1982年 第2卷 第4期
Vol. 2, No. 4, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

环上群环的半单性
——关于G. Connell的一个猜测*

朱元森

（河北师范大学数学系）

设环R有1，G是群．用$R(G)$表示R、G的群环．$0(G)$表示群G子群的阶的集合．任意域$F(ch.F\bar{\in}0(G))$上群环$F(G)$的J一半单性问题，至今仅证明对某些群，如局部有限群、局部可解群、Abel群、有序群等时$R(G)$是半本原环．G.Connell[2]于63年将域扩展到环，他得出当环R可换时，$R(G)$是半素与半本原的充要条件([2]定理5、6)，并断言要去掉R的可换条件是很困难的，但他猜测前者R的可换条件有可能去掉．

令$\mathfrak{G}=\{$群$G\mid\forall$域F，若$ch.F\bar{\in}0(G)$有$JF(G)=0\}$．本文在任结合环R有1上讨论群环的半单性．§1讨论$JR(G)$的Nil性．§2证明任$G\in\mathfrak{G}$，R是半本原环必有$R(G)$是半本原环．§3在$\Delta(G)$的正规子群在$\Delta(G)$中的指数是R中单位时证明了$R(G)$是半素的充要条件是R为半素环．这样群环的半单性可建立在有1的任意结合环上．

§1 半本原环上群环J—根的诣零性

引理1 结合环R有1，$H\lhd G$且$[G:H]=n<\infty$，则

$$[JR(G)]^n\subseteq JR(H)\cdot R(G)\subseteq JR(G).$$

证 设$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是H在G中的右陪集表现，将H的自同构$g\to x_i^{-1}gx_i(\forall g\in H)$扩充为$R(H)$的自同构$\sigma_i$：$\sigma_i(\beta)=x_i^{-1}\beta x_i$，$\forall\beta\in R(H)$，$i=1,2,\cdots,n$．又$\forall\alpha=\sum a_x x\in R(G)$可唯一表示为$\alpha=\sum\beta_i x_i$，$\beta_i\in R(H)$．故$\{x_1,\cdots,x_n\}$是R(G)在$R(H)$上的正规基．依[1]定理7.2.5知引理1成立． ∎

定理1 若环R有1，$JR=0$，G是有限群．则$JR(G)$是幂零．

*1981年8月24日收到．本文于1982年4月在全国第一届代数学术交流会环论组上宣读过．

推论 若环R有1，$JR=0$，G是局部有限群，则$JR(G)$是Nil理想。

证 $\forall \alpha\in JR(G)$的支集生成的子群$H=\langle \mathrm{supp}\,\alpha\rangle$是有限群，则$JR(H)$是幂零。又$\alpha\in R(H)$知$\alpha\in JR(H)$是幂零元。故$JR(G)$是Nil理想。 ▮

环R有1，G是群。用$\mathscr{B}$一表Bear根。若$JR(G)=0$，那么$\mathscr{B}R=R\cap\mathscr{B}R(G)\subseteq R\cap JR(G)=0$。即$R$是半素环。

定理2 若环R有1，不含非零Nil理想，G是无扭Abel群，则$JR(G)=0$。

证 由[6]定理1,7,3知$R[x]$是半本原环，x是R上不定元。首先，设$G_0=\langle g\rangle$是无限循环群。显然$A=\{\sum_{i\ge 0}a_i g^i\,|\,a_i\in R\}$是$R(G_0)$的子群环，且

$$A\simeq R[x],\quad JA=0.$$

若$JR(G_0)\neq 0$，$\exists 0\neq\alpha=\sum_{l}^{m}a_j g^j\in JR(G_0)$，$a_j\in R$，则$0\neq r=\alpha g^{-l}\in JR(G_0)$且$r\in A$。因此，$1+rx$ $(x\in A)$在$R(G_0)$中有逆元y，即$(1+rx)y=1$。直接计算可得$y\in A$。即$r\in JA=0$，矛盾。故$JR(G_0)=0$。其次，若G是有限生成无扭Abel群，则$G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$，$G_i$是无限循环群。由$R(G_1)=R_1$，$R_1(G_2)=R_2,\cdots,R_{n-1}(G_n)\simeq R(G)$知$JR(G)=0$。

最后，G是无扭Abel群。若$\alpha\in JR(G)$，令$H=\langle\mathrm{supp}\,\alpha\rangle$则$JR(H)=0$，又$\alpha\in JR(G)\cap R(H)\subseteq JR(H)=0$，故$JR(G)=0$。 ▮

定理3 设环R有1，$JR=0$，G是可换群，则$JR(G)$是$R(G)$的Nil理想。

证 任$\alpha\in JR(G)$，$H=\langle\mathrm{supp}\,\alpha\rangle$是有限生成Abel群，于是$H=G_\infty\times G_0$，其中$G_\infty$是有限生成自由Abel群，$G_0$是有限生成周期群。依定理1,2得$JR(H)\simeq JR(G_\infty)(G_0)$是幂零。又$\alpha\in R(H)$有$\alpha\in JR(H)$是幂0元，故$JR(G)$是Nil理想。 ▮

对一般群G，$JR(G)$是否Nil尚未解决。

§2 半本原环上群环的半本原性

定理 环R有1是半本原环，$G\in\mathfrak{C}$。当$ch.R=0$，$\forall n\in 0(G)$是R中单位；当$ch.R=n>0$，若$p|n$，则$p\bar{\in}0(G)$。那么，$R(G)$是半本原环。

证 设M是R的任一极大理想，易知M不含R中单位且$\bar{R}=R/M$是有单位元的单纯环。当$ch.R=0$，若$ch.\bar{R}=r$，有$r1\in M$，则$r\bar{\in}0(G)$；当$ch.R=n>0$，那么，$n\bar{1}=\bar{0}$，如果$ch.\bar{R}=r$必有$r|n$。故$ch\bar{R}\bar{\in}0(G)$。

而$\bar{R}$的中心F是域，$ch.F=ch.\bar{R}\bar{\in}0(G)$，于是$JF(G)=0$，且$F(G)$是$F$上可分代数。显然$\bar{R}$是$F$上半单代数，依[1] Bourbaki定理7.3.9. $\bar{R}\otimes_F F(G)$是半本原环。再者，$F(G)$作为自由模以$g\in G$为基，$\bar{R}\otimes_F F(G)$中任一元可唯一表为$\sum a\otimes g(a\in\bar{R})$形式。于是，$\sum ag\to\sum a\otimes g$，$a\in\bar{R}$，$g\in G$。是$\bar{R}(G)$到$\bar{R}\otimes_F F(G)$上的环同构，故$J\bar{R}(G)=0$。

再将$R\to\bar{R}=R/M$上的自然同态开拓为$R(G)\to\bar{R}(G)$上的同态映射φ: $\varphi(\alpha)=\varphi(\sum r_g g)=\sum(r_g+M)g$。由于在$\varphi$下有$\varphi(JR(G)\subseteq J\varphi(R(G))=J\bar{R}(G)=0$，那么，$\forall\alpha\in JR(G)$其$\alpha$的系数$\{r_g(\alpha)\}\subset M$。但$R$的任一极大理想是本原理想，因此，$\{r_g(\alpha)\}\subseteq\cap M=JR=0$。$R(G)$

是半本原环. ▮

推论 若环 R 满足 Artin 条件，群 $G\in\mathfrak{C}$，当 $ch.R=0$ 时，$\forall n\in 0(G)$ 是 R 中单位；当 $ch.R=n>0$，$\forall p|n$，$p\bar{\in}0(G)$ 则 $R(G)$ 是半本原环的充要条件是 R 为半本原环. ▮

定理及其推论将半本原环上群环的半本原性问题归结为域上群代数的半本原性问题.

§3 半素环上群环的半素性

引理1 设 R 是有 1 的素环，G为任一群，$ch.R\bar{\in}0(G)$、则 $R(G)$ 的中心 $\mathscr{L}R(G)$ 是半素环.

证 因 R 的中心 $S\neq 0$ 是可换整域，且 $ch.S=ch.R\bar{\in}0(G)$，由[3]定理 1,2 知 Bear 根 $\mathscr{B}S(G)=0$.

对 $\forall\alpha=\sum r_g g\in\mathscr{L}R(G)$，$\forall a\in R$，由 $\alpha a=a\alpha$ 可得 $r_g a=ar_g$，故 $\mathscr{L}R(G)\subseteq S(G)$，又 $\alpha\in\mathscr{L}R(G)$，若 $\alpha^2=0$ 易知 $\alpha\in\alpha S(G)=0$. 所以，$\mathscr{L}R(G)$ 也是半素环. ▮

引理2 若 $R(G)=\sum\limits_{\alpha\in\omega}\oplus\bar{R}_\alpha$ 则 $\mathscr{L}R(G)=\sum\limits_{\alpha\in\omega}\oplus\mathscr{L}\bar{R}_\alpha$

证 令 $\varphi_\alpha(\alpha\in\omega)$ 是 $R(G)\to\bar{R}_\alpha$ 上射影，且 $\delta_\alpha=\mathrm{Ker}.\varphi_\alpha$ 则 $\bigcap\limits_{\alpha\in\omega}\delta_\alpha=0$. 而对 $\forall r_\alpha\in\bar{R}_\alpha$ $(\alpha\in\omega)$，$\exists r\in R(G)$ 使得 $\varphi_\alpha(r)=r_\alpha$. 又 $\forall\beta\in\mathscr{L}R(G)$ 由 $\varphi_\alpha(\beta)r_\alpha=r_\alpha\varphi_\alpha(\beta)$ 知 $\varphi_\alpha(\beta)\in\mathscr{L}\bar{R}_\alpha$.

反之，$\forall\beta_\alpha\in\mathscr{L}\bar{R}_\alpha(\alpha\in\omega)$，$\exists\beta\in R(G)$ 有 $\varphi_\alpha(\beta)=\beta_\alpha$，那么，对 $\forall r\in R(G)$ 有 $\varphi_\alpha(r\beta)=\varphi_\alpha(\beta r)$ 且 $r\beta-\beta r\in\delta_\alpha$ 故 $r\beta-\beta r\in\bigcap\limits_{\alpha\in\omega}\delta_\alpha=0$，$\beta\in\mathscr{L}R(G)$.

因此，$\varphi_\alpha(\forall\alpha\in\omega)$ 也是 $\mathscr{L}R(G)\to\mathscr{L}\bar{R}_\alpha$ 上射影，记作 $\tilde{\varphi}_\alpha$. 且 $\bigcap\limits_{\alpha\in\omega}\tilde{\varphi}_\alpha$ 的核 $\subset\bigcap\limits_{\alpha\in\omega}\delta_\alpha=0$，故 $\mathscr{L}R(G)=\sum\limits_{\alpha\in\omega}\oplus\mathscr{L}\bar{R}_\alpha$. ▮

引理3 设半素环 R 有 1，G为任一群，当 $ch.R=0$，$\forall n\in 0(G)$ 是 R 中单位；当 $ch.R=n>0$，若 $p|n$ 有 $p\bar{\in}0(G)$，那么，$\mathscr{L}R(G)$ 是半素环.

证 设 $R=\sum\limits_{\alpha\in\omega}\oplus R_\alpha$，$R_\alpha$ 是素环. φ_α 是 $R\to R_\alpha$ 上射影，且 $I_\alpha=\mathrm{Ker}\varphi_\alpha$. 那么，$\bigcap\limits_{\alpha\in\omega}I_\alpha=0$，显然，$\varphi_\alpha(1)=1_\alpha$ 是 R_α 的单位元. 且 I_α 不含 R 中单位.

当 $ch.R=0$，若 $ch.R_\alpha=r$. 则 $r1\in I_\alpha$，$r\bar{\in}0(G)$；当 $ch.R=n$，那么 $n1_\alpha=0$. 若 $ch.R_\alpha=p$ 有 $p|n$，故 $p\bar{\in}0(G)$，依引理 1 $\mathscr{B}\mathscr{L}R_\alpha(G)=0$.

将 φ_α 开拓为 $R(G)\to R_\alpha(G)$ 的同态映射 $\bar{\varphi}_\alpha$：

$$\bar{\varphi}_\alpha(\beta)=\sum\varphi_\alpha(r_g)g,\quad\forall\beta=\sum r_g g\in R(G).$$

易知，$\bar{\varphi}_\alpha(R(G))=R_\alpha(G)$. 那么，$I_\alpha(G)\subseteq\mathrm{Ker}\bar{\varphi}_\alpha$. 反之，$\forall\beta=\sum r_g g\in\mathrm{Ker}\bar{\varphi}_\alpha$ 则 $\varphi_\alpha(r_g)=0$，$\forall\alpha\in\omega$. 故 $I_\alpha(G)=\mathrm{Ker}\bar{\varphi}_\alpha$. 于是，$\bigcap\limits_{\alpha\in\omega}\{\mathrm{Ker}\bar{\varphi}_\alpha\}=(\bigcap\limits_{\alpha\in\omega}I_\alpha)(G)=0$，且 $R(G)\simeq\sum\limits_{\alpha\in\omega}\oplus R_\alpha(G)$. 再依引理 2 得：$\mathscr{L}R(G)\simeq\sum\limits_{\alpha\in\omega}\oplus\mathscr{L}R_\alpha(G)$，故 $\mathscr{B}\mathscr{L}R(G)=0$. ▮

令 $C_G(g)$ 是 $g\in G$ 在G中的中心化子，且

$$\Delta(G)=\{g\in G\,|\,[G:\ C_G(g)]<\infty\}.$$

设 H 是G的子群，定义 $R(G)\to R(H)$ 的截断映射 Π_H：$\Pi_H(\sum\limits_{g\in G}a_g g)=\sum\limits_{g\in H}a_g g$. 易知，$\Pi_H$ 是线性的，且 $\Pi_H(\alpha r)=\Pi_H(\alpha)r$；$\Pi_H(r\alpha)=r\Pi_H(\alpha)$，$\forall\alpha\in R(G)$，$r\in R(H)$.

引理4 设 A、B 为 $R(G)$ 的理想，Π_Δ 为 $R(G)\to R(\Delta(G))$ 的截断映射，若 $AB=0$ 则

$\Pi_\Delta(A)\Pi_\Delta(B)=0$。 ∎

此是 Passman 的结论，先证 $\Pi_\Delta(A)B=0$。

引理5 设环R有1，G是群，若$R(\Delta(G))$是半素环则R(G)是半素环.

证 设Π_Δ为$R(G)\to R(\Delta(G))$的截断映射，A是R(G)的理想，若$A^2=0$，依引理4 $\Pi_\Delta(A^2)=\Pi_\Delta(A)^2=0$。又$\forall\alpha,\beta\in\Pi_\Delta(A)$，$\exists\alpha',\beta'\in A$有$\Pi_\Delta(\alpha')=\alpha,\Pi_\Delta(\beta')=\beta$。因为，$\alpha\beta=\Pi_\Delta(\alpha'\pi_\Delta(\beta'))\in\Pi_\Delta(A),\alpha-\beta\in\Pi_\Delta(A)$，即$\Pi_\Delta(A)$是$R(\Delta(G))$的幂零理想。故$\Pi_\Delta(A)=0$，supp $\alpha(\forall\alpha\in A)$不含常数项。但若 $0\neq\alpha\in A$，$g\in\mathrm{supp}\alpha$，αg^{-1}含常数项，矛盾。因此，$A=0$。 ∎

设l_x表示x在G中共轭元素系，$|l_x|$是l_x中元素个数，$\tilde{l}_x$表l_x中元素的和。$\delta(G)$表示G的正规子群在G中指数的集合。依[7]P69知$|l_x|=[G:C_G(x)]\in\delta(G)$。

定义 设环R有1，G是群，$\forall n\in\delta(G)$是R中单位。 令$\theta(\alpha)=\sum\limits_{x\in\Pi_\delta(\alpha)}a_x|l_x|^{-1}\tilde{l}_x\in\mathscr{L}R(G)$，$\forall\alpha=\sum a_x x\in R(G)$（其中$\Pi_\Delta$即$\Pi_{\Delta(G)}$），$\theta$叫做R(G)的中心映射。

易知此定义有意义，它与R的特征数无关。

性质 G、R、θ如定义中所述，设$\alpha\in R(G)$，W是G的任一中心化 supp α的正规子群，且$[G:W]<\infty$。令W在G中陪集表现为$\{y_1y_2,\cdots,y_n\}$。则

(i)。$\theta(\alpha)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_i y_i^{-1}\Pi_\Delta(\alpha)y_i=\dfrac{1}{n}\sum\limits_i\Pi_\Delta(y_i^{-1}\alpha y_i)$

(ii)。$\forall r\in\mathscr{L}R(G)$，则$\theta(r\alpha)=r\theta(\alpha)$，$\theta(\alpha r)=\theta(\alpha)r$。

证明与域上相应性质类似参看[1]。 ∎

引理6 设R、G、θ如定义中所述，若A,B为$R(G)$的理想且$AB=0$。则$\theta(A)\theta(B)=0$。

证 任$\alpha\in A$，$\beta\in B$。令$W=\bigcap\limits_{x\in\mathrm{supp}\pi_\delta(\alpha)}C_G(x)$。且$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$是$W$在G中陪集表现，显然，$(y_i^{-1}\alpha y_i)\beta=0$，依引理4证明提示知$\Pi_\Delta(y_i^{-1}\alpha y_i)\beta=0$。故

$[\dfrac{1}{n}\sum\limits_i\Pi_\Delta(y_i^{-1}\alpha y_i)]\beta=0$，即$\theta(\alpha)\beta=0$，因此，$\theta(\alpha)\theta(\beta)=0$，并且，$\theta(A)B=0$，$\theta(A)\theta(B)=0$。 ∎

引理7 环R有1，G是群，$\forall n\in\delta(G)$是R中单位，则$R(G)$是半素环的充要条件是$\mathscr{L}R(G)$是半素环。

证 若R(G)是半素环，$\forall\alpha\in\mathscr{L}R(G)$，若$\alpha^2=0$显然，$\alpha\in\alpha R(G)=0$。$\mathscr{L}R(G)$是半素环。

反之，若$\mathscr{L}R(G)$是半素环，A是R(G)的任一理想。若$A^2=0$，θ是R(G)的中心映射。依引理6 $\theta(A^2)=\theta(A)^2=0$。再由$\theta(A)\subset\mathscr{L}R(G)$知$\theta(A)=0$。$\forall\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}r_ig_i\in A$。则

$$\theta(\alpha g_i^{-1})=r_i+\sum_{e\neq g\in\mathrm{supp}\pi_\delta(\alpha)}r_g|l_g|^{-1}\tilde{l}_g=0$$

易知$r_i=0$ $i=1,2,\cdots,n$。故$A=0$，$R(G)$是半素环。 ∎

定理 设环R有1，G是群，$\forall n\in\delta(\Delta(G))$是$R$中单位。当$ch.R=0$，$\forall r\in 0(G)$是

R中单位；当ch.$R=n$的因数$\in 0(G)$，那么，R是半素环的充要条件是$R(G)$为半素环.

证　当$\mathscr{B}R(G)=0$，易知$\mathscr{B}R=0$. 反之，若$\mathscr{B}R=0$，因$0(\Delta(G))\subset 0(G)$依引理3 $\mathscr{L}R(\Delta(G))$是半素环，再由引理7 $\mathscr{B}R(\Delta(G))=0$. 最后，由引理5知$R(G)$是半素环. ∎

当$\Delta(G)$是有限群，如果$\forall r\in 0(G)$是R中单位，那么$\Delta(G)$的任一正规子群在$\Delta(G)$中指数也是R中单位.

推论　若环R有1，$\Delta(G)$是有限群，任$n\in 0(G)$是R中单位. 则$R(G)$是半素环的充要条件是R为半素环. ∎

衷心感谢我的老师刘绍学教授的指导.

参　考　文　献

[1] Passman, D.S. The algebraic structure of group rings, New york, 1977.

[2] Connell, G. On the group rings, *Can. Jour. of Math.* Vol. 15(1963), No. 4, P650—685.

[3] Passman, D.S. Nil ideal in group rings, *Mich. Math. J.* 9(1962) P375—384.

[4] Amitsur, S.A. On the Semi—Simplicity of group algebras, *Mich. Math. J.* 6 (1959) P251—253.

[5] ——, A generalization of Hilberts Nullstelleusatz, *proc. Amer. Math. Soc.* 8(1957) P649—656.

[6] Jacobson, Structure of rings, 1956.

[7] 库洛什，群论(I)(中译本，曾肯成，郝钠新译)

Semisimplicity of group rings over ring

——On a conjecture of G. Connell

By Zhu Yuan-sen (朱元森)

Abstract

The semisimplicity problem of some group algebras on a field had been discussed in [1]. Afterwards, G. Connell extended the problem to that on a commutative ring with identity 1 in [2]. In this paper, we study the semisimplicity of group rings over any associative ring with 1 and arrive at the following conclusions:

Theorem I. Let ring R be Jacobson semisimple. Then (i) JK(G) is nilpotent ideal if G is a finite group.

(ii) JR(G) is nil ideal if G is commutative or locally finite group.

Let $0(G)$ be the set of order of all subgroups in G, and Let.

$\mathfrak{G}=\{\text{group } G \mid \text{for each field } F \text{ if } ch.F \bar{\in} 0(G), \text{ then } JF(G)=0.\}$

Theorem II. Let $G \in \mathfrak{G}$ and ring R is semiprimitive with identity 1. Suppose further that either each $n \in 0(G)$ is a unit in R when $ch.R=0$, or any divisor of n is not Contained in $0(G)$ when $ch. R=n>0$. Then $R(G)$ is a semiprimitive group ring.

Hence the semiprimitive question of group rings over semiprimitive ring is reduced to semiprimitive question of group algebras over a field.

Let $\delta(G)$ be set of index (inG) of all normal subgroups of G

Theorem III. Suppose that ring R Contains 1 and G is any group, and each $n \in \delta(\Delta(G))$ is unit in R. Suppose further that either each $p \in 0(G)$ is unit in R when $ch.R=0$, or any divisor of n is not contained in $0(G)$ when $ch. R=n>0$. Then R is semiprime if and only if $R(G)$ is semiprime.

Corollary. when $\Delta(G)=\{g \in G \mid [G: C_G(g)]<\infty\}$ is a finite group and each $n \in 0(G)$ is unit in R, then $R(G)$ is semiprime if and only if R is semiprime.