 V_3，(本文后面将指明这是不正确的)，进而构造一个类2的常数联络黎曼空间 $V_n(n\geqslant3)$，其基本形式为

$$\varphi=e^{2ax^1}(dx^1)^2+e^{ax^1}[2dx^1dx^2+\sum_{\alpha}^{3,\cdots,n}\varepsilon_\alpha(dx^\alpha)^2], \tag{1.4}$$

其中 $\varepsilon_\alpha=\pm1$，a 是非零常数．接着V. G. Vorciu[4]用另外方法导得这种 V_3 的度量．

本文完全决定类2常数联络黎曼空间 V_n 的基本形式，并指出经过适当非线性变换(保

* 1981年5月19日收到．

† 今后如不特别声明，拉丁字母指标 i, j, k, …均取值 1, 2, …, n.

持Γ^i_{jk}仍为常数)，Vranceanu的度量（1.4）可以化成类1的Вагнер的度量（1.3）的特殊情况，从而确定全部类2常数联络黎曼空间V_n是：除（1.4）以外的三种度量形式给定的空间，和不存在三维的类2常数联络黎曼空间，因此改正了G.Vranceanu和V.G.Vorciu的错误。最后我们指出，给出的类2常数联络黎曼空间V_n都不是共形平坦的，并确定是爱因斯坦空间的那些类型。

§2. 类2常数联络黎曼空间的决定

设V_n是一个类2的常数联络黎曼空间，在坐标系$\{x^i\}$下，有度量形式（1.1）和常数克氏记号Γ^i_{jk}，且

$$g_{ij}=tc_{ij}+sd_{ij}, \tag{2.1}$$

其中c_{ij}，d_{ij}是关于i,j对称的两组常数，t，s是坐标x^i的函数，而且$t\neq0$，s/t不是常数（否则为类1的）。不妨假设$|c_{ij}|\neq0$，（因为调整t，s，可取$c_{ij}=g_{ij}(P)$，P是一定点）。显然，在坐标x^i的线性变换下，形式（2.1）保持不变，Γ^i_{jk}保持为常数。

经过线性变换，可把c_{ij}，d_{ij}按照$|d_{ij}-\lambda c_{ij}|$的初等因子$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},\cdots,(\lambda-\lambda_r)^{p_r}$，$(p_1+\cdots+p_r=n)$，同时化成（见[5]，374页）

$$(c_{ij})=\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} & & e_1\\ & \iddots & \\ e_1 & & \end{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}p_1\text{行} & & 0 \\ \hline & \ddots & \\ \hline 0 \quad p_r\text{行}\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right. & & \begin{matrix} & & e_r\\ & \iddots & \\ e_r & & \end{matrix}\end{array}\right),\quad (d_{ij})=\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} & & d_1 & e_1\lambda_1\\ & \iddots & \iddots & \\ d_1 & \iddots & & \\ e_1\lambda_1 & & & \end{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}p_1\text{行} & & 0 \\ \hline & \ddots & \\ \hline 0 \quad p_r\text{行}\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right. & & \begin{matrix} & & d_r & e_r\lambda_r\\ & \iddots & \iddots & \\ d_r & \iddots & & \\ e_r\lambda_r & & & \end{matrix}\end{array}\right), \tag{2.2}$$

如果$p_\alpha=1,(\alpha=1,\cdots,r)$，则$(d_{ij})$的对角线上第$\alpha$块仅由一个元素$e_\alpha\lambda_\alpha$组成。(2.2)里的$d_\alpha$，$e_\alpha(\alpha=1,\cdots,r)$是非零常数，不妨设$e_\alpha=\pm1,(\alpha=1,\cdots,r)$。

在这个变换下，基本张量g_{ij}的矩阵化成

$$(g_{ij})=\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} & & d_1s & e_1T_1\\ & \iddots & \iddots & \\ d_1s & \iddots & & \\ e_1T_1 & & & \end{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}p_1\text{行} & & 0 \\ \hline & \ddots & \\ \hline 0 \quad p_r\text{行}\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right. & & \begin{matrix} & & d_rs & e_rT_r\\ & \iddots & \iddots & \\ d_rs & \iddots & & \\ e_rT_r & & & \end{matrix}\end{array}\right) \tag{2.3}$$

其中

$$T_a = t + \lambda_a s, \quad (a = 1, \cdots, r). \tag{2.4}$$

作为 V_n 有常数克氏记号 $\Gamma^i_{j\,k}$ 的充要条件的恒等式[3]

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{ih}\Gamma^h_{j\,k} + g_{jh}\Gamma^h_{i\,k}, \tag{2.5}$$

写成矩阵形式为

$$\left(\begin{array}{ccc|c|ccc}
 & d_1 s_k & e_1 T_{1k} & & & & \\
d_1 s_k & \ddots & \ddots & \left.\right\} p_1 \text{行} & & 0 & \\
e_1 T_{1k} & & & & & & \\
\hline
 & & & \ddots & & & \\
\hline
 & & & & & d_r s_k & e_r T_{rk} \\
 & 0 & & p_r \text{行} \left.\right\{ & d_r s_k & \ddots & \ddots \\
 & & & & e_r T_{rk} & &
\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c}
M_{11} & M_{12} & \cdots\cdots \\
\hline
M_{21} & M_{22} & \cdots\cdots \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots \\
 & & \cdots\cdots M_{rr}
\end{array}\right), \tag{2.6}$$

其中 $s_k = \dfrac{\partial s}{\partial x^k}$, $T_{ak} = \dfrac{\partial T_a}{\partial x^k}$，$M_{\alpha\beta}$ 是 $p_\alpha \times p_\beta$ 矩阵，$\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, r$,

$$M_{11} = \begin{pmatrix}
2(d_1 s\Gamma^{\sigma-1}_{1\,k} + e_1 T_1 \Gamma^{\sigma}_{1\,k}) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
d_1 s(\Gamma^{\sigma-1}_{2\,k} + \Gamma^{\sigma-2}_{1\,k}) + e_1 T_1(\Gamma^{\sigma}_{2\,k} + \Gamma^{\sigma-1}_{1\,k}) & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
d_1 s\Gamma^{\sigma-1}_{\sigma\,k} + e_1 T_1(\Gamma^{\sigma}_{\sigma\,k} + \Gamma^{1}_{1k}) \cdots\cdots\cdots & 2e_1 T_1 \Gamma^{1}_{\sigma\,k}
\end{pmatrix}, \qquad (\sigma = p_1),$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix}
s(d_1\Gamma^{\sigma-1}_{\sigma+1\,k} + d_2\Gamma^{\sigma+\tau-1}_{1\,k}) + e_1 T_1 \Gamma^{\sigma}_{\sigma+1\,k} + e_2 T_2 \Gamma^{\sigma+\tau}_{1\,k} \cdots & d_2 s\Gamma^{\sigma+\tau-1}_{\sigma\,k} + e_1 T_1 \Gamma^{1}_{\sigma+1\,k} + e_2 T_2 \Gamma^{\sigma+\tau}_{\sigma\,k} \\
s(d_1\Gamma^{\sigma-1}_{\sigma+2\,k} + d_2\Gamma^{\sigma+\tau-2}_{1\,k}) + e_1 T_1 \Gamma^{\sigma}_{\sigma+2\,k} + e_2 T_2 \Gamma^{\sigma+\tau-1}_{1\,k} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
d_1 s\Gamma^{\sigma-1}_{\sigma+\tau\,k} + e_1 T_1 \Gamma^{\sigma}_{\sigma+\tau\,k} + e_2 T_2 \Gamma^{\sigma+1}_{1\,k} \cdots\cdots\cdots & e_1 T_1 \Gamma^{1}_{\sigma+\tau\,k} + e_2 T_2 \Gamma^{\sigma+1}_{\sigma\,k}
\end{pmatrix}$$

$$(\sigma = p_1, \quad \tau = p_2),$$

等等。

从恒等式（2.6），我们可以得出下列引理（证明比较冗长，但并不困难，此处从略）。

引理 1　对于类 2 常数联络黎曼空间 V_n，基本张量写成（2.1）时，$|d_{ij} - \lambda c_{ij}|$ 的初等因子都是一次和二次的。

引理 2　同上条件下，如果 $\lambda - \lambda_1$ 和 $\lambda - \lambda_2$ 是对应 $|d_{ij} - \lambda c_{ij}|$ 的不同根（即 $\lambda_1 \neq \lambda_2$）的一次初等因子，则 T_1 与 x^2 无关，T_2 与 x^1 无关。如果 $|d_{ij} - \lambda c_{ij}|$ 的初等因子都是一次的，则有且仅有两个不同的特征根。

引理 3　同上条件下，如果 $|d_{ij} - \lambda c_{ij}|$ 有二次初等因子，则必有一次初等因子，且只有一个特征根。

现在，我们来确定类2常数联络空间V_n的基本形式．根据上述引理，按$|d_{ij}-\lambda c_{ij}|$的初等因子有下列情况：

（Ⅰ）初等因子都是一次的，且对应两不同实根；

（Ⅱ）初等因子都是一次的，且对应一对共轭虚根；

（Ⅲ）有m个二次因子和$n-2m$个一次因子（$n>2m\geqslant 4$），且对应同一实根；

（Ⅳ）有一个二次因子和$n-2$个一次因子，且对应同一实根．

对于（Ⅰ），由引理2与（2.3）知V_n是两个类1常数联络空间的乘积，基本形式为

$$\varphi=\exp(a_px^p)[\varepsilon_1(dx^1)^2+\cdots+\varepsilon_m(dx^m)^2]+\exp(a_qx^q)[\varepsilon_{m+1}(dx^{m+1})^2+\cdots+\varepsilon_n(dx^n)^2],$$

$$(p=1,\cdots,m;\qquad q=m+1,\cdots,n;\qquad 1\leqslant m<n),\tag{2.7}$$

其中$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm 1,a_1,\cdots,a_n$是不全为零的常数，$n\geqslant 4$；且$m=2$时，$n>4,a_3,\cdots,a_n$不全为零；$m=n-2$时，$a_1,\cdots,a_{n-2}$不全为零；否则$V_n$是平坦的．$\exp(x)=e^x$表示指数函数，以下都这样表示．

对于（Ⅱ），n必为偶数$2m$，有m个初等因子$\lambda-(\alpha+\sqrt{-1}\beta)$和$m$个初等因子$\lambda-(\alpha+\sqrt{-1}\beta)$，设

$$K_p^j=a_p^j+\sqrt{-1}b_p^j,\quad (p=1,\cdots,m)\tag{2.8}$$

是对应$\lambda-(\alpha+\sqrt{-1}\beta)$的$m$个规范特征向量，其中$a_p^j$和$b_p^j$是实向量．由于$c_{ij}k_p^ik_q^j=e_p\delta_{pq}$，$e_p=\pm 1$，$\delta_{pq}=\begin{cases}0 & p\neq q\\ 1 & p=q,\end{cases}$ $(p,q=1,\cdots,m)$，容易验证

$$K_{m+p}^j=b_p^j+\sqrt{-1}a_p^j,\quad (p=1,\cdots,m)\tag{2.9}$$

是对应$\lambda-(\alpha-\sqrt{-1}\beta)$的$m$个规范特征向量，且$e_{m+p}=d_{ij}k_{m+p}^ik_{m+p}^j=-e_p$．经过坐标的虚线性变换

$$x^i=k_j^ix'^j\tag{2.10}$$

得到

$$(c_{ij})=\begin{pmatrix}e_1&&\\&\ddots&\\&&e_n\end{pmatrix},\ (d_{ij})=\begin{pmatrix}e_1(\alpha+\sqrt{-1}\beta)&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&e_m(\alpha+\sqrt{-1}\beta)&&&\\&&&e_{m+1}(\alpha-\sqrt{-1}\beta)&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&e_n(\alpha-\sqrt{-1}\beta)\end{pmatrix}.\tag{2.11}$$

从（2.6），形式上确定

$$T_1=\cdots=T_m=\exp(2a_px'^p+c_1),T_{m+1}=\cdots=T_n=\exp(2a_{m+p}x'^{m+p}+c_2),(p=1,\cdots,m),\tag{2.12}$$

其中$a_i=A_i+\sqrt{-1}B_i$，$c_1=C_1+\sqrt{-1}D_1$，$c_2=C_2+\sqrt{-1}D_2$是复常数，从而（1.1）变换为

$$\varphi=T_1\sum_{p=1}^m e_p(dx'^p)^2+T_n\sum_{p=1}^m e_{m+p}(dx'^{m+p})^2.\tag{2.13}$$

显然，虚变换（2.10）可由实变换

$$x^i = a^i_p \bar{x}^p + b^i_p \bar{x}^{m+p} \quad (p=1,\cdots,m) \tag{2.14}$$

和虚变换

$$\bar{x}^p = x'^p + \sqrt{-1}\, x'^{m+p}, \quad \bar{x}^{m+p} = x'^{m+p} + \sqrt{-1}\, x'^p, \quad (p=1,\cdots,m) \tag{2.15}$$

合成，x^i，$\bar{x}^i$ 是实坐标，x'^i 是虚坐标．对（2.13）施行（2.15）的逆变换

$$x'^p = \frac{1}{2}(\bar{x}^p - \sqrt{-1}\,\bar{x}^{m+p}), \quad x'^{m+p} = \frac{1}{2}(\bar{x}^{m+p} - \sqrt{-1}\,\bar{x}^p), \quad (p=1,\cdots,m), \tag{2.16}$$

得到的应该同对（1.1）施行实变换（2.14）得到的一样，从而得到实形式

$$\varphi = \frac{1}{2}\exp(A_p\bar{x}^p + B_p\bar{x}^{m+p} + c_1)\{\cos(B_p\bar{x}^p - A_p\bar{x}^{m+p} + D_1)\sum_{p=1}^{m} e_p[(d\bar{x}^p)^2 - (d\bar{x}^{m+p})^2] +$$

$$+ 2\sin(B_p\bar{x}^p - A_p\bar{x}^{m+p} + D_1)\sum_{p=1}^{m} e_p d\bar{x}^p d\bar{x}^{m+p}\}, \tag{2.17}$$

适当平移后化成

$$\varphi = \exp(a_p x^p + b_p x^{m+p})\{\cos(b_p x^p - a_p x^{m+p})\sum_{p=1}^{m}\varepsilon_p[(dx^p)^2 - (dx^{m+p})^2] +$$

$$+ 2\sin(b_p x^p - a_p x^{m+p})\sum_{p=1}^{m}\varepsilon_p dx^p dx^{m+p}\}, \quad (p=1,\cdots,m;\ n=2m\geqslant 4), \tag{2.18}$$

其中 a_p，b_p 是 n 个不全为零的实常数，$\varepsilon_p=\pm 1$．

对于（Ⅲ），可设初等因子为 $(\lambda-\lambda_1)^2,\cdots,(\lambda-\lambda_m)^2,(\lambda-\lambda_{m+1}),\cdots,(\lambda-\lambda_{n-m}),(m\geqslant 2,$ $n>2m)$，且 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-m}$．从（2.6）经过计算可得

$$T_1 = \cdots = T_{n-m} = c, \quad s = 2c\frac{e_1}{d_1}(\Gamma^2_{1\ 2p-1}x^{2p-1} + \Gamma^2_{1\ 2m+q}x^{2m+q}), \begin{pmatrix} p=1,\cdots,m; \\ q=1,\cdots,n-2m \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

其中 c 是实常数．于是（1.1）写成

$$\varphi = (a_p x^{2p-1} + b_q x^{2m+q})\sum_{p=1}^{m}\varepsilon_p(dx^{2p-1})^2 + 2\sum_{p=1}^{m}dx^{2p-1}dx^{2p} + \sum_{q=1}^{n-2m}\varepsilon_{2m+q}(dx^{2m+q})^2,$$

$$(p=1,\cdots,m;\ q=1,\cdots,n-2m), \tag{2.20}$$

其中 a_p，b_q 是 $n-m$ 个实常数，$\varepsilon_p,\varepsilon_{2m+q}=\pm 1$．计算曲率张量可知当且仅当 $\sum_{q=1}^{n-2m}\varepsilon_{2m+q}b_q^2\neq 0$ 时，V_n 不是平坦的．

对于（Ⅳ），可设初等因子为 $(\lambda-\lambda_1)^2,(\lambda-\lambda_2),\cdots,(\lambda-\lambda_{n-1})$，且 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}$．从（2.6）经过计算可得到或者

$$T_1 = \exp(2\Gamma^1_{11}x^1), \quad s = \frac{2e_1}{d_1}(\Gamma^2_{11}x^1 + \Gamma^2_{12}x^2 + \Gamma^2_{13}x^3 + \cdots + \Gamma^2_{1n}x^n)\exp(2\Gamma^1_{11}x^1), \tag{2.21}$$

或者

$$T_1 = \exp(\Gamma^1_{11}x^1), \quad s = -\frac{2e_1\Gamma^2_{11}}{d_1\Gamma^1_{11}}\exp(\Gamma^1_{11}x^1) + C\exp(2\Gamma^1_{11}x^1), \tag{2.22}$$

其中C是常数．对应（2.21)，曲率张量为零，V_n是平坦的，这与假设不符．对应(2.22)，形式（1.1）写成

$$\varphi=[c\exp(2ax^1)-b\exp(ax^1)](dx^1)^2+\exp(ax^1)[2e_1dx^1dx^2+\sum_{j=3}^{n}e_{j-1}(dx^j)^2], \quad (2.23)$$

其中a、b、c是常数，$a\neq0$，$c\neq0$，（否则V_n是平坦的或类1的)．作线性变换

$$x^1=\bar{x}^1/\sqrt{|c|}\quad,x^2=(\sqrt{|c|}/e_1)\bar{x}^2+(b/\sqrt{|c|})\bar{x}^1,\ x^3=\bar{x}^3,\cdots,\ x^n=\bar{x}^n,$$

则（2.23）化成（略去x^i上一横并以a代替$a/\sqrt{|c|}$）

$$\varphi=\varepsilon_1\exp(2ax^1)(dx^1)^2+\exp(ax^1)[2dx^1dx^2+\sum_{j=3}^{n}\varepsilon_j(dx^j)^2],(a\neq0,\varepsilon_1,\varepsilon_j=\pm1), \quad (2.24)$$

即 Vranceanu 的度量（1.4)，$n\geqslant3$ 时，它是非平坦的．

综上得到

定理 1 类2的常数联络黎曼空间V_n的基本形式（精确到坐标的线性变换）取形式（2.7)，(2.18)，(2.20）和（2.24）之一．

其逆，形式（2.7)，(2.18)，(2.20）和（2.24）都有常数的第二类克氏记号．(2.7) 显然不是共形平坦的，否则

$$\varphi_1=\exp(a_px^p)[\varepsilon_1(dx^1)^2+\cdots+\varepsilon_m(dx^m)^2]\quad(p=1,\cdots,m), \quad (2.25)$$

$$\varphi_2=\exp(a_qx^q)[\varepsilon_{m+1}(dx^{m+1})^2+\cdots+\varepsilon_n(dx^n)^2]\quad(q=m+1,\cdots,n), \quad (2.26)$$

都是常曲率的．(见[6]定理3.3，它对于基本形式非正定时同样成立．）从而$a_p=a_q=0$，$(p=1,\cdots,m>2;\ q=m+1,\cdots n;\ n-m>2)$，(见[1]，p.85)；或者$m\leqslant2,n-m>2,a_q=0$，$(q=m+1,\cdots,n)$；或者$n-m\leqslant2,m>2,a_p=0,(p=1,\cdots,m)$．这些都已排除．计算共形曲率张量可知（2.18）和（2.20）也不是共形平坦的．因此（2.7)，(2.18）和（2.20）都不可能是类1的．而（2.24）(即 Vranceanu 的度量（1.4)）经过非线性变换

$$\bar{x}^1=x^1,\bar{x}^2=\frac{\varepsilon_1}{2a}\exp(ax^1)+x^2,\bar{x}^3=x^3,\cdots,\quad \bar{x}^n=x^n, \quad (2.27)$$

化成（略去x^i上一横）

$$\varphi=\exp(ax^1)[2dx^1dx^2+\sum_{j=3}^{n}\varepsilon_j(dx^j)^2],\quad(a\neq0). \quad (2.28)$$

（2.28）是（1.3）的特殊情况，因此V_n是类1的常数联络黎曼空间．于是我们有

定理 2 类2的常数联络黎曼空间的基本形式可以化成（2.7)，(2.18）和（2.20）之一，其逆亦真．

系 不存在三维的类2常数联络黎曼空间．

因此 G. Vranceanu [3] 说（1.4）是一个类2常数联络黎曼空间的度量是不正确的．至多只能说（1.4）是一个类2的常数联络的度量形式，它经过适当的非线性变换（2.27）可以化成一个类1的常数联络黎曼空间的度量形式（2.28)．

§3. 类 2 的常数联络的共形平坦黎曼空间和爱因斯坦空间

类 1 的常数联络黎曼空间 V_n 是共形平坦的．其逆，共形平坦的常数联络黎曼空间 V_n 并不一定是类 1 的，因为我们确定类数仅是对那些给出常数第二类克氏记号的坐标系．但是，前节已经证明，类 2 常数联络黎曼空间 V_n 都不是共形平坦的，即不存在类 2 常数联络的共形平坦黎曼空间．

现在来确定类 2 常数联络的爱因斯坦空间 V_n．因为 V_n 在给定坐标系下有常数第二类克氏记号，故利齐张量的分量 R_{ij} 都是常数．由于

$$R_{ij}=\frac{R}{n}g_{ij},$$

必须 $R=0$，(否则 $g_{ij}=\frac{n}{R}R_{ij}$，V_n 是类 1 的或平坦的)．从而

$$R_{ij}=0.$$

如果基本形式 (2.7) 的 V_n 是爱因斯坦空间，则 (2.25) 和 (2.26) 都是爱因斯坦的 (见[6]定理 3.4，对非正定情况同样成立)，从而是平坦的，矛盾．对于 (2.18)，可算得：当且仅当 $a_p=b_p$，$(p=1,\cdots,m)$ 时，$R_{ij}=0$．对于 (2.20)，恒有$R_{ij}=0$．于是得到

定理 3 类 2 的常数联络爱因斯坦空间 V_n 的数量曲率$R=0$，且基本形式可化成(2.20) 或

$$\begin{aligned}\varphi=&\exp[a_p(x^p+x^{m+p})]\{\cos[a_p(x^p-x^{m+p})]\sum_p\varepsilon_p[(dx^p)^2-(dx^{m+p})^2]\\&+2\sin[a_p(x^p-x^{m+p})]\sum_p\varepsilon_p dx^p dx^{m+p}\}\ (p=1,\cdots,m;\ n=2m\geqslant 4),\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中a_p 是m个常数．其逆亦真．

坐标变换

$$\bar{x}^p=x^p+x^{m+p},\ \ \bar{x}^{m+p}=x^p-x^{m+p},\ \ (p=1,\cdots,m)$$

将 (3.2) 化成 (略去一横)

$$\varphi=\exp(a_px^p)\left\{\frac{1}{2}\sin(a_px^{m+p})\sum_p\varepsilon_p[(dx^p)^2-(dx^{m+p})^2]+\cos(a_px^{m+p})\sum_p\varepsilon_p dx^p dx^{m+p}\right\},$$
$$(p=1,\cdots,m).\tag{3.3}$$

参 考 文 献

[1] Eisenhart, L. P., Riemannian Geometry, Princeton, 1949.

[2] Вагнер, В., Римановы пространства с постоянными символами Кристоффеля, Саратов, *Учен. зап. ун-та. сер. физ.-матем.*, 1(14): 2(1938), 98—104. (俄文)

[3] Vranceanu, G., Asupra spaciilor lui Riemann cu conexiune constanta, *Studii ci cer. Math.*, 13(1962), 309—324. (罗马尼亚文)

[4] Gorciu, V.G., Asupra spaciilor cu conexiune constanta de gen doi, studii ci cer. Math., 13 (1962), 479—484.

[5] Bocher, M., Introduction to higher algebra, 中译本(余介石译), 商务版, 1950.

[6] Ficken, F. A., The Riemannian and affine differential geometry of product-spaces, *Ann. Math.*, 40(1939), 892-913.

On Riemannian Spaces with Constant Connection of Genus Two

By *Ouyang Chongzhen* (欧阳崇珍), *Wang Zhongcai* (王仲才)

Abstract

A non-flat Riemannian space V_n is called Riemannian space with constant connection if its Christoffel symbols of the second kind are constant in some coordinate system $\{x^i\}$. Following G. Vranceanu [3], a Riemannian space V_n with constant connection is said to be of genus p, if the components of the fundamental tensor in the coordinate system $\{x^i\}$ can be written in the form

$$g_{ij} = c^{\alpha}_{ij} t_{\alpha}, \quad (\alpha = 1, \cdots, p)$$

where c^{α}_{ij} are constant, and p is least.

In this paper we prove the following

Theorem. V_n is a Riemannian space with constant connection of genus 2, if and only if its fundamental form (1,1) is reducible to the form

$$\varphi = \exp(a_p x^p)[\varepsilon_1 (dx^1)^2 + \cdots + \varepsilon_m (dx^m)^2] + \exp(a_q x^q)[\varepsilon_{m+1}(dx^{m+1})^2 + \cdots + \varepsilon_n (dx^n)^2]$$
$$(p = 1, \cdots, m; \ q = m+1, \cdots, n; \ \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n = \pm 1; \ a_1^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0; \ 1 \leqslant m \leqslant n-1, n \geqslant 4), \tag{2.7}$$

$$\varphi = \exp(a_p x^p + b_p x^{m+p})\{\cos(b_p x^p - a_p x^{m+p})\sum_p \varepsilon_p[(dx^p)^2 - (dx^{m+p})^2] + 2\sin(b_p x^p - a_p x^{m+p})\sum_p \varepsilon_p dx^p dx^{m+p}\} \quad (\varepsilon_p = \pm 1; \sum_p (a_p^2 + b_p^2) \neq 0; p = 1, \cdots, m; n = 2m \geqslant 4), \tag{2.18}$$

or

$$\varphi = (a_p x^{2p-1} + b_q x^{2m+q})\sum_p \varepsilon_p (dx^{2p-1})^2 + 2\sum_p dx^{2p-1} dx^{2p} + \sum_q \varepsilon_{2m+q}(dx^{2m+q})^2$$
$$(\varepsilon_p, \varepsilon_{2m+q} = \pm 1; p = 1, \cdots, m; q = 1, \cdots, n-2m). \tag{2.20}$$

It is also shown that the example of a Riemannian space with constant connection of genus 2 provided by G. Vranceanu [3] is actually of genus 1.