1982年 第2卷 第4期
Vol.2, No.4, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

SL(3,p^n)的Cartan不变量*

叶家琛

（华东师范大学）

K表示特征数$p>0$的代数闭域．G是K上单连通半单代数群．$\Gamma_n=G(\mathbb{F}p^n)$是$p^n$个元素的有限域上型$G$的有限Chevalley群，它在$K$上的群代数是$K\Gamma_n$．$\Lambda_n$表示不同构的不可约$K\Gamma_n$-模$M_{\lambda,n}$的指标集，也是不同构的主不可分解$K\Gamma_n$-模$R_{\lambda,n}$的指标集，它可以看作$G$的权格$X$中“限制”优势权的集合$X_{p^n}$．因此$|\Lambda_n|=p^{n\cdot \mathrm{rank}G}$．$\Gamma_n$的Cartan不变量$C_{\lambda,\mu}(\lambda,\ \mu\in\Lambda_n)$等于$M_{\mu,n}$作为$R_{\lambda,n}$的合成因子出现的重数，形成$|\Lambda_n|$阶对称矩阵．

$\mathfrak{g}$是G的限制李代数，u是$\mathfrak{g}$在K上的限制普遍包络代数，U_K是G的超代数，u_n是U_K的$p^{n\cdot \dim G}$维子代数，特别，u_1可与u同构．对$\lambda\in\Lambda_n$，$M_{\lambda,n}$也是不可约G-模，它导出的u_n-模是不可约的，仍记为$M_{\lambda,n}$，对应的主不可分解u_n-模$Q_{\lambda,n}$有一个自然的G-模结构，限制到$K\Gamma_n$是射影的．

关于有限Chevalley群的Cartan不变量的计算问题，已经由Upadhyaya在[1]中对奇素数p及Alperin在[2]中对$p=2$分别计算了$SL(2,p^n)$的Cartan不变量．Humphreys在[3]中计算了$SL(3,3)$、$SL(3,5)$和$S_{pin}(5,3)$的Cartan矩阵，并在[4]中指出：可以计算$SL(3,p)$的Cartan不变量，但对非“一般”位置上的$\lambda\in\Lambda_1$，$R_{\lambda,1}$的$K\Gamma_1$-合成因子的状态，进而对任意正整数n，$SL(3,p^n)$的Cartan不变量还需要进一步研究．本文的目的就是试图解决这些问题，并具体计算了$SL(3,7)$的Cartan矩阵．

利用这个机会，我谨向导师曹锡华教授和其他有关同志表示衷心的感谢．

§1 SL(3,p)的Cartan不变量

从现在起，记$G=SL(3,K)$，$\Gamma_n=SL(3,p^n)$，并假定$p>3$（$=G$的Weyl群W的Coxeter数）．

1.1 以α_1、α_2表示G的单根，$\alpha_0=\alpha_1+\alpha_2$是$G$的最高根．以$\lambda_1$、$\lambda_2$表示$G$的基本优势权，

*1981年8月6日收到．1982年4月30日收到修改稿．推荐者：曹锡华（华东师大）．

对 $\lambda=r\lambda_1+s\lambda_2\in X$，简记为$\lambda=(r,s)$，$r,s\in\mathbf{Z}$，于是 $\delta=(1,1)$是正根之半和。

$\Lambda_n=\{(r,s)|0\leqslant r,s<p^n\}$，特别$\Lambda_1$可以分为：

顶室$\Lambda_t=\{(r,s)|r+s>p-2$ 且 $0<r,s<p-1\}$；

底室$\Lambda_b=\{(r,s)|r+s<p-2$ 且 $0\leqslant r,s<p-1\}$；

墙$H_{\alpha_1,p}=\{(p-1,s)|0\leqslant s<p-1\}$，$H_{\alpha_2,p}=\{(r,p-1)|0\leqslant r<p-1\}$，

$H_{\alpha_0,p}=\{(r,s)|r+s=p-2,\ r,s\geqslant 0\}$与最高权$(p-1)\delta$。

X_r 表示G的根格，G的基本群 X/X_r 的阶是 3． $d=(p^n-1,3)$，由［5］§12.3，［6］§86.10，［7］表1a，易知 Γ_n 的 Cartan 不变量形成 p^{2n} 阶对称矩阵，分成 $d+1$ 块：其中亏数0的 1 块只含权 $(p^n-1)\delta$，另外 d 块是亏数最高（为$3n$）的块；当$d=3$时，含在每块中的权恰为 X/X_r 的 1 个陪集中的$\frac{1}{3}(p^{2n}-1)$个权。

1.2 设 σ_i 是关于 α_i 的单反射（$i=1,2$），生成G的 Weyl 群W，以 σ_0 表示W的最长元素．W在X上的作用由 $\sigma_i\lambda_j=\lambda_j-\delta_{ij}\alpha_j(i,j=1,2)$ 给出．引入W在X上的另一种作用“·”：

$$\sigma\cdot\lambda=\sigma(\lambda+\delta)-\delta,\quad \forall\sigma\in W,\ \lambda\in X.$$

定义1 对 $\lambda,\mu\in X$，如果存在 $\sigma\in W$，使 $\mu\equiv\sigma\cdot\lambda(\operatorname{mod} pX)$，称 λ 和 μ 在X中连结，记作$\lambda\sim\mu$；相应地对 $\lambda,\mu\in\Lambda_1$，如果存在 $\sigma\in W$，使 $\mu\equiv\sigma\cdot\lambda(\operatorname{mod} pX)$，称 λ 和 μ 在Λ_1中连结，或称 λ 和 μ 是p-连结的，仍记作 $\lambda\sim\mu$，且记 $\mu=\lambda(\sigma)$。

由[8]定理4.1和定理5.1给出连结原则：

命题2 当 $p>h$（$=G$的 Weyl 群W的 Coxeter 数）时，不可分解G-模（相应地 u-模）的合成因子的首权在X（相应地Λ_1）中连结。

下表给出了 $SL(3,K)$的连结类：

σ	1	$\sigma_1\sigma_2$	$\sigma_2\sigma_1$	σ_0	σ_1	σ_2
$\sigma\cdot\lambda$	(r,s)	$(-r-s-3,r)$	$(s,-r-s-3)$	$(-s-2,-r-2)$	$(-r-2,r+s+1)$	$(r+s+1,-s-2)$

1.3 对 $\lambda=(r,s)\in X^+$（G的优势权的集合），由 Weyl 维数公式易知G的 Weyl 模V_λ（以 λ 为首权的普遍最高权模，是不可分解的）的维数为

$$\dim V_\lambda=\frac{1}{2}(r+1)(s+1)(r+s+2).$$

由［5］§4.3，当$\lambda\in\Lambda_t$时，$V_\lambda\overset{\longleftrightarrow}{_G}M_\lambda\oplus M_{\lambda(\sigma_0)}$（记号“$\overset{\longleftrightarrow}{_G}$”表示两边有相同的$G$-合成因子，类似地有“$\overset{\longleftrightarrow}{_{K\Gamma_n}}$”及“$\overset{\longleftrightarrow}{_{u_n}}$”）；当 $\lambda\in\Lambda_1\backslash\Lambda_t$时，$V_\lambda=M_\lambda$．因此对一切 $\lambda\in\Lambda_1$，可算出$\dim M_\lambda$．由于 V_λ 的权集 $\Pi(\lambda)$ 是清楚的，容易得到 M_λ 的权集 $\Pi'(\lambda)$．又根据 Steinberg 张量积定理，对任意的 $\lambda\in X^+$，可算出 $\dim M_\lambda$ 并得到 $\Pi'(\lambda)$。

对 $\lambda=\lambda_0+p\lambda_1\in\Lambda_2$，这里 $\lambda_0\in\Lambda_1$，$\lambda_2\in\Lambda_b$，Jantzen 在[9]中给出了 V_λ 的G-合成因子分解的一般模型。

1.4 对 $\lambda=(r,s)\in\Lambda_1$，由[5]§8.2 定理，$Q_{\lambda,1}$ 作为 $M_\mu\otimes st$ 的 u_1-直和项恰好出现一次并在G下稳定，这里 st 是 Steinberg 模，$\mu=\sigma_0\lambda+(p-1)\delta$. 我们要证明 $Q_{\lambda,1}$ 有一个以

Weyl 模为商模的 G- 模滤过（简称 W- 滤过），并给出作为商模的这些 Weyl 模的一般描述：

定理3　(a) 当 $\lambda\in\Lambda_t\cup H_{\alpha_1,p}\cup H_{\alpha_2,p}$ 时，

$Q_{\lambda,1}\overset{\longleftrightarrow}{G}\sum\limits_{\sigma\in W^\mu}V_{\sigma\mu+(p-1)\delta}$，这里$\mu=\sigma_0\lambda+(p-1)\delta=(p-s-1,p-r-1)\in\Lambda_1$，$W^\mu$是$W$关于$\mu$在$W$中的稳定子$W_\mu$的陪集分解的代表元集.

(b) 当 $\lambda\in H_{\alpha_0,p}$ 时，

$Q_{\lambda,1}\overset{\longleftrightarrow}{G}\sum\limits_{\sigma\in W'}V_{\sigma\mu+(p-1)\delta}$，这里 $\mu=\sigma_0\lambda+(p-1)\delta=(r+1,\ s+1)\in\Lambda_1$，$W'=W\backslash\{\sigma_1\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_1\}$.

(c) 当 $\lambda\in\Lambda_b$ 时

$Q_{\lambda,1}\overset{\longleftrightarrow}{G}\sum\limits_{\sigma\in W'}(V_{\sigma\mu+(p-1)\delta}\oplus V_{\sigma\mu_0+(p-1)\delta})$，这里 $\mu=\sigma_0\lambda+(p-1)\delta=(p-s-1,\ p-r-1)\in\Lambda_1$，$\mu_0=\sigma_0(\lambda(\sigma_0))+(p-1)\delta=(r+1,\ s+1)\in\Lambda_1$，$W'=W\backslash\{\sigma_1\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_1\}$.

定理的(a)已在 [5]§9.2 定理 b 中证明，这里只证(b)、(c).

由于不可约 G- 模的形式特征标集合 $\{p-ch(\mu),\ \mu\in X^+\}$ 及 Weyl 模的形式特征标集合 $\{\mathrm{ch}(\mu),\ \mu\in X^+\}$ 分别是 $\mathbf{Z}[X]^W$ 的基，因此我们可用形式特征标为工具来证明下述引理.

引理4　设 $\lambda',\lambda''\in X^+$，$V_{\lambda''}$的形式特征标为 $\mathrm{ch}(\lambda'')$，$V_{\lambda'}$ 的形式特征标为 $\mathrm{ch}(\lambda')=\sum\limits_{\nu\in\pi(\lambda')}m_{\lambda'}(\nu)e(\nu)$，则 $V_{\lambda'}\otimes V_{\lambda''}$ 的形式特征标为

$$\mathrm{ch}(\lambda')\mathrm{ch}(\lambda'')=\sum_{\nu\in\pi(\lambda')}m_{\lambda'}(\nu)\mathrm{ch}(\nu+\lambda'').$$

这里 $\mathrm{ch}(\nu+\lambda'')=0$，如果 $\nu+\lambda''+\delta$ 落在 Weyl 房的墙上；或者 $\mathrm{ch}(\nu+\lambda'')=(\det\sigma)\mathrm{ch}(\sigma\cdot(\lambda''+\nu))$，如果 $\nu+\lambda''+\delta$ 不落在 Weyl 房的墙上且 $\sigma(\nu+\lambda''+\delta)\in X^+$.

特别，在 $\mathrm{ch}(\lambda')\mathrm{ch}(\lambda'')$ 的这个表达式（简称为 W- 表达式）中，出现的只能是 $\mathrm{ch}(\nu+\lambda'')$，这里 $\nu\in\Pi(\lambda'),\nu+\lambda''\in X^+$；且是这些 Weyl 模形式特征标的正整系数线性组合.

这是 [10]§24中的习题9和12，我们把证明省略了.

引理5　$M_\mu\otimes st$ 的形式特征标可表成 Weyl 模的形式特征标的正整系数线性组合.

证　只要考虑 $p-\mathrm{ch}(\mu)=ch(\mu)-\mathrm{ch}(\mu(\sigma_0))$的情况，此时

$p-\mathrm{ch}(\mu)\mathrm{ch}((p-1)\delta)=\sum\limits_{\nu\in\Pi(\mu)}m_\mu(\nu)\mathrm{ch}(\nu+(p-1)\delta)-\sum\limits_{\nu\in\Pi(\mu(\sigma_0))}m_{\mu(\sigma_0)}(\nu)\mathrm{ch}(\nu+(p-1)\delta)$

i　若 $\nu\in\Pi(\mu(\sigma_0))$且不存在$\nu'\in\Pi(\mu)$使$\nu'+p\delta\notin X^+$但$\sigma_i\cdot(\nu'+(p-1)\delta)=\nu+(p-1)\delta$ ($i=1$ 或 2)，则 $\mathrm{ch}(\nu+(p-1)\delta)$在 $M_\mu\otimes st$ 的 W- 表达式中有正整系数 $m_\mu(\nu)-m_{\mu(\sigma_0)}(\nu)$ 若这样的ν' 存在，则$\mathrm{ch}(\nu+(p-1)\delta)$有正整系数 $m_\mu(\nu)-m_{\mu(\sigma_0)}(\nu)-m_\mu(\nu')$.

ii　若 $\nu\notin\Pi(\mu(\sigma_0))$ 但 $\nu\in\Pi(\mu)$，且 $\nu+p\delta\in X^+$，若不存在 $\nu'\in\Pi(\mu)$ 使 $\nu'+p\delta\notin X^+$ 但 $\sigma_i\cdot(\nu'+(p-1)\delta)=\nu+(p-1)\delta(i=1$ 或 2)，则 $\mathrm{ch}(\nu+(p-1)\delta)$在$M_\mu\otimes st$ 的W- 表达式中有正整系数 $m_\mu(\nu)$. 若这样的 ν' 存在，则 $\mathrm{ch}(\nu+(p-1)\delta)$ 有正整系数 $m_\mu(\nu)-m_\mu(\nu')$. 引理证毕.

通过简单的计算，并用引理4和引理5，可得

引理6 在 $V_\mu\otimes st$ 的 W- 表达式中出现的 $\mathrm{ch}(\nu+(p-1)\delta)$ 中，这里 $\nu\in\Pi(\mu)$，$\nu+(p-1)\delta\in X^+$，与 λ 连结的首权 $\nu+(p-1)\delta$ 只能是：

(1) 当 $\lambda\in H_{\alpha_0,p}$ 时为 $\sigma\mu+(p-1)\delta$，$\sigma\in W'$；

(2) 当 $\lambda\in\Lambda_b$ 时为 $\sigma\mu+(p-1)\delta$，$\sigma\in W'$ 及 $\sigma\mu_0+(p-1)\delta$，$\sigma\in W$.

引理7 (1) 当 $\lambda\in H_{\alpha_0,p}$ 时，$\mathrm{ch}(\sigma\mu+(p-1)\delta)$ $(\sigma\in W')$ 在 $V_\mu\otimes st$ 与在 $M_\mu\otimes st$ 的 W- 表达式中出现的重数相同；

(2) 当 $\lambda\in\Lambda_b$ 时，$\mathrm{ch}(\sigma\mu+(p-1)\delta)$ $(\sigma\in W')$ 及 $\mathrm{ch}(\sigma\mu_0+(p-1)\delta)$ $(\sigma\in W)$ 在 $V_\mu\otimes st$ 与在 $M_\mu\otimes st$ 的 W- 表达式中出现的重数相同.

利用命题 2，易知

引理8 对任意的 G- 模 V，存在直和分解 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$，使每个 V_i 的 G- 合成因子的首权在 X 中连结，但对不同的 V_i 和 V_j，它们的 G- 合成因子的首权在 X 中不连结. V 的这种直和分解是唯一的.

引理9 $Q_{\lambda,1}$ 有一个 W- 滤过.

证 由[11]定理 B 及命题3.4，只要证明 $Q_{\lambda,1}$ 是 $V_\mu\otimes st$ 的 G- 直和项.

用引理8，$M_\mu\otimes st=M\oplus M'$，$V_\mu\otimes st=V\oplus V'$，其中 M 与 V 分别表示 $M_\mu\otimes st$ 与 $V_\mu\otimes st$ 的这个分解中，G- 合成因子的首权与 λ 在 X 中连结的 G- 直和项. 由 $M_\mu\otimes st$ 是 $V_\mu\otimes st$ 的商模知 M 是 V 的商模，又由引理7，有 $M\cong V$. 于是 $Q_{\lambda,1}$ 是 M 从而也是 V 的 G- 直和项. 引理证毕.

由[4]§2 中指出的 Brauer 的对偶性：V_μ 作为 $Q_{\lambda,1}$ 的滤过商出现的次数等于 M_λ 作为 V_μ 的 G- 合成因子出现的重数. 又由[9]中给出的 A_2 型 Weyl 模的 G- 合成因子分解的一般模型，定理 3 就得到了证明.

1.5 对 $\lambda=(r,s)\in\Lambda_1$，利用[9]中给出的分解模型，由定理 3 可得

定理10 $Q_{\lambda,1}$ 的 G- 合成因子形如 $M_{\lambda(\sigma)}\otimes M_\sigma^{(p)}$，其中 M_σ 由下页的表给出(见 p.13).

由 Steinberg 张量积定理，作为 u_1- 模，$M_{\lambda(\sigma)}\otimes M_\sigma^{(p)}\cong(\dim M_\sigma)M_{\lambda(\sigma),1}$. 于是由定理10可得

定理11 $Q_{\lambda,1}$ 的 u_1- 合成因子形如 $M_{\lambda(\sigma),1}$，出现的重数 a_σ 由下页的表给出(见 p.13).

1.6 记 $\delta_\sigma=\sum_j\lambda_j$，和取遍所有使 $l(\sigma_j\sigma)<l(\sigma)$ 的那些 j. 对 $\lambda=(r,s)\in\Lambda_1$，将 $Q_{\lambda,1}$ 的 u_1- 合成因子的首权形变，可求出 $Q_{\lambda,1}$ 的 $K\Gamma_1$- 合成因子的首权.

(a) 当 $\lambda\in\Lambda_i$ 时，定义 λ 的 p- 连结权 $\lambda(\sigma)$ 的形变为

$$\lambda(\sigma)+\sigma\tau\sigma^{-1}(\delta_\sigma),\quad \sigma,\ \tau\in W.$$

(b) 当 $\lambda\in H_{\alpha_1,p}\cup H_{\alpha_2,p}$ 时，定义 λ 的 p- 连结权 $\lambda(\sigma)$ 的形变为

$$a(\sigma)(\lambda(\sigma)+\sigma\tau\sigma^{-1}(\delta_\sigma)),\quad \sigma,\ \tau\in W^\lambda=\{1,\ \sigma_1\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_1\}.$$

这里 $a(\sigma)$ 是权 $\lambda(\sigma)+\sigma\tau\sigma^{-1}(\delta_\sigma)$ 作为 λ 的 p- 连结权 $\lambda(\sigma)$ 的形变权出现的次数. 当 $\lambda\in H_{\alpha_1,p}$ 时，$a(\sigma)=\begin{cases}2 & \sigma=\sigma_2\sigma_1\\ 1 & \sigma\neq\sigma_2\sigma_1\end{cases}$；当 $\lambda\in H_{\alpha_1,p}$ 时，$a(\sigma)=\begin{cases}2 & \sigma=\sigma_1\sigma_2\\ 1 & \sigma\neq\sigma_1\sigma_2\end{cases}$.

(c) 当 $\lambda\in H_{\alpha_0,p}$ 时，定义 λ 的 p- 连结权 $\lambda(\sigma)$ 的形变为

$$\lambda(\sigma)+\sigma\tau\sigma^{-1}(\delta_\sigma),\quad \sigma\in\{1,\ \sigma_0,\ \sigma_1\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_1\},\quad \tau\in W.$$

σ \ λ ($M_\sigma(a_\sigma)$)	Λ_t	Λ_b	$H_{a_0,p}$	$H_{a_1,p}$	$H_{a_2,p}$
1	$6M_{(0,0)}(6)$	$8M_{(0,0)}\oplus 2M_{(1,1)}(24)$	$4M_{(0,0)}\oplus M_{(1,1)}(12)$	$3M_{(0,0)}(3)$	$3M_{(0,0)}(3)$
$\sigma_1\sigma_2$	$2M_{(1,0)}(6)$	$4M_{(0,1)}\oplus 2M_{(2,0)}(24)$	$2M_{(1,0)}(6)$	$M_{(1,0)}(3)$	$2M_{(1,0)}(6)$
$\sigma_2\sigma_1$	$2M_{(0,1)}(6)$	$4M_{(1,0)}\oplus 2M_{(0,2)}(24)$	$2M_{(0,1)}(6)$	$2M_{(0,1)}(6)$	$M_{(0,1)}(3)$
σ_0	$4M_{(0,0)}\oplus M_{(1,1)}(12)$	$4M_{(0,0)}\oplus M_{(1,1)}(12)$			
σ_1	$4M_{(1,0)}(12)$	$4M_{(0,1)}(12)$			
σ_2	$4M_{(0,1)}(12)$	$4M_{(1,0)}(12)$			

(d) 当 $\lambda\in\Lambda_b$ 时，定义 λ 的 p- 连结权 $\lambda(\sigma)$ 的形变为

$\sigma=\sigma_1$ 或 σ_2 时，$2(\lambda(\sigma)+\sigma\sigma_0\tau\sigma_0\sigma^{-1}(\delta_{\sigma\sigma_0}))$，$\tau\in W$；

$\sigma=1$ 或 σ_0 时，$\lambda(\sigma)+\sigma\tau\sigma^{-1}(\delta_\sigma)$ 及 $\lambda(\sigma)+\sigma\sigma_0\tau\sigma_0\sigma^{-1}(\delta_{\sigma\sigma_0})$，$\tau\in W$；

$\sigma=\sigma_1\sigma_2$ 或 $\sigma_2\sigma_1$ 时，$\lambda(\sigma)+\sigma\sigma_0\tau\sigma_0\sigma^{-1}(\delta_{\sigma\sigma_0})$ 及 $\lambda(\sigma)+2\sigma\tau\sigma^{-1}(\delta_\sigma)$，$\tau\in W$.

其中 $\sigma\tau\sigma^{-1}(\delta_\sigma)$ 的值由下表给出.

σ \ δ_σ \ $\sigma\tau\sigma^{-1}(\delta_\sigma)$ \ τ		1	σ_0	σ_1	σ_2	$\sigma_1\sigma_2$	$\sigma_2\sigma_1$
1	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
$\sigma_1\sigma_2$	(1, 0)	(1, 0)	(-1,1)	(1, 0)	(0,-1)	(-1,1)	(0,-1)
$\sigma_2\sigma_1$	(0, 1)	(0, 1)	(1,-1)	(-1,0)	(0, 1)	(-1,0)	(1,-1)
σ_0	(1, 1)	(1, 1)	(-1, -1)	(2,-1)	(-1,2)	(1,-2)	(-2,1)
σ_1	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(-1,1)	(0,-1)	(0,-1)	(-1,1)
σ_2	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(-1,0)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,0)

在具体计算中，只要直接利用本节的结果，就可求出 $Q_{\lambda,1}$ 的全部 $K\Gamma_1$- 合成因子.

注 1. 对每个形变的权 $\nu\in\Lambda_t$，$M_{\nu(\sigma_0)}$ 也是 $Q_{\lambda,1}$ 的一个 $K\Gamma_1$- 合成因子；

2. 在 (b) 中，当 $\lambda\in H_{\alpha_1,p}$ ($H_{\alpha_2,p}$) 时，每个形变的权 $\lambda(\sigma_1\sigma_2)+(0,-1)(\lambda(\sigma_2\sigma_1)+(-1,0))$ 作为 $Q_{\lambda,1}$ 的 $K\Gamma_1$- 合成因子的首权出现的重数是 2；

3. 在(c)中，每个形变的权 $\lambda(\sigma_1\sigma_2)+(-1,1)$ 及 $\lambda(\sigma_2\sigma_1)+(1,-1)$ 作为 $Q_{\lambda,1}$ 的 Kr_1- 合成因子的首权出现的重数是 2；

4. 在 (d) 中，当 $rs=0$ 时，形变的权 $\lambda(\sigma_0)$ 作为 $Q_{\lambda,1}$ 的 $K\Gamma_1$- 合成因子的首权出现的重数还要加上 c，$c=\begin{cases}2 & r,s\text{同时为}0\\ 1 & r,s\text{不同时为}0.\end{cases}$

1.7 对 $\lambda=(r,s)\in\Lambda_1$，$Q_{\lambda,1}$ 限制到 $K\Gamma_1$ 是射影的，可分解为主不可分解 $K\Gamma_1$- 模的直和，从而求出 $R_{\lambda,1}$ 的全部 $K\Gamma_1$- 合成因子. 由[5]§10.3

$Q_{(0,0),1}=R_{(0,0),1}\oplus R_{(p-1,0),1}\oplus R_{(0,p-1),1}\oplus R_{(p-1,p-1),1}$；

$Q_{(r,0),1}=R_{(r,p-1),1}\oplus R_{(r,0),1}$，$0<r\leqslant p-1$；

$Q_{(0,s),1}=R_{(p-1,s),1}\oplus R_{(0,s),1}$，$0<s\leqslant p-1$；

$Q_{(r,s),1}=R_{(r,s),1}$，$rs\neq 0$.

§2 SL(3, p^n)的Cartan不变量的计算

2.1 对 $\lambda=\lambda_0+p\lambda_1+\cdots+p^{n-1}\lambda_{n-1}\in\Lambda_n$，这里 λ_0、λ_1、…、$\lambda_{n-1}\in\Lambda_1$，我们给出计算 $Q_{\lambda,n}$ 的 $K\Gamma_n$- 合成因子的一种方法. 由[12]§1的定理，作为 G- 模

$$Q_{\lambda,n}\cong Q_{\lambda_0,1}\otimes Q_{\lambda_1,1}^{(p)}\otimes\cdots\otimes Q_{\lambda_{n-1},1}^{(p^{n-1})}.$$

通过比较形式特征标，容易证明下面的几个引理.

引理1 若 $M_{\mu'}$、$M_{\mu''}$ 分别是 $V_{\lambda'}$、$V_{\lambda''}$ 的G-合成因子，则可以通过分解各种 $M_{\mu'}\otimes M_{\mu''}$的$G$-合成因子求出 $V_{\lambda'}\otimes V_{\lambda''}$ 的全部G- 合成因子.

引理2 若 M_μ 是 V_λ 的 G- 合成因子，则对任意 $k\in\mathbf{Z}^+$，$V_\lambda^{(p^k)}$，的 G- 合成因子就是这些 $M_\mu^{(p^k)}$.

引理3 若 $\mu\in\Lambda_1$，$\nu\in\Lambda_b$，则

(a) 当 $V_u=M_\mu$ 时，$M_\mu\otimes M_\nu$ 的 G- 合成因子就是 $V_u\otimes V_\nu$ 的 G- 合成因子；

(b) 当$V_\mu\underset{G}{\longleftrightarrow}M_\mu\oplus M_{\mu(\sigma_0)}$ 时，$M_\mu\otimes M_\nu$ 的 G- 合成因子是从 $V_\mu\otimes V_\nu$ 的 G- 合成因子中减去$V_{\mu(\sigma_0)}\otimes V_\nu$ 的 G- 合成因子.

下面的引理是显然的.

引理4 若 M_ν 是 $V_\lambda\otimes V_\mu$(或 $M_\lambda\otimes M_\mu$)的G-合成因子，则 $\nu\leqslant\lambda+\mu$.

注意到 §1.5 定理10，$Q_{\lambda,1}(\lambda\in\Lambda_1)$的 G- 合成因子 $M_\mu=M_{\mu_0}\otimes M_{\mu_1}^{(p)}$ 满足 $\mu_0\in\Lambda_1$ 且 $0\leqslant\langle\mu_1,\ \alpha_0\rangle\leqslant2$. 于是容易证明

定理5 设 $M_{\mu_i}=M_{\mu_{i0}}\otimes M_{\mu_{i1}}^{(p)}$ 是 $Q_{\lambda_i,1}$ 的 G- 合成因子，$i=0,1,\cdots,n-1$. 则可通过有限次分解两个不可约 G- 模的张量积的 G- 合成因子，求出每个 $M_{\mu_0}\otimes M_{\mu_1}^{(p)}\otimes\cdots\otimes M_{\mu_{n-1}}^{(p^{n-1})}=M_{\mu_{00}}\otimes(M_{\mu_{01}}\otimes M_{\mu_{10}})^{(p)}\otimes\cdots\otimes(M_{\mu_{n-21}}\otimes M_{\mu_{n-10}})^{(p^{n-1})}\otimes M_{\mu_{n-11}}^{(p^n)}$ 的 G- 合成因子，从而求出 $Q_{\lambda,n}$ 的全部 G- 合成因子.

又若 $M_\mu=M_{\mu_0}\otimes M_{\mu_1}^{(p)}\otimes\cdots\otimes M_{\mu_n}^{(p^n)}$ 是 $Q_{\lambda,n}$ 的一个 G- 合成因子，限制到 $K\Gamma_n$，$M_\mu\cong(M_{\mu_0}\otimes M_{\mu_n})\otimes M_{\mu_1}^{(p)}\otimes\cdots\otimes M_{\mu_{n-1}}^{(p^{n-1})}$，一般是可约的，但同样可经过有限次分解两个不可约 G-模的 G- 合成因子，求出 $Q_{\lambda,n}$ 的全部 $K\Gamma_n$- 合成因子.

2.2 由于 $Q_{\lambda,n}$ 限制到 $K\Gamma_n$ 是射影的，可分解为主不可分解 $K\Gamma_n$- 模的直和. [13]§3 定理 1 的推论 2，给出了进行这种直和分解的一种方法，从而能够求出 $R_{\lambda,n}$ 的全部 $K\Gamma_n$-合成因子.

命题6 当 $p^n>h-1$ 时，对 $\lambda,\mu\in\Lambda_n$，$R_{\mu,n}$ 作为 $Q_{\lambda,n}$ 的 $K\Gamma_n$- 直和项出现的次数是 $\sum\limits_{\nu\in X^+}[M_\mu\otimes M_\nu : M_{p^n\nu+\lambda}]_G$.

§3 SL$(3,p^n)$ 的主不可分解模 $R_{\lambda,n}$ 的 $K\Gamma_n$- 合成因子的状态

3.1 为简单计，只考虑 $\lambda\in\Lambda_n$ 在"一般" 位置上的情况，所谓 λ 在 Λ_1 的"一般" 位置上，如果 λ 的 p- 连结权的全部形变的权都在 Λ_1 内；而称 $\lambda=\lambda_0+p\lambda_1+\cdots+p^{n-1}\lambda_{n-1}$ 在 Λ_n 的"一般"位置上，如果每个 λ_i 都在 Λ_1 的"一般"位置上. 为此要求 $p\geqslant11$.

为叙述方便，在 Λ_n 内，称以 $(rp^k-1,\ sp^k-1)(\mathrm{mod}\,pX)$ 为最低权的 p^k- 室为 $\lambda-p^k$ 室，这里 $\lambda=(r,s)\in\Lambda_1$，$k=0,1,\cdots,n-1$. 特别，称 Λ_n 为 p^n- 室，而 $\lambda-p^0$ 室就理解为通常意义下的优势权 $\lambda(\mathrm{mod}\,pX)$.

注意到 §2.2，当 λ 在 Λ_n 的"一般"位置时，$Q_{\lambda,n}=R_{\lambda,n}$.

3.2 当 $\lambda\in\Lambda_1$ 在"一般" 位置时，[4]§4 和 [5]§10.5 描述了 $R_{\lambda,1}$ 的 $K\Gamma_1$- 合成因子

的状态，我们把它推广到 $\lambda\in\Lambda_n$ 在"一般"位置时的情形。

对 $\lambda=\lambda_0+p\lambda_1+\cdots+p^{n-1}\lambda_{n-1}\in\Lambda_n$ 在"一般" 位置时，在含 $R_{\lambda,n}$ 的 $K\Gamma_n$- 合成因子首权的每个 p^{k+1} 室中，含这些权的 p^k 室的分布状态是由 $\lambda_k(\sigma^k)-p^k$ 室及其关于 λ_{k-1} 的"形变"所决定的，这里 $k=0,1,\cdots,n-1$；$\sigma^k\in W$，$\lambda_{-1}=\lambda_{n-1}$。每个"形变"的 p^k 室为 $\lambda_k^{\sigma^{k-1}}(\sigma^k)-p^k$ 室及 $\bar\lambda_k^{\sigma^{k-1}}(\sigma^k)-p^k$ 室，这里 $\lambda_k^{\sigma^{k-1}}(\sigma^k)=\lambda_k(\sigma^k)+\eta_{\sigma^{k-1}}$ 及 $\bar\lambda_k^{\sigma^{k-1}}(\sigma^k)=\lambda_k(\sigma^k)+\bar\eta_{\sigma^{k-1}}$，$\eta_{\sigma^{k-1}}$ 与 $\bar\eta_{\sigma^{k-1}}$ 的值由下表给出，其中 $\sigma^{-1}=\sigma^{n-1}$。

$\eta_{\sigma^{k-1}}$（或 $\bar\eta_{\sigma^{k-1}}$） σ^{k-1} "形变"的 p^k 室		1	$\sigma_1\sigma_2$	$\sigma_2\sigma_1$	σ_0	σ_1	σ_2
λ_{k-1} 在顶室	$\lambda_k^{\sigma^{k-1}}(\sigma^k)-p^k$ 室	(0, 0)	(1, 0) (0,-1) (-1,1)	(0, 1) (-1,0) (1,-1)	(0, 0)	(1, 0) (0,-1) (-1,1)	(0, 1) (-1,0) (1,-1)
	$\bar\lambda_k^{\sigma^{k-1}}(\sigma^k)-p^k$ 室				(1, 1) (-1,2) (-2,1) (-1, -1) (1,-2) (2,-1)		
λ_{k-1} 在底室	$\lambda_k^{\sigma^{k-1}}(\sigma^k)-p^k$ 室	(0, 0)	(0, 1) (-1,0) (1,-1)	(1, 0) (0,-1) (-1,1)	(0, 0)	(0, 1) (-1,0) (1,-1)	(1, 0) (0,-1) (-1,1)
	$\bar\lambda_k^{\sigma^{k-1}}(\sigma^k)-p^k$ 室	(1, 1) (-1,2) (-2,1) (-1, -1) (1,-2) (2,-1)	(2, 0) (0,-2) (-2,2)	(0, 2) (-2,0) (2,-2)	(1, 1) (-1,2) (-2,1) (-1, -1) (1,-2) (2,-1)		

于是 $R_{\lambda,n}$ 的 $K\Gamma_n$- 合成因子的首权形如：

$\lambda_0^{\sigma^{n-1}}(\sigma^0)+p\lambda_1^{\sigma^0}(\sigma^1)+\cdots+p^k\lambda_k^{\sigma^{k-1}}(\sigma^k)+\cdots+p^{n-1}\lambda_{n-1}^{\sigma^{n-2}}(\sigma^{n-1})$，这里 $\sigma^0,\sigma^1,\cdots,\sigma^{n-1}\in W$，其中某些 k 对应的加项可能是 $p^k\bar\lambda_k^{\sigma^{k-1}}(\sigma^k)$，它出现的重数是

$$\prod_{k=0}^{n-1}a_k(\sigma^{k-1})$$

对应于 $p^k\bar\lambda_k^{\sigma^{k-1}}(\sigma^k)$ 的项，上述乘积中出现的因子相应地取常数 $\bar a_k(\sigma^{k-1})$。常数 $a_k(\sigma^{k-1})$（或 $\bar a_k(\sigma^{k-1})$）只与对应的 p^k-室有关，其值由下表给出，其中 $\sigma^{-1}=\sigma^{n-1}$。

	σ^{k-1}	1	$\sigma_1\sigma_2$	$\sigma_2\sigma_1$	σ_0	σ_1	σ_2
λ_{k-1} 在顶室	$a_k(\sigma^{k-1})$	6	2	2	6	4	4
	$\bar{a}_k(\sigma^{k-1})$				1		
λ_{k-1} 在底室	$a_k(\sigma^{b-1})$	12	6	6	6	4	4
	$\bar{a}_k(\sigma^{k-1})$	2	2	2	1		

如果不考虑重数，$R_{\lambda,n}$ 的$K\Gamma_n$- 合成因子的数目是

$$C_{\lambda,n}=C_{\lambda_0,1}\cdot C_{\lambda_1,1}\cdot\cdots\cdot C_{\lambda_{n-1},1},$$

这里 $C_{\lambda_i,1}=20$，如果 $\lambda_i\in\Lambda_t$；$C_{\lambda_i,1}=32$，如果$\lambda_i\in\Lambda_b$。其中首权在顶p^k-室中的有$t^k_{\lambda,n}$个。

$t^k_{\lambda,n}=C_{\lambda_0,1}\cdot\cdots\cdot C_{\lambda_{k-2},1}\cdot t_{\lambda_{k-1},1}\cdot C_{\lambda_k,1}\cdot\cdots\cdot C_{\lambda_{n-1},1}$，$k=0,1,\cdots,n-1$，这里 $t_{\lambda_k,1}=7$，如$\lambda_k\in\Lambda_t$；$t_{\lambda_k,1}=13$，如果 $\lambda_k\in\Lambda_b$。

附表1　$SL(3,7)$的 Cartan 矩阵

$$C=\begin{pmatrix} A & & & \\ & B & & \\ & & B & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

其中

A

λ \ $C_{\lambda\mu}$ \ μ	(0, 0)	(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)	(4, 4)	(5, 5)	(0, 3)	(3, 0)	(0, 6)	(6, 0)	(1, 4)	(4, 1)	(2, 5)	(5, 2)	(3, 6)	(6, 3)
(0, 0)	8	2	4	0	1	4	4	4	1	1	4	4	4	4	1	1
(1, 1)	2	24	14	9	14	1	10	10	0	0	2	2	5	5	1	1
(2, 2)	4	14	18	7	9	0	6	6	0	0	2	2	5	5	4	4
(3, 3)	0	9	7	7	4	0	5	5	0	0	1	1	2	2	2	2
(4, 4)	1	14	9	4	10	0	5	5	0	0	0	0	2	2	0	0
(5, 5)	4	1	0	0	0	6	4	4	2	2	4	4	2	2	0	0
(0, 3)	4	10	6	5	5	4	10	8	1	0	2	4	5	4	0	1
(3, 0)	4	10	6	5	5	4	8	10	0	1	4	2	4	5	1	0
(0, 6)	1	0	0	0	0	2	1	0	3	2	1	2	0	0	0	0
(6, 0)	1	0	0	0	0	2	0	1	2	3	2	1	0	0	0	0
(1, 4)	4	2	2	1	0	4	2	4	1	2	6	2	1	4	2	0
(4, 1)	4	2	2	1	0	4	4	2	2	1	2	6	4	1	0	2
(2, 5)	4	5	5	2	2	2	5	4	0	0	1	4	6	2	0	2
(5, 2)	4	5	5	2	2	2	4	5	0	0	4	1	2	6	2	0
(3, 6)	1	1	4	2	0	0	0	1	0	0	2	0	0	2	3	1
(6, 3)	1	1	4	2	0	0	1	0	0	0	0	2	2	0	1	3

B

$C_{\lambda\mu}$	μ	(1, 0)	(0, 2)	(4, 0)	(0, 5)	(2, 1)	(1, 3)	(5, 1)	(1, 6)	(3, 2)	(2, 4)	(6, 2)	(4, 3)	(3, 5)	(5, 4)	(4, 6)	(6, 5)
λ		(0, 1)	(2, 0)	(0, 4)	(5, 0)	(1, 2)	(3, 1)	(1, 5)	(6, 1)	(2, 3)	(4, 2)	(2, 6)	(3, 4)	(5, 3)	(4, 5)	(6, 4)	(5, 6)
(1, 0)	(0, 1)	10	6	4	2	10	8	4	1	4	4	1	5	5	5	1	0
(0, 2)	(2, 0)	6	14	4	0	14	6	0	1	4	5	1	9	5	5	0	0
(4, 0)	(0, 4)	4	4	12	2	2	4	6	4	2	4	0	1	0	4	1	4
(0, 5)	(5, 0)	2	0	2	4	0	2	4	0	0	1	0	0	0	0	2	1
(2, 1)	(1, 2)	10	14	2	0	24	10	1	0	4	5	1	14	9	5	0	0
(1, 3)	(3, 1)	8	6	4	2	10	14	4	1	4	7	4	5	5	4	4	0
(5, 1)	(1, 5)	4	0	6	4	1	4	7	2	1	2	0	0	0	2	2	2
(1, 6)	(6, 1)	1	1	4	0	0	1	2	3	2	0	0	0	0	2	0	1
(3, 2)	(2, 3)	4	4	2	0	4	4	1	2	6	1	2	1	4	4	0	0
(2, 4)	(4, 2)	4	5	4	1	5	7	2	0	1	7	2	2	2	2	2	0
(6, 2)	(2, 6)	1	1	0	0	1	4	0	0	2	2	3	0	2	0	1	0
(4, 3)	(3, 4)	5	9	1	0	14	5	0	0	1	2	0	10	4	2	0	0
(3, 5)	(5, 3)	5	5	0	0	9	5	0	0	4	2	2	4	6	2	0	0
(5, 4)	(4, 5)	5	5	4	0	5	4	2	2	4	2	0	2	2	6	0	0
(4, 6)	(6, 4)	1	0	1	2	0	4	2	0	0	2	1	0	0	0	3	0
(6, 5)	(5, 6)	0	0	4	1	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	3

参 考 文 献

[1] Upadhyaya, B. Shreekantha, Composition factors of the principal indecomposable modules for the special linear group SL(2, q), *J. London Math.* Soc.(2),17(1978) 437-445.

[2] Alperin, J. L., Projective modules for SL(2,2^n), *J. Pure Appl. Algebra*, 15(1979) 219-234.

[3] Humphreys, J. E., Some computation of cartan invariants for finite groups of Lie type, *Comm. Pure Appl. Math.*, 26(1973), 745-755.

[4] Humphreys, J. E., Cartan invariants and decomposition numbers of Chevalley groups, *Proc. Symp. Pure Math.* 37(1980), Amer. Math. Soc..

[5] Humphreys, J. E., Ordinary and modular representations of Chevalley groups, Lecture Notes in Math. 528, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[6] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, J. Wiley, New York, 1962.

[7] Simpson, W. A. and Frame, J. S., The characters tables for SL(3,q), SU(3,q²), PSL (3,q), PSU(3,q²), *Canad. J. Math.*, 25 (1973) 486-494.

[8] Humphreys, J. E., Modular representations of classical Lie algebras and semisimple groups, *J. Algebra*, 19 (1971) 51-79.

[9] Jantzen, J. C., Über das Dekompositionsverhalten gewisser modularer Darstellungen halbeinfacher Gruppen und ihrer Lie Algebren, *J. Algebra*, 49 (1977) 441-469.

[10] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, GTM 9, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1972.

[11] Wang Jian-pan. Sheaf cohomology on G/B and tensor products of Weyl modules (to appear).

[12] Humphreys, J. E. and Jantzen, J. C., Blocks and indecomposable modules for semisimple algebraic groups, *J. Algebra*, 54 (1978) 494-503.

[13] Chastkofsky, L., Projective characters for finite Chevalley groups, preprint.

The Cartan Invariants of SL$(3, p^n)$

By Ye Jia-chen (叶家琛)

Abstract

Let $G=SL(3,K)$ be a simply connected, semi-simple aigebraic group of type A_2 over an algebraically closed field K of characteristic $p>0$. Let $\Gamma_n=SL(3,p^n)$ be a finite subgroup consisting of fixed points of the Frobenius morphism F^n of G.

In this paper, a method for computing the Cartan invariants of Γ_n for $p>3$ is given and the Cartan matrix of $SL(3,7)$ is computed. We mainly deal with Γ_1 and find the $K\Gamma_1$-composition factors of each principal indecomposable $K\Gamma_1$-module $R_{\lambda,1}$ $(\lambda\epsilon\Lambda_1)$ by the following way: It is known that the principal indecomposable $\underline{u}_1$-module $Q_{\lambda,1}$ has a G-module structure, we first prove that it has a G-module filtration with quotients isomorphic to Weyl modules and give a general description of its quotients (§1.4. Theorem 3). Next we write general expressions of decomposition of $Q_{\lambda,1}$ into G-composition factors and $\underline{u}_1$-composition factors (§4.5. Theorem 10 and Theorem 11). Using deformation we obtain all $K\Gamma_1$-composition factors of $Q_{\lambda,1}$ (§1.6.). Since the restriction of $Q_{\lambda,1}$ to $K\Gamma_1$ is still projective, it can be written as a direct sum principal indecomposable $K\Gamma_1$-modules, we thus obtain all $K\Gamma_1$-composition factors of $R_{\lambda,1}$. We further show how to generalize our method to compute the $K\Gamma_n$-composition factors of $R_{\lambda,n}$ for all $\lambda\epsilon\Lambda_n$(§2.) and describe the behaviours of $K\Gamma_n$-composition factors of $R_{\lambda,n}$ when λ is in a general position in Λ_n (§3.).