1982年　第2卷　第4期
Vol.2,　No.4,　1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

左 R-n 模的范畴与 Hom 函子*

于永溪

（大连工学院）

正合列问题是同调代数的基本问题之一。在 Abel 范畴的同调代数中，先有核的概念再讨论正合列的概念。但，因 n-予加法范畴不具有零对象，欲讨论正合列[1]，对其引进拟核。本文对左 R-n 模的范畴 ${}_R\mathrm{M}^l_n$ 讨论了与拟核相应的正合列；把 Hom 函子推广到 ${}_R\mathrm{M}^l_n$ 上，讨论了它关于拟正合列、弱双积、正向系统的正向极限的不变性。至于对带终对象的范畴的正合列的讨论我们将在[2]中进行。

本文符号沿用[1]与[3]。

引理 1　对任何交换 n－群 G，设 $\alpha_i\in$ G，$i=1$，$\cdots$，n，则 $\overline{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}=\bar{\alpha}_1+\cdots+\bar{\alpha}_n$。

证明　我们有

$$\underbrace{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)+\cdots+(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}_{n-1}+\overline{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}=(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)\text{，而}$$

$$\underbrace{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)+\cdots+(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}_{n-1}+(\bar{\alpha}_1+\cdots+\bar{\alpha}_n)=(\underbrace{\alpha_1+\cdots+\alpha_1}_{n-1}+\bar{\alpha}_1)+\cdots+(\underbrace{\alpha_n+\cdots+\alpha_n}_{n-1}+\bar{\alpha}_n)=\alpha_1+\cdots+\alpha_n\text{。}$$

由“—”的唯一性知 $\bar{\alpha}_1+\cdots+\bar{\alpha}_n=\overline{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$。又有

命题 2　设 G 为交换 n-群，则 $\tilde{G}=\{\alpha|\alpha=\bar{\alpha},\ \alpha\in \mathrm{G}\}$ 为 n-子群。

一切左 R-n 模及其间的 R-n 模同态组成一个范畴，记为 ${}_R\mathrm{M}^l_n$。当 $n=2$ 时，${}_R\mathrm{M}^l_2$ 为通常的环模范畴 M^r_R（[4]P. 43）。

一个元素组成的 n-群 $\{g\}$，按 $rg=g(r\in\mathrm{R})$ 为左 R-n 模。对 ${}_R\mathrm{M}^l_n$ 的任一对象 M，令 φ: $M\to\{g\}$: $\forall m\in M$，$m\longmapsto g$，φ 为 R-n 模同态，故 $\{g\}$ 为 ${}_R\mathrm{M}^l_n$ 的终对象，显然为拟零的。

命题 3　${}_R\mathrm{M}^l_n$ 为 n-予加法范畴

证明　设 $M_1, M_2\in ob_R\mathrm{M}^l_n$，$f\in[M_1, M_2]$，$m\in M_1$，令 $\bar{f}(m)=\overline{f(m)}$，参看[1]命题 3.2 的证明，现只需证 $\bar{f}(rm)=r\bar{f}(m)$，$r\in R$。

因 $(\underbrace{f(m),\cdots,f(m)}_{n-2},\bar{f}(m))$ 为 $(n-1)$—价单位元，故对任意的 $m_2\in M_2$，$m_2=m_2$

---

*1981年 8 月22日收到。

$+\underbrace{f(m)+\cdots+f(m)}_{n-2}+\bar{f}(m)$，从而 $rm_2=rm_2+rf(m)+\cdots+rf(m)+r\bar{f}(m)$，故 $r\bar{f}(m)=\overline{rf(m)}$ $=\overline{f(rm)}=\bar{f}(rm)$，$\bar{f}\in[M_1M_2]$。

命题 4 设 M 为 R-n 模，则 $\widetilde{M}=\{m\mid m\in M$ 且独点集 $\{m\}$ 为 R-n 子模$\}$ 为 R-n 子模且 $\widetilde{M}\neq\phi$*)。

证明 设 $m_1,\cdots,m_n\in\widetilde{M}$，则 $\overline{m_1+\cdots+m_n}=\bar{m}_1+\cdots+\bar{m}_n$（引理 1）$=m_1+\cdots+m_n$；又有 $r(m_1+\cdots+m_n)=rm_1+\cdots+rm_n=m_1+\cdots+m_n$，故 $(m_1+\cdots+m_n)\in\widetilde{M}$。$m\in\widetilde{M}$。则 $rm=m\in\widetilde{M}$，于是，$\widetilde{M}$ 为 R-n 子模。

命题 5 设 M_1,M_2 为 R-n 模，$f: M_1\to M_2$ 为 R-n 模同态，则

非空的 $f^{-1}(m_2)$ 为 R-n 子模 $\Leftrightarrow m_2\in\widetilde{M}_2$ 且 $f^{-1}(m_2)\neq\phi$。

证 $\Rightarrow$：设 $m_1\in f^{-1}(m_2)$，则 $\bar{m}_1\in f^{-1}(m_2)$，故 $f(\bar{m}_1)=\overline{f(m_1)}=\bar{m}_2$ 且 $f(\bar{m}_1)=m_2$，于是 $m_2=\bar{m}_2$。又 $am_1\in f^{-1}(m_2)$，故 $f(am_1)=af(m_1)=am_2=m_2$。从而，$\{m_2\}$ 为 R-n 子模。

$\Leftarrow$：设 $m_1^{(1)},\cdots,m_1^{(n)}\in f^{-1}(m_2)$，则 $f(m_1^{(1)}+\cdots+m_1^{(n)})=m_2$，故 $m_1^{(1)}+\cdots+m_1^{(n)}\in f^{-1}(m_2)$。设 $m_1\in f^{-1}(m_2)$，则 $f(\bar{m}_1)=\overline{f(m_1)}=\bar{m}_2=m_2$，故 $\bar{m}_1\in f^{-1}(m_2)$。又 $f(rm_1)=rf(m_1)=rm_2=m_2$，故 $rm_1\in f^{-1}(m_2)$。从而，$f^{-1}(m_2)$ 为 R-n 子模。证毕。

对 AG_{r_n} 有全完类似的事实：

命题 5′ 设 G_1,G_2 为交换 n-群，$f:G_1\to G_2$ 为 n-群同态，则

非空的 $f^{-1}(g_2)$ 为 n-子群 $\Leftrightarrow g_2\in\tilde{G}_2$ 且 $f^{-1}(g_2)\neq\phi$。

命题 6 ${}_R\mathrm{M}_n^!$ 满足条件 $(E)\Leftrightarrow\forall M\in ob_R\mathrm{M}_n^!$，$M$ 满足条件 (E)，即 $m\in M$ 蕴涵 $\overline{(\bar{m})}=m$。

证 $\Rightarrow$：由条件 (E)，恒等映射 $id_M:M\to M$ 满足 $\overline{\overline{id}}_M=id_M$。由[1]命题 3.2 的证明过程知下面的运算是合理的：

$$\forall m\in M,\ \overline{\overline{id}}_M(m)=\overline{\overline{id}_M(m)}=\overline{\overline{id_M(m)}}=\bar{\bar{m}}.$$

又 $\overline{\overline{id}}_M(m)=id_M(m)=m$，故 $m=\bar{\bar{m}}$。

$\Leftarrow$：设 $h\in[M_1,M_2]$。有下面的运算：

$$\forall m_1\in M_1,\ \bar{\bar{h}}(m_1)=\overline{\bar{h}(m_1)}=\overline{\overline{h(m_1)}}=h(m_1).$$

故 $\bar{\bar{h}}=h$。

命题 6′ AG_{r_n} 满足条件 $(E)\Leftrightarrow\forall G\in obAG_{r_n}$，$G$ 满足条件 (E)，即 $g\in G$ 蕴涵 $g=\overline{(\bar{g})}$。

(*)存在 $b_0\in\tilde{B}$ 使对每个 $m_\alpha\in\widetilde{M}_\alpha$ 有 $\pi_\alpha(m_\alpha)=b_0$。

[3]中定义 2.4 对 ${}_R\mathrm{M}_n^!$ 应为

定义 7 设 $(M_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ 为 R-n 模之族（$\forall\alpha\in\Gamma,\widetilde{M}_\alpha\neq\phi$）。$(M,(i_\alpha:M_\alpha\to M)_{\alpha\in\Gamma})$ 称为该族的弱上积，若对每个满足(*)的 $(\mathrm{B},(\pi_\alpha:M_\alpha\to\mathrm{B})_{\alpha\in\Gamma})$ 恒存在唯一的 R-n 模同态 $\eta:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ 使对每个 $\alpha\in\Gamma$ 有 $\eta i_\alpha=\pi_\alpha$。

在 AG_{r_n} 中有完全类似的定义。

---

*) 吴利生告诉作者：$\widetilde{M}=\{om:m\in M\}$，从而 $\widetilde{M}\neq\phi$ 在此向他表示衷心感谢。

仿熟知的方法（[4]pp.18—20）可证

命题 8　对任意的 R-n 模之族，恒存在其积；对任意的交换 n-群之族，恒存在其积。

又易证

命题 9　在 ${}_R\mathbf{M}_n^f$ 中，任 $s(n-1)+1$ 个对象总有弱上积。

在 AGr_n 中有完全相同的事实。

命题 10　在 ${}_R\mathbf{M}_n^f$ 中，$f:M_1\to M_2$ 有拟核 $\Longleftrightarrow \exists m_2\in\widetilde{M}_2$ 使 $f^{-1}(m_2)\neq\phi$。

证　$\Rightarrow$：设 $u:M\to M_1$ 为 f 的拟核，有曳后图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sigma} & \{m_0\} \\ u\downarrow & & \downarrow h \\ M_1 & \xrightarrow[f]{} & M_2 \end{array} \quad . \qquad (**)$$

令 $h(m_0)=m_2^0$，则 $h^{-1}(m_2^0)=\{m_0\}$ 为 R-n 模。由命题 5，$m_2^0\in\widetilde{M}_2$。又有 $\mathrm{Im}(u)\subset f^{-1}(m_2^0)\neq\phi$。

$\Leftarrow$：设 $m_2\in\widetilde{M}_2$ 使 $f^{-1}(m_2)\neq\phi$，由命题 5，$f^{-1}(m_2)$为 R-n 模，$f^{-1}(m_2)\in ob_R\mathbf{M}_n^f$。明显地图

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(m_2) & \xrightarrow{\sigma} & \{m_0\} \\ \text{包含映射 } id_{f^{-1}(m_2)}\downarrow & & \downarrow h. \quad (h(m_0)=m_2) \\ M_1 & \xrightarrow[f]{} & M_2 \end{array}$$

为 ${}_R\mathbf{M}_n^f$ 中的曳后图。证毕。

注意　由[1]定理 2.5，当 u 为 f 的拟核时，不妨设 $u:f^{-1}(m_2)\to M_1$，u 有唯一的侧面h。再由[1]定理 3.8，当 ${}_R\mathbf{M}_n^f$ 满足条件(E)时(如 $n=3$)，$\bar{u}$ 也具有唯一的侧面 h，由曳后在同构意义下的唯一性，u 与 $\bar{u}$ 是同构的。而映射 $I:f^{-1}(m_2)\to f^{-1}(m_2):m_1\longmapsto\overline{m}_1$ 为同构态。事实上，首先由引理 1 知 I 为 R-n 模同态（$\overline{rm}_1=r\overline{m}_1$ 是容易验证的，如参看[1]引理 3.5 的证法.）；又 $II(m_1)=\bar{\bar{m}}_1=m_1$（由命题 6），故 $II=id_{f^{-1}(m_2)}$。从而 I 为同构态且 $uI=\bar{u}$。

类似地有

命题 11　在 AGr_n 中，$f:G_1\to G_2$ 有拟核 $\Longleftrightarrow \exists g_2\in\widetilde{G}_2$ 使 $f^{-1}(g_2)\neq\phi$。

命题 12　在 ${}_R\mathbf{M}_n^f$ 中，设 $f:M_1\to M_2$，则 $\bigcup\limits_{m_2\in\widetilde{M}_2}f^{-1}(m_2)$为$R$-$n$子模且不计同构态时$\mathrm{QK}^F(f)=\{id_{f^{-1}(m_2)}\}_{m_2\in\widetilde{M}_2}$。

证　设 $m_1^{(1)},\cdots,m_1^{(n)}\in\bigcup\limits_{m_2\in\widetilde{M}_2}f^{-1}(m_2)$，则 $f(m_1^{(1)}+\cdots+m_1^{(n)})=f(m_1^{(1)})+\cdots+f(m_1^{(n)})=m_2^{(1)}+\cdots+m_2^{(n)}=m_2$，由$\widetilde{M}_2$为$R$-$n$子模（命题4）知$m_2\in\widetilde{M}_2$，故$m_1^{(1)}+\cdots+m_1^{(n)}\in\bigcup\limits_{m_2\in\widetilde{M}_2}f^{-1}(m_2)$。

又设$m_1\in\bigcup\limits_{m_2\in\widetilde{M}_2}f^{-1}(m_2)$，则$\forall r\in R$有$f(rm_1)=rf(m_1)=rm_2=m_2\in\widetilde{M}_2$，故$rm_1\in\bigcup\limits_{m_2\in\widetilde{M}_2}f^{-1}(m_2)$；$f(\overline{m}_1)=f(\overline{m_1})=\overline{m}_2=m_2$，$m_2\in\widetilde{M}_2$，故 $rm_1\in\bigcup\limits_{m_2\in\widetilde{M}_2}f^{-1}(m_2)$。于是，$\bigcup\limits_{m_2\in\widetilde{M}_2}f(m_2)$为 R-n 模。

当 u 为 f 的拟核时，u 有唯一的侧面 h，参看曳后图(**)，令$h(m_0)=m_2^0$，则 u 与包

含映射 $id_{f^{-1}(m_2^0)}: f^{-1}(m_2^0) \to M_1$ 是同构的，另一方面命题 10 的充分部分的证明中又指出 $\forall m_2 \in \widetilde{M}_2$，$id_{f^{-1}(m_2)}$ 为 f 的拟核，故不计同构态时 $QK^F(f) = \{id_{f^{-1}(m_2)}\}_{m_2 \in \widetilde{M}_2}$。证毕。

类似地有

命题 13 在 AG_{rn} 中，设 $f: G_1 \to G_2$，则 $\bigcup_{g_2 \in \widetilde{G}_2} f^{-1}(g_2)$ 为 n-子群且不计同构的态，$QK^F(f) = \{id_{f^{-1}(g_2)}\}_{g_2 \in \widetilde{G}_2}$。

易知有命题甲：在 ${}_R\mathbf{M}_n^l$ 中，设 $f \in [M_1, M_2]$ 则

$$f \in \widetilde{[M_1, M_2]} \Leftrightarrow \forall m_1 \in M_1 \quad f(m_1) \in \widetilde{M}_2{}^*;$$

在 AG_{rn} 中，设 $f \in [G_1, G_2]$，则

$$f \in \widetilde{[G_1, G_2]} \Leftrightarrow \forall g_1 \in G_1 \quad f(g_1) \in \widetilde{G}_2,$$

其中 $\widetilde{M}_2^* = \{m_2 \mid m_2 = \overline{m}_2, \overline{m}_2 \in M_2\}$。

定义 14 在 ${}_R\mathbf{M}_n^l$ 中，态的序列 $M_1 \xrightarrow{g} M_2 \xrightarrow{f} M_3$ 称为在 M_2 处全正合，若 $\mathrm{Im}(g) = \bigcup_{m_3 \in \widetilde{M}_3} f^{-1}(m_3)$。若对某个 $m_3 \in \widetilde{M}_3$ 有 $\mathrm{Im}(g) = f^{-1}(m_3)$，则说该序列在 M_2 处关于 m_3 分量正合。AG_{rn} 中态列的正合性可类似地定义。

仿[4]P.16 可定义函子 Hom$(M, —)$ 与 Hom$(—, M)$。下面使用的符号为([4]P.16)：

$$M' \xrightarrow{\varepsilon} M_0 \xrightarrow{\mu} M'' \quad (M', M_0, M'' \in ob_R\mathbf{M}_n^l),$$

$$\mathrm{Hom}\,(M, M') \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}(M, M_0) \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}(M, M''), \tag{1}$$

$$\mathrm{Hom}(M'', M) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}(M_0, M) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}(M', M). \tag{2}$$

命题 15 μ 与 μ_* 皆有拟核。

证 取定 $\widetilde{m} \in \widetilde{M}_0$，则 $\mu(\widetilde{m}) = m'' \in \widetilde{M}''$，故由命题 10 知 μ 有拟核.做映射 $g: M \to M''$；$\forall m \in M \quad m \longmapsto m''$。显然 $g \in [M, M'']$.因 $g(m) = m'' \in \widetilde{M}'' \subset \widetilde{M}''^*$，故 $g \in \widetilde{[M, M'']}$。做 φ：$M \to M_0$：$\forall m \in M \quad m \longmapsto \widetilde{m}$。$\varphi \in [M, M_0]$且 $\mu\varphi = g$。由命题 11 知 μ_*有拟核。

命题 16 当 ${}_R\mathbf{M}_n^l$ 满足条件(E)时，若态列

$$\{m'\} \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{f} M''$$

在 M 处全正合或分量正合，则 f 为单的。

对 AG_{rn} 有完全相同的命题。

证 今就全正合情况讨论，分量正合的讨论是类似的。因 $\mathrm{Im}(\psi) = \bigcup_{m'' \in \widetilde{M}''} f^{-1}(m'')$，而 $\mathrm{Im}(\psi) = \psi(m') = m \in \widetilde{M}$，故 $\widetilde{M}'' = \{f(m) = m''\}$ 且 $f^{-1}(m'') = \{m\}$。于是，$f(m_1) = f(m)$ 蕴涵 $m_1 = m$。

今设 $f(m_2) = f(m_3)$，由

$$\underbrace{f(m_2) + \cdots + f(m_2)}_{n-2} + \overline{f(m_3)} + f(m) = f(m)$$

得

$$f(\underbrace{m_2 + \cdots + m_2}_{n-2} + \overline{m}_3 + m) = f(m).$$

从而，$m_2+\cdots+m_2+\overline{m}_3+m=m$。由"—"的唯一性，$\overline{m}_3=\overline{m}_2$。再由条件$(E)$据命题 6 知 $m_2=m_3$。证毕。

显然，在 ${}_R\mathrm{M}_n^I$ 中，态列

$$\{m'\}\xrightarrow{\psi}M\rightarrowtail\!\xrightarrow{f}M''$$

在M处关于 $f(\psi(m'))$分量正合。在 AG_{r_n} 中有相同的事实。

定义 17　在 AG_{r_n} 中，态列 (1)

$\mathrm{Hom}(M_0,M')\xrightarrow{g_*}\mathrm{Hom}(M_0,M)\xrightarrow{f_*}\mathrm{Hom}(M_0,M'')$称为拟全正合的，若

$$\mathrm{Im}(g_*)=\widetilde{QK}(f_*)=\bigcup_{\varphi\in\tilde{F}}f_*^{-1}(\varphi),$$

其中 $\tilde{F}=\{\varphi|\varphi:M_0\to M'':\forall m_0\in M_0,\ \varphi(m_0)\in\widetilde{M}''\}$。(1)称为关于 φ 拟分量正合的，若

$$\mathrm{Im}(g_*)=f_*^{-1}(\varphi),\ 其中\ \varphi\in\tilde{F}。$$

态列(2)的拟正合性可类似地定义。

在 ${}_R\mathrm{M}_n^I$ 中，设有 $M_1\xrightarrow{g}M_2$．在M_1中介定关系～如下：

$$m_1^{(1)}\sim m_1^{(2)}\Leftrightarrow g(m_1^{(1)})=g(m_1^{(2)}),$$

显然，～为等价关系．记 m_1 所在的等价类为$[m_1]$，$M_1/\sim$依下列运算为R-n 模：

$$[m_1^{(1)}]+\cdots+[m_1^{(n)}]=[m_1^{(1)}+\cdots+m_1^{(n)}];$$

$$a[m_1]=[am_1]。$$

定理 18　在 ${}_R\mathrm{M}_n^I$ 中，若

$$M_1\xrightarrow{g}M_2\xrightarrow{f}M_3$$

为全（关于 $m_3\in\widetilde{M}_3$ 分量）正合列，则对任何 $M\in ob_R\mathrm{M}_n^I$，有拟全（关于 $P(P:M\to M_3:m\longmapsto m_3)$分量）正合列

$$\mathrm{Hom}(M,M_1/\sim)\rightarrowtail\!\xrightarrow{\tilde{g}_*}\mathrm{Hom}(M,M_2)\xrightarrow{f_*}\mathrm{Hom}(M,M_3).$$

其中 $\tilde{g}:M_1/\sim\to M_2:[m_1]\longmapsto g(m.)$。

证　我们只对全正合情况进行讨论．容易知道，$\tilde{g}\in[M_1/\sim,\ M_2]$，$\tilde{g}_*$，$\tilde{g}$ 为单的且 $\mathrm{Im}(\tilde{g})=\mathrm{Im}(g)$。

考察图（任取 $\psi\in[M,M_1/\sim]$）

$$\begin{tikzcd}
M_1/\sim \arrow[r, "\tilde{g}"] & M_2 \arrow[r, "f"] & M_3 \\
& M \arrow[ul, "\psi"] \arrow[u, dashed, "\tilde{g}\psi"] \arrow[ur, dashed, "f\tilde{g}\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

令 $f\tilde{g}\psi(m)=m_3$，则$m_3\in\widetilde{M}_3$。从而，$\mathrm{Im}(\tilde{g}_*)\subset\widetilde{QK}(f_*)$。

设 $h: M\to M_2$, $h\in \widetilde{QK(f_*)}$，考察图

$$\begin{tikzcd}
M_1/\sim \arrow[r, "\tilde{g}"] & M_2 \arrow[r, "f"] & M_3 \\
& M \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "fh"'] &
\end{tikzcd}$$

已知 $\forall m\in M$, $fh(m)\in \widetilde{M}_3$. 定义 $\psi: M\to M_1/\sim: m\longmapsto \tilde{g}^{-1}(h(m))$. 因 $\forall m\in M$ 有 $h(m)\in \bigcup\limits_{m_3\in \widetilde{M}_3} f^{-1}(m_3)=\mathrm{Im}(\tilde{g})$, $\tilde{g}^{-1}(h(m))$ 是非空的．又由 $\tilde{g}$ 的单性知 $\tilde{g}^{-1}(h(m))$ 为独点集，故 ψ 是有意义的．

当 $m^{(1)},\cdots,m^{(n)}\in M$ 时，$\psi(m^{(1)}+\cdots+m^{(n)})=\tilde{g}^{-1}(h(m^{(1)}+\cdots+m^{(n)}))=\tilde{g}^{-1}(h(m^{(1)})+\cdots+h(m^{(n)}))$. 若 $\tilde{g}^{-1}(h(m^{(i)}))=[m_1^{(i)}]$, $i=1,\cdots,n$, 则

$\tilde{g}([m_1^{(1)}+\cdots+m_1^{(n)}])=\tilde{g}([m_1^{(1)}]+\cdots+[m_1^{(n)}])=\tilde{g}([m_1^{(1)}])+\cdots+\tilde{g}([m_1^{(n)}])=h(m^{(1)})+\cdots+h(m^{(n)})$, 故

$\psi(m^{(1)}+\cdots+m^{(n)})=[m_1^{(1)}+\cdots+m_1^{(n)}]=[m_1^{(1)}]+\cdots+[m_1^{(n)}]=\tilde{g}^{-1}(h(m^{(1)}))+\cdots+\tilde{g}^{-1}(h(m^{(n)}))=\psi(m^{(1)})+\cdots+\psi(m^{(n)})$.

$$\forall r\in R, m\in M \quad \psi(rm)=\tilde{g}^{-1}(h(rm)).$$

今 $\tilde{g}(r\psi(m))=r\tilde{g}(\psi(m))=rh(m)=h(rm)$, 从而 $\psi(rm)=r\psi(m)$. 故 $\psi\in[M, M_1/\sim]$. 明显地 $\tilde{g}\psi=h$, 故 $\widetilde{QK(f_*)}=\mathrm{Im}(g_*)$. 证毕．

推论 19 若在 ${}_R\mathrm{M}_n^!$ 中态列

$$M_1\overset{g}{\rightarrowtail}M_2\overset{f}{\to}M_3$$

全（关于 m_3 分量）正合，则有拟全（关于 p ($p: M\to M_3: m\longmapsto m_3$) 分量）正合列

$$\mathrm{Hom}(M,M_1)\overset{g_*}{\rightarrowtail}\mathrm{Hom}(M,M_2)\overset{f_*}{\longrightarrow}\mathrm{Hom}(M,M_3).$$

当 $n=2$ 时，本推论为[4]P.17 定理 2.1.

定理 20 在 ${}_R\mathrm{M}_n^!$ 中，若

$$M_1\overset{g}{\to}M_2\overset{f}{\to}M_3$$

全（关于 m_3 分量）正合，则当 $\widetilde{M}$ 为独点集时有拟全正合列

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Im}(f),M)\overset{f^*}{\rightarrowtail}\mathrm{Hom}(M_2,M)\overset{g^*}{\longrightarrow}\mathrm{Hom}(M_1,M).$$

证 我们就全正合情况讨论，关于 m_3 分量正合情况的讨论是类似的．

易知，$\mathrm{Im}(f)$ 为 R-n 模．我们首先证明：

对任意的 $m_3\in \mathrm{Im}(f)$，任取 $n_3\in \widetilde{M}_3$，任取 $a\in f^{-1}(m_3)$，有

$$f^{-1}(m_3)=\{a+b_1+\cdots+b_{n-1}\,|\,b_i\in f^{-1}(n_3)\}.$$

事实上，$f(a+b_1+\cdots+b_{n-1})=f(a)+f(b_1)+\cdots+f(b_{n-1})=m_3+\underbrace{n_3+\cdots+n_3}_{n-1}=m_3$. 故

$a+b_1+\cdots+b_{n-1}\in f^{-1}(m_3)$，另一方面，若 $b\in f^{-1}(m_3)$，取 $b_1,\cdots,b_{n-2}\in f^{-1}(n_3)$，存在唯一的 $c\in M_2$ 使 $b=a+b_1+\cdots+b_{n-2}+c$(见[5]定理 1.4(3))。故有

$$f(b)=f(a)+f(b_1)+\cdots+f(b_{n-2})+f(c)=f(a)\ \underbrace{+n_3+\cdots+n_3}_{n-2}+f(c),$$

于是，

$$m_3=m_3+\underbrace{n_3+\cdots+n_3}_{n-2}+f(c).$$

由“-”的唯一性，$f(c)=\bar{n}_3=n_3$。这样一来，令 $b_{n-1}=c$ 得

$$b=a+b_1+\cdots+b_{n-2}+b_{n-1}.$$

其中 $b_1,\cdots,b_{n-1}\in \widetilde{f^{-1}(n_3)}$。断言得证。

今任取 $\varphi\in QK(g^*)$考察图

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xrightarrow{g} & M_2 & \xrightarrow{f} & M_3 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\ & & M & & \end{array}.$$

今任取 $m_1\in M_1$ 有$\varphi g(m_1)\in\widetilde{M}$，这是因为$\varphi\in\widetilde{QK(g^*)}$。从而，$\mathrm{Img}=\bigcup_{\widetilde{m}_3\in\widetilde{M}_3}f^{-1}(\widetilde{m}_3)\subset\bigcup_{\widetilde{m}\in\widetilde{M}}\varphi^{-1}(\widetilde{m})$。对任意的 $m_3\in\mathrm{Im}(f)$，$f^{-1}(m_3)=\{a+b_1+\cdots+b_{n-1}|b_i\in f^{-1}(n_3)\}$，其中 $a\in f^{-1}(m_3)$，$n_3\in\widetilde{M}_3$，而 $b_i\in f^{-1}(n_3)\subset\bigcup_{\widetilde{m}_3\in\widetilde{M}_3}f^{-1}(\widetilde{m}_3)\subset\bigcup_{\widetilde{m}\in\widetilde{M}}\varphi^{-1}(\widetilde{m})$。于是，$\varphi(b_1)=\cdots=\varphi(b_{n-1})\in\widetilde{M}$，这是因为$\widetilde{M}$为独点集。这样一来，有

$$\varphi(f^{-1}(m_3))=\{\varphi(a)+\varphi(b_1)+\cdots+\varphi(b_{n-1})\}=\{\varphi(a)\}.$$

令 $\psi:\mathrm{Im}(f)\to M:m_3\longmapsto\varphi(a)$设 $m_3^{(1)},\cdots,m_3^{(n)}\in\mathrm{Im}(f)$，$a_i\in f^{-1}(m_3^{(i)})$，$i=1,\cdots,n$，则 $f(a_1+\cdots+a_n)=m_3^{(1)}+\cdots+m_3^{(n)}$。故$\varphi(a_1+\cdots+a_n)=\psi(m_3^{(1)}+\cdots+m_3^{(n)})$，今$\varphi(a_1+\cdots+a_n)=\varphi(a_1)+\cdots+\varphi(a_n)$。故

$$\psi(m_3^{(1)}+\cdots+m_3^{(n)})=\psi(m_3^{(1)})+\cdots+\psi(m_3^{(n)}).$$

又设 $r\in R$，令 $a\in f^{-1}(m_3)$，则 $ra\in f^{-1}(rm_3$ 。于是，$\psi(rm_3)=\varphi(ra)=r\varphi(a)=r\psi(m_3)$。

这样一来，我们已经证明 $\psi\in[\mathrm{Im}(f),M]$。

由 ψ 的定义知 $\psi f=\varphi$，从而$\widetilde{QK(g^*)}\subset\mathrm{Im}(f^*)$。

另一方面，任取 $\psi\in[\mathrm{Im}(f),M]$，则 $\psi f:M_2\to M$ 且对任意的 $m_1\in M_1$ 有

$$\psi f(g(m_1))=\psi((fg)(m_1))=\psi(m_3),\quad m_3\in\widetilde{M}_3.$$

于是，$\psi f(g(m_1))\in\widetilde{M}$。从而 $\psi f\in\widetilde{QK(g^*)}$。我们已经证明 $\mathrm{Im}(f^*)\subset\widetilde{QK(g^*)}$。

这样一来，所要的拟正合性得证。

最后，$f^*:[\mathrm{Im}(f),M]\to[M_2,M]$的单性是 $f:M_2\to\mathrm{Im}(f)$ 的满性的必然结果，至此命题全部得证。

命题 21 函子 $\mathrm{Hom}(M,—)$保持弱双积且为加法的。

证 弱双积及函子的加法性见[3]。

任取 $M_1,M_2\in ob_R\mathrm{M}_n^l$；$f_1,\cdots,f_n\in[M_1,M_2]$。等式

$$\mathrm{Hom}(M,\sum_{i=1}^{n}f_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Hom}(M,f_i) \tag{e}$$

是明显地成立的。

设在 ${}_R\mathrm{M}_n^!$ 中，$\{M_j\}_{j\in\Gamma}$ 有弱双积$(B,(i_j,p_j))$，$\Gamma=\{1,\cdots,S(n-1)+1\}$。易知 $p_{j*}i_{j*}={}_{[M,M_j]}$，又由式$(e)$知 $\sum\limits_{j=1}^{S(n-1)+1} i_{j*}p_{j*}=\mathbf{1}_{[M,B]}$。当 $j\neq k$ 时，设 $p_ki_j=h_k\alpha_j$，其中 $\alpha_j:M_j\to\{m_0\}$，$\{m_0\}$ 为 ${}_R\mathrm{M}_n^!$ 中的终对象，$h_k:\{m_0\}\to M_k,\bar{h}_k=h_k$（见[3]引理1.2)。此时$[M,\{m_0\}]=\{u\}$为 AG_{r_n} 的终对象。今有$(p_ki_j)_*=p_{k*}i_{j*}=h_{k*}\alpha_{j*}$，而 $\alpha_{j*}:[M,M_j]\to\{u\}$，$h_{k*}:\{u\}\to[M,M_k]$，$\overline{(h_{k*})}=h_{k*}$(由$\{u\}$为 n-群知)。于是，$([M,B],(i_{j*},p_{j*}))$为$\{[M,M_j]\}_{j\in\Gamma}$的弱双积。上面的讨论同时也证明了函子的加法性。证毕。

定义 22 在 ${}_R\mathrm{M}_n^!$ 中，若 $M_k\underset{p_k}{\overset{i_k}{\rightleftarrows}}M$ $(k=1,\cdots,S(n-1)+1)$ 为弱双积图且$\widetilde{M}^*=\widetilde{M}$为独点集，则说该弱双积图为强双积图。其中 $\widetilde{M}^*=\{m\mid m=\bar{m},m\in M\}$(见命题甲)。

应注意命题乙：设 $M\in ob_R\mathrm{M}_n^!$，则M满足条件(0)$\Leftrightarrow\widetilde{M}$为独点集$\Leftrightarrow[\{m_0\},M]$为独点集，$\{m_0\}$为 ${}_R\mathrm{M}_n^!$ 的终对象。

事实上，不难由[3]引理 1.2 知:M 满足条件(0)$\Leftrightarrow[\{m_0\},M]$为独点集。而 $\widetilde{M}$为独点集$\Leftrightarrow[\{m_0\},M]$为独点集是明显的。

命题乙对 AG_{r_n} 也成立。

命题 23 函子 $Hom(M,-)$把强双积变成双积。

证 有了命题 21，只需证明：当 $B\in ob_R\mathrm{M}_n^!$ 且 $\widetilde{B}^*=\widetilde{B}=$ 独点集时，$[M,B]$ 满足条件(0)。

事实上，有了命题乙只需证明：$\widetilde{[M,B]}$为独点集。由命题甲知 $f\in\widetilde{[M,B]}\Leftrightarrow\forall m\in M$ $f(m)\in\widetilde{B}^*$。由于$\widetilde{B}_*$为独点集，使 $f(m)\in\widetilde{B}^*$的 f 是唯一的。从而，$\widetilde{[M,B]}$为独点集。证毕。

命题 24 当$\widetilde{M}$为独点集时，函子 Hom$(-,M)$ 保持弱双积且为加法的，当 $\widetilde{M}=\widetilde{M}^*$ 为独点集时把弱双积变成双积。

证 任取 $M_1,M_2\in ob_R\mathrm{M}_n^!$；$f_1,\cdots,f_n\in[M_1,M_2]$。等式

$$Hom(\sum_{i=1}^{n}f_i,M)=\sum_{i=1}^{n}Hom(f_i,M) \tag{e'}$$

是明显地成立的。下面的符号参看命题21证明中所使用的。

$$\begin{tikzcd} M_k \arrow[rr, "\alpha_k"] \arrow[dr, "f\alpha_k"'] & & \{m_0\} \arrow[dl, "f"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

首先，当$\widetilde{M}$为独点集时，$[\{m_0\},M]$为 AG_{r_n} 中的终对象。其次，我们只需证明

$$\alpha_k^*\in\widetilde{[[\{m_0\},M],[M_k,M]]}. \tag{d}$$

设$[\{m_0\},M]=\{f\}$。考察右图，

今 $\forall m_k\in M_k$，$f\alpha_k(m_k)=f(m_0)\in\widetilde{M}\subset\widetilde{M}^*$，故由命题甲知$f\alpha_k\in\widetilde{[M_k,M]}$。而$f\alpha_k=\alpha_k^*(f)$，

故再由命题甲知式(d)得证．于是，Hom(—, M)保持弱双积．式(e')及上述讨论同时也证明了函子的加法性．

现设 $\widetilde{M}=\widetilde{M}^*$为独点集．任取 $N\in ob_R M_n^l$，欲证$[N,M]$满足条件(0)．由命题乙只需证$\widetilde{[N,M]}$为独点集．事实上，由命题甲知

$$t\in\widetilde{[N,M]}\Leftrightarrow \forall n\in N\quad t(n)\in\widetilde{M}^*.$$

这样的 t 因 $\widetilde{M}^*$为独点集只有唯一的一个．证毕．

容易知道，当$\{(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$为 R-n 模正向系统时，$\{(\mathrm{Hom}(M,M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},((\rho_{\alpha\beta})_*)_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$为 n-群的正向系统，$\{(\mathrm{Hom}(M_\alpha,M))_{\alpha\in\Lambda},((\rho_{\alpha\beta})^*)_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$为 n-群的反向系统；函子 Hom(M,—)将靶(target)变为靶，由右交换图知，函子 Hom (—, M)将靶变为反靶．其中，$(M_0,(\pi_\alpha:M_\alpha\to M_0)_{\alpha\in\Lambda})$ 为靶．当然，由 $\pi_\beta\rho_{\alpha\beta}=\pi_\alpha$ 知 $(\pi_\beta\rho_{\alpha\beta})^*=(\rho_{\alpha\beta})^*\pi_\beta^*=\pi_\alpha^*$，也得出上述事实．

$$\begin{tikzcd}
M_\alpha \arrow[r, "\pi_\alpha"] \arrow[d, "\rho_{\alpha\beta}"'] \arrow[dr, "h\pi_\alpha"] & M_0 \arrow[d, "h"] \\
M_\beta \arrow[r, "h\pi_\beta"'] \arrow[ur, "\pi_\beta"] & M
\end{tikzcd}$$

作为[3]定理3.2的推论，设$(M_0,(\pi_\alpha:M_\alpha\to M_0)_{\alpha\in\Lambda})$为 R-n 模的正向系统$\{(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$的靶，则$(\mathrm{Hom}(M,M_0),\ (\pi_\alpha^*)_{\alpha\in\Lambda})$为$\{(\mathrm{Hom}(M,M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},\ (\rho_{\alpha\beta}^*)_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$的正向极限的充要条件为

(i) $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathrm{Im}(\pi_\alpha^*)=[M,M_0]$；

(ii) $\pi_\alpha f_\alpha=\pi_\beta f_\beta\Leftrightarrow\exists r\in\Lambda\quad\ni\rho_{\alpha r}f_\alpha=\rho_{\beta r}f_\beta$.

其中，$f_\alpha\in[M,M_\alpha],f_\beta\in[M,M_\beta]$．

今设$(M_0,(\pi_\alpha:M_\alpha\rightarrowtail M_0))$为$\{(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$的靶，其中$\pi_\alpha:M_\alpha\rightarrowtail M_0$为单态，则条件(ii)是成立的．

事实上，设$\pi_\alpha f_\alpha=\pi_\beta f_\beta,f_\alpha\in[M,M_\alpha],f_\beta\in[M,M_\beta]$，则因存在 $r\in\Lambda$ 使 $\alpha\leqslant r$ 且 $\beta\leqslant r$ 有 $\pi_\alpha=\pi_r\rho_{\alpha r}$ 且 $\pi_\beta=\pi_r\rho_{\beta r}$ 知 $\pi_r\rho_{\alpha r}f_\alpha=\pi_r\rho_{\beta r}f_\beta$．再由 π_r 的单性知 $\rho_{\alpha r}f_\alpha=\rho_{\beta r}f_\beta$．

这样一来，函子Hom(M,—)保持正向极限$(M_0,(\pi_\alpha:M_\alpha\rightarrowtail M_0)_{\alpha\in\Lambda})$为正向极限的充要条件为

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathrm{Im}(\pi_\alpha^*)=[M,M_0].$$

现设$\{(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$为 R-n 模的正向系统，由[3]命题3.1存在其正向极限．正向极限为靶，故函子 Hom(—, M)将该正向极限变为反向系统$\{(\mathrm{Hom}(M_\alpha,M))_{\alpha\in\Lambda},((\rho_{\alpha\beta})^*)_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$的反靶．再由[3]命题3.3(注意：该命题对 n-群的反向系统也成立)，上反向系统恒有反向极限．

再令$(M_0,(\pi_\alpha:M_\alpha\to M_0)_{\alpha\in\Lambda})$为$\{(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},(\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$的正向极限，则有下面的事实：

$([M_0,M],(\pi_\alpha^*:[M_0,M]\to[M_\alpha,M])_{\alpha\in\Lambda})$为反向系统$\{(\mathrm{Hom}(M_\alpha,M))_{\alpha\in\Lambda},((\rho_{\alpha\beta})^*)_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$的反向极限的充要条件为

$$[M]_\infty(=\{(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}|\forall\alpha\leqslant\beta\quad f_\alpha=(\rho_{\alpha\beta})^*(f_\beta),f_\alpha\in[M_\alpha,M],f_\beta\in[M_\beta,M]\})$$
$$=\{(\pi_\alpha^*(f))_{\alpha\in\Lambda}|f\in[M_0,M]\}.$$

证　⇒：因反向极限在 n-群同构意义下是唯一的，故存在 n-群同构 $\tau:[M_0,M]\to[M]_\infty$ 使 $\forall\alpha\in\Lambda$，$\forall f\in[M_0,M]$，$\tau f=(\pi_\alpha^*(f))_{\alpha\in\Lambda}$．从而，$[M]_\infty\subset\{(\pi_\alpha^*(f))_{\alpha\in\Lambda}|f\in[M_0,M]\}$．

另一方面，$\forall f\in[M_0,M]$，$\forall\alpha,\beta:\alpha\leqslant\beta(\rho_{\alpha\beta})^*\pi_\beta^*(f)=\pi_\alpha^*(f)$，从而$(\pi_\alpha^*(f))_{\alpha\in\Lambda}\in[M]_\infty$. 必要性得证.

$\Leftarrow$:先证

$$(\pi_\alpha^*(f))_{\alpha\in\Lambda}=(\pi_\alpha^*(g))_{\alpha\in\Lambda}\Leftrightarrow f=g.$$

其中$f,g\in[M_0,M]$.

事实上，对$m_0\in M_0$恒存在$\alpha\in\Lambda$及$m_\alpha\in M_\alpha$使$\pi_\alpha(m_\alpha)=m_0$([3]定理3.2). 今设$\pi_\alpha^*(f)=\pi_\alpha^*(g)$，故$f\pi_\alpha=g\pi_\alpha$. 从而，$(f\pi_\alpha)(m_\alpha)=f(m_0)=(g\pi_\alpha)(m_\alpha)=g(m_0)$. 于是，$f=g$.

这样一来，令$\tau:[M_0,M]\to[M]_\infty: f\longmapsto(\pi_\alpha^*(f))_{\alpha\in\Lambda}$，则$\tau$为匹满的. 由$[M]_\infty$的$n$-群结构及$\pi_\alpha^*$为$n$-群同态知$\tau$为$n$-群同态. 从而$\tau$为$n$-群同构. 又$\forall f\in[M_0, M]$，$\tau f=(\pi_\alpha^*(f))_{\alpha\in\Lambda}$，故$\forall\alpha\in\Lambda$ $n_\alpha(\tau f)=\pi_\alpha^*(f)$. n_α的意义见[3]命题3.3. 从而，$n_\alpha\tau=\pi_\alpha^*$. 由于$([M]_\infty,(n_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$为反向极限，充分性得证.

参 考 文 献

[1] 于永溪，n-予加法范畴中的拟核，数学研究与评论，创刊号(1981)，P.7—15.

[2] 于永溪，关于广义正合列，尚未发表.

[3] 于永溪，n-予加法范畴中的弱上积与极限，数学研究与评论，Vol.2, No.3 (1982).

[4] Hilton, P. J. and Stammbach, U., A Course in Homological Algebra, New York--Heidelberg--Berlin: Springer 1971.

[5] Monk, J. D. and Sioson, F. M., On the general theory of m groups, *Fund. Math.*, 72(1971), P. 233-244.

Category of the Left R-n Modules and Hom Functor

By Yu Yong-hsi (于永溪)

Abstract

In this paper, we have discussed exact sequences in the category ${}_R\mathrm{M}_n^l$ of R-n modules, The main theorems are Th. 18 and Th. 20.

Th. 18. In the category ${}_R\mathrm{M}_n^l$, total exactness of

$$\mathrm{M}_1\xrightarrow{g}\mathrm{M}_2\xrightarrow{f}\mathrm{M}_3$$

implies total quasi-exactness of $\mathrm{Hom}(\mathrm{M}, \mathrm{M}_1/\sim)\xrightarrow{\tilde{g}_*}\mathrm{Hom}(\mathrm{M}, \mathrm{M}_2)\xrightarrow{f_*}\mathrm{Hom}(\mathrm{M},\mathrm{M}_3)$. where $\tilde{g}:\mathrm{M}_1/\sim\to\mathrm{M}_2:[\mathrm{m}_1]\longmapsto g(\mathrm{m}_1)$; $\mathrm{m}_1^{(1)}$, $\mathrm{m}_1^{(2)}\in\mathrm{M}_1$, $\mathrm{m}_1^{(1)}\sim\mathrm{m}_1^{(2)}$ iff $g(\mathrm{m}_1^{(1)})=g(\mathrm{m}_1^{(2)})$; M is any one from $\mathrm{ob}_R\mathrm{M}_n^l$.

Th. 20. In the category ${}_R\mathrm{M}_n^l$, if $\widetilde{M}=\{\mathrm{m}_0\}$, then total exactness of

$$\mathrm{M}_1\xrightarrow{g}\mathrm{M}_2\xrightarrow{f}\mathrm{M}_3$$

implies total quasi-exactness of $\mathrm{Hom}(\mathrm{Im}(f), \mathrm{M})\xrightarrow{f^*}\mathrm{Hom}(\mathrm{M}_2, \mathrm{M})\xrightarrow{g^*}\mathrm{Hom}(\mathrm{M}_1,\mathrm{M})$, where $\widetilde{M}=\{\mathrm{m}|\{\mathrm{m}\}$ is a R-n submodule and $\mathrm{m}\in\mathrm{M}\}$.