1982年 第2卷 第4期
Vol.2, No.4, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

一类二次插值样条达到最优逼近阶的特征*

杨义群

(浙江农业大学)

一、引 言

对于[0,1]的分划

$$\Delta=\{0=x_0<x_1\cdots<x_n=1\},\tag{1}$$

令$h_i=x_i-x_{i-1}(i=1,\cdots,n)$,

$$\bar{\Delta}=\max_i(x_i-x_{i-1}),\qquad R_\Delta=\bar{\Delta}/\min_i(x_i-x_{i-1})$$

及

$S_2=\{s(x)\in C^1[0,1]$: $s(x)$在每个(x_{i-1},x_i) $(i=1,\cdots,n)$上都是二次多项式$\}$.

对于$f\in C^1[0,1]$, 设$s_j(x)\triangleq s_{j,f}(x)\in S_2$ $(j=1,\cdots,4)$分别满足:

(i) $s_1'(0)=f'(0)$及$s_1(x_i)=f(x_i)$ $(i=0,\cdots,n)$;

(ii) $s_2(0)=f(0)$及$s_2'(x_i)=f'(x_i)$ $(i=0,\cdots,n)$;

(iii) $s_3(0)=s_3(1)$, $s_3'(0)=(-1)^{n-1}s_3'(1)$及$s_3(x_i)=f(x_i)$ $(i=1,\cdots,n)$;

(iv) $s_4(0)=f(0)$, $s_4(1)=f(1)$及$s_4'(x_i)=f'(x_i)$ $(i=0,\cdots,n-1)$.

又记

$$R_{j,f}(x)=f(x)-s_{j,f}(x)\qquad (j=1,\cdots,4),$$

$s_j(x)$ $(j=1,\cdots,4)$的存在唯一性是不难给出的[5-11].

关于它们的逼近度，[2],[3]证有

定理A 若$f\in C^4[0,1]$且

$$R_\Delta=O(1),\tag{2}$$

则

*1981年4月15日收到.

$$\|R_{j,f}^{(k)}\|_{C[0,1]}=O(\bar{\Delta}^{3-k}) \qquad (k=0,1,2;\ j=1,3,4). \tag{3}$$

又[7]证有

定理B 若 $f\in C^3[0,1]$，$\int_0^1|df^{(3)}(x)|<+\infty$，条件(2)满足，且有

$$\sum_{j=2}^{n}|h_j-h_{j-1}|=O(\bar{\Delta})$$

及

$$\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left(\max_{m<i}\frac{1}{h_m}\sum_{j=m+1}^{i}|h_j-h_{j-1}|,\ \max_{i<m}\frac{1}{h_m}\sum_{j=i+1}^{m}|h_j-h_{j-1}|\right)=O(1),$$

则(3)式在 $j=1$ 时成立.

我们指出，在定理A的条件下，(3)式对于 $j=1,3,4$ 都未必成立. 例如 $j=4$ 时，即使对于$R_\Delta=1$且 $f(x)=x^3$，(3)式也不成立(见下述定理5). 记(参见[14]§5.1)

$$V^3[0,1]=\{f:\ f^{(3)}(t)\text{在}[0,1]\text{上有界变差}\}.$$

当$j=1$时，下述定理1与2指出，(3)式对于一切$f\in V^3[0,1]$成立的充要条件是

$$\max\{|\textstyle\sum_{i=1}^{k}(-1)^i h_i^2|:\ 1\leqslant k\leqslant n\}=O(\bar{\Delta}^2), \tag{4}$$

而条件(2)既不充分也不必要(见下述附注1)，从而定理B中的那么多条件更不是必要的. 下述定理3与4对于 $j=3$ 的情形，给出了类似的充要条件. 最后，定理5对于 $j=2,4$ 的情形，也给出了最优逼近阶.

二、辅助定理

由王兴华[1]的工具直接可得以下二个引理(参见[12,13,15])：

引理1 设$a\neq0$. 若 $R(0)=R(a)=0$ 且$R'(x)$存在，则有

$$R(x)=R[x,0,a]x(x-a)\text{及}R'(x)=R[x,0,a](x-a)+R[x,x,0]x. \tag{5}$$

若$R'(0)=R(0)=R(a)=0$且$R''(x)$存在，则有

$$R(x)=R[x,0,0,a]x^2(x-a), \tag{6}$$

$$R'(x)=2R[x,0,0,a]x(x-a)+R[x,x,0,0]x^2 \tag{7}$$

及

$$R''(x)=R[x,0,0,a](x-a)+R[x,x,0,0]x+R[x,x,x,0]x. \tag{8}$$

引理2 若 $a\neq0$且$R'(0)=R(0)=R'(a)=0$，则有

$$2R(x)=R[x,0,0,a]x^2(x-2a)+R[x,0,a,a]x^2(x-a).$$

引理3 设$a>0$. 若$R'(0)$与$R'(a)$存在且$R(0)=R(a)=0$，则

$$R'(0)+R'(a)=R[0,0,a,a]a^2. \tag{9}$$

若$P'(0)=P'(a)=0$，则

$$P(0)-P(a)=P[0,0,a,a]a^3/2. \tag{10}$$

若在$[0,a]$上 $P^{(2)}\in\mathrm{Lip}\,1$，则当 $P(a)P'(a)=0$ 时有

$$\|P^{(k)}\|_{C[0,a]}\leqslant C(|P'(0)|a+|P(0)|+\|P^{(3)}\|_{L^\infty(0,a)}a^3)a^{-k} \qquad (k=0,1,2), \tag{11}$$

而当$P'(a)=0$时还有

$$\|P^{(k)}\|_{C[0,a]} \leqslant C(|P'(0)|a + \|P^{(3)}\|_{L^\infty(0,a)}a^3)a^{-k} \qquad (k=1,2), \tag{12}$$

其中 $C>0$ 是绝对常数．

证　(9)式可由(5)式推得．当 $P'(0)=P'(a)=0$ 时，令 $R(x)=P(x)-P(0)$．于是(10)式可由引理 2 推得．

当 $P(a)=0$ 时，令

$$R(x)=P(x)+P'(0)x(x-a)/a-P(0)(1-x^2/a^2),$$

这时由(6)～(8)式得

$$\|R^{(k)}\|_\infty \leqslant C\|R^{(3)}\|_\infty a^{3-k}=C\|P^{(3)}\|_\infty a^{3-k} \qquad (k=0,1,2),$$

这里用$\|\cdot\|_\infty$表示$L^\infty[0,a]$空间中的范数．由此可得(11)式．当$P'(a)=0$时，令

$$R(x)=P(x)-P(0)-P'(0)x\left(1-\frac{x}{2a}\right).$$

这时由引理 2 得$|R(x)|\leqslant\|R^{(3)}\|_\infty x^2(3a-x)/12$．从而有

$$\|R\|_\infty \leqslant \frac{1}{6}\|R^{(3)}\|_\infty a^3=\frac{1}{6}\|P^{(3)}\|_\infty a^3.$$

由此可得$k=0$时的(11)式．若再改令

$$R(x)=P'(x)-P'(0)(1-x/a),$$

则由(5)式得

$$\|R^{(k-1)}\|_\infty \leqslant \frac{4^k}{32}\|R^{(2)}\|_\infty a^{3-k}=\frac{4^k}{32}\|P^{(3)}\|_\infty a^{3-k} \qquad (k=1,2).$$

由此可得(12)式．引理 3 证毕．

引理 4　若 n 为奇数且

$$\|R_{3,f}^{(k)}\|_{C[0,1]} \to 0 \qquad (n\to+\infty) \qquad (k=0,1), \tag{13}$$

则有

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1) \qquad (k=0,1). \tag{14}$$

若 n 为偶数且(13)式成立，则有

$$f^{(k)}(0)=(-1)^k f^{(k)}(1) \qquad (k=0,1). \tag{15}$$

证　当 n 为奇数且 $k=0,1$时，由

$$\begin{aligned}|f^{(k)}(0)-f^{(k)}(1)| &= |f^{(k)}(0)-s_{3,f}^{(k)}(0)-f^{(k)}(1)+s_{3,f}^{(k)}(1)| \\ &\leqslant 2\|R_{3,f}^{(k)}\|_{C[0,1]}\to 0 \quad (n\to+\infty)\end{aligned}$$

可得(14)式．类似地可得(15)式．引理 4 证毕．

引理 5　若 $f\in C^1[0,1]$，则有

$$R'_{1,f}(x_i)=\sum_{k=1}^{i}(-1)^{i-k}f[x_{k-1},x_{k-1},x_k,x_k]h_k^2 \qquad (i=0,\cdots,n) \tag{16}$$

及

$$R_{j,f}(x_i)=-\sum_{k=1}^{i}f[x_{k-1},x_{k-1},x_k,x_k]h_k^3/2 \;\; (i=0,\cdots,n-1; \quad j=2,4), \tag{17}$$

再若有(14)或(15)式，则相应地当 n 为奇或偶数时有

$$2R'_{3,f}(x_i)=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j-1}f[x_{j-1},x_j,x_{j+1},\underline{x}^i_{j+2}]h^2_{j+1}$$

$$+\sum_{j=i}^{n-1}(-1)^{i-j}f[\bar{x}^i_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2}]h^2_{j+1}-\sum_{j=0}^{i-2}(-1)^{i-j}\{f[x_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2}]$$

$$-f[x_j,x_{j+1},x_{j+2},\underline{x}^i_{j+3}]\}h_{j+1}h_{j+2}+\sum_{j=i}^{n-2}(-1)^{i-j}\{f[\bar{x}^i_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2}]$$

$$-f[x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3}]\}h_{j+1}h_{j+2}\quad(i=0,\cdots,n),\tag{18}$$

其中 $x_{-1}=0$，$x_{n+1}=1$，$\underline{x}^i_j=x_{min(i,j)}$ 及 $\bar{x}^i_j=x_{max(i,j)}$。

证 利用(9)与(10)式，不难用数学归纳法证明(16)与(17)式．以下证明(18)式．注意到当$s(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上是二次多项式时有

$$s'(x_i)+s'(x_{i-1})=2[s(x_i)-s(x_{i-1})]/h_i=2s[x_{i-1},x_i],\tag{19}$$

再由 $s_{3,f}(x)$的插值条件及 $f(0)=f(1)$，可得

$$s'_{3,f}(x_i)=\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i-j}f[x_{j-1},x_j]-\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i-j}f[x_{j-1},x_j]\quad(i=0,\cdots,n).$$

最后由(14)或(15)式，相应地当n为奇或偶数时，对于$i=0,\cdots,n$有(为简单计，令 h_{-1}，h_0，h_{n+1} 与 h_{n+2} 都为零，而且它们与任何差商的乘积也都为零，不论那些差商有否意义)

$$\begin{aligned}2R'_{3,f}(x_i)&=(-1)^{i-1}f'(0)-2\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i-j}f[x_{j-1},x_j]+2f'(x_i)\\&\quad+2\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i-j}f[x_{j-1},x_j]-(-1)^{n-i}f'(1)\\&=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j-1}\{f[x_{j-1},x_j]-f[x_j,x_{j+1}]\}\\&\qquad-f[x_{i-1},x_i]+2f'(x_i)-f[x_i,x_{i+1}]\\&\quad+\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i-j}\{f[x_{j-1},x_j]-f[x_j,x_{j+1}]\}\\&=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}](h_j+h_{j+1})\\&\quad+f[x_{i-1},x_i,x_i]h_i-f[x_i,x_i,x_{i+1}]h_{i+1}\\&\quad-\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i-j}f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}](h_j+h_{j+1})\\&=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}\{f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}]-f[x_j,x_{j+1},\underline{x}^i_{j+2}]\}h_{j+1}\\&\quad-\sum_{j=i}^{n-1}(-1)^{i-j}\{f[\bar{x}^i_{j-1},x_j,x_{j+1}]-f[x_j,x_{j+1},x_{j+2}]\}h_{j+1}\\&=\sum_{j=0}^{i-2}(-1)^{i-j-1}f[x_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2}]h_{j+1}(h_j+h_{j+1}+h_{j+2})\\&\quad+f[x_{i-2},x_{i-1},x_i,x_i]h_i(h_{i-1}+h_i)+f[x_i,x_i,x_{i+1},x_{i+2}]h_{i+1}(h_{i+1}+h_{i+2})\\&\quad+\sum_{j=i+1}^{n-1}(-1)^{i-j}f[x_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2}]h_{j+1}(h_j+h_{j+1}+h_{j+2}).\end{aligned}$$

由此可得(18)式．引理 5 证毕．

引理 6　记着

$$\mathrm{H}=\max\{|\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i}h_i^2|:\ k=1,\cdots,n\},\tag{20}$$

则有 $\mathrm{H}\geqslant\frac{1}{2}\bar{\Delta}^2$.

证　取 $j\in\{1,\cdots,n\}$ 使 $h_j=\bar{\Delta}$. 又记

$$\mathrm{H}_k=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i}h_i^2\quad(k=0,\cdots,n).\tag{21}$$

则 $\mathrm{H}\geqslant|\mathrm{H}_{j-1}|\geqslant\bar{\Delta}^2/2$ 或者 $|\mathrm{H}_{j-1}|<\bar{\Delta}^2/2$，而后者含有

$$\mathrm{H}\geqslant|\mathrm{H}_j|\geqslant h_j^2-|\mathrm{H}_{j-1}|>\bar{\Delta}^2/2.$$

引理 6 证毕.

三、主 要 结 果*

定理 1　对于一切 $f\in V^3[0,1]$ 成立着

$$\|R_{1,f}^{(k)}\|_C=O(\bar{\Delta}^{3-k})\qquad(k=0,1,2)\tag{22}$$

的充要条件是(4)式成立.

在下述定理 2 中取 $\varepsilon=O(\bar{\Delta}^2)$，就得定理 1.

定理 2　若 $f\in V^3[0,1]$ 且 $\mathrm{H}\leqslant\varepsilon$，则有

$$\|R_{1,f}^{(k)}\|_C\leqslant C\varepsilon V_3(f)\bar{\Delta}^{1-k}\qquad(k=0,1,2),\tag{23}$$

其中 $C>0$ 为绝对常数，而

$$V_3(f)=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f^{(3)}(x)|+\int_0^1|df^{(3)}(x)|.\tag{24}$$

另一方面，若(23)式对于 $f(t)=t^3\in V^3[0,1]$ 在 $k=1$ 时成立，则有 $\mathrm{H}\leqslant 6C\varepsilon$.

证　当 $f\in V^3[0,1]$ 时，由(16)式及 Abel 变换，对于 $i=1,\cdots,n$ 有

$$\begin{aligned}|R'_{1,f}(x_i)|&=\frac{1}{6}\left|\sum_{j=1}^{i}f^{(3)}(\xi_j)(\mathrm{H}_j-\mathrm{H}_{j-1})\right|\\&\leqslant\frac{1}{6}\left|\sum_{j=1}^{i-1}[f^{(3)}(\xi_j)-f^{(3)}(\xi_{j+1})]\mathrm{H}_j+f^{(3)}(\xi_i)\mathrm{H}_i\right|\\&\leqslant\frac{1}{6}\mathrm{H}V_3(f),\end{aligned}\tag{25}$$

其中 $0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<1$. 再由(11)式及引理 6 得 $\varepsilon\geqslant\bar{\Delta}^2/2$ 及

$$\begin{aligned}\|R_{1,f}^{(k)}\|_C&\leqslant C\max_i[|R'_{1,f}(x_i)|\bar{\Delta}^{1-k}+\|f^{(3)}\|_C\bar{\Delta}^{3-k}]\\&\leqslant CV_3(f)\mathrm{H}\bar{\Delta}^{1-k}\qquad(k=0,1,2).\end{aligned}$$

由此即得(23)式. 另一方面. 若(23)式对于 $f(t)=t^3$ 在 $k=1$ 时成立，则由(16)式得

* 在本节中，用 $\|\cdot\|_C$ 表示 $C[0,1]$ 空间中的范数.

$$H=\max_i|R'_{1,f}(x_i)|\leqslant\|R'_{1,f}\|_C\leqslant 6C\varepsilon.$$

定理 2 证毕。

附注 1 条件(2)与(4)互不包含。

证 例如取 $x_i=[4i-1+(-1)^i]/4n\ (i=1,\cdots,n-1)$时，条件(2)满足，而条件(4)不满足。又如取

$$x_i=\alpha_n-(1-\alpha_n)(i-1)/(n-1)\qquad(i=1,\cdots,n)$$

时，若$n\alpha_n\in(1,n)$无界，则条件(2)不满足，而条件(4)满足。证毕。

类似于定理 1，我们有着下述定理 3，其中记

$$V_k^3=\{f\in V^3[0,1]:\ f(0)=f(1)\text{ 且 }f'(0)=(-1)^kf'(1)\}\ (k=0,1).$$

这里条件(14)或(15)的必要性由引理 4 可知。

定理 3 当n为奇数时，对于一切$f\in V_0^3$成立着

$$\|R_{3,f}^{(k)}\|_C=O(\bar{\Delta}^{3-k})\qquad(k=0,1,2)\tag{26}$$

的充要条件是(4)式成立。当n为偶数时，对于一切$f\in V_1^3$成立着(26)式的充要条件是(4)式成立。

在下述定理 4 中取$\varepsilon=O(\bar{\Delta}^2)$，就能得到定理 3。

定理 4 若n为奇数，$f\in V_0^3$且$H\leqslant\varepsilon$，则有

$$\|R_{3,f}^{(k)}\|_C\leqslant CV_3(f)\varepsilon\bar{\Delta}^{1-k}\qquad(k=0,1,2),\tag{27}$$

其中$C>0$是绝对常数，而$V_3(f)$由(24)式确定。若n为偶数，$f\in V_1^3$且$H\leqslant\varepsilon$，则(27)式成立。反之，若(27)式对于奇数n及$f(t)=t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t\in V_0^3$在$k=1$时成立，则有$H\leqslant 12C\varepsilon$。而若(27)式对于偶数$n$及$f(t)=t^3+\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t\in V_1^3$在$k=1$时成立。则也有$H\leqslant 12C\varepsilon$。

证 以下设n为奇数，而n为偶数时证明是类似的。当$f\in V_0^3$时，由(18)式，对于$i=0,\cdots,n$有

$$\Big|12R'_{3,f}(x_i)-\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i-j}f^{(3)}(\xi_j)h_j^2+\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i-j}f^{(3)}(\xi_j)h_j^2\Big|\leqslant\int_0^1|df^{(3)}(x)|\bar{\Delta}^2,\tag{28}$$

其中$0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<1$。于是，类似于定理 2 的证明，可得(27)式。反之，若(27)式对于$f(t)=t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t$在$k=1$时成立，则由(18)式得

$$H\leqslant\max_i|2H_i-H_n|=\max_i|2R'_{3,f}(x_i)|\leqslant 2\|R'_{3,f}\|_C\leqslant 12C\varepsilon.$$

定理 4 证毕。

定理 5 当$f\in C^3[0,1]$时

$$\|R_{j,f}^{(k)}\|_C\leqslant C\|f^{(3)}\|_C\bar{\Delta}^{\min(2,3-k)}\quad(k=0,1,2;\ j=2,4),\tag{29}$$

其中$C>0$是绝对常数，另一方面，对于$f(t)=t^3\in C^3[0,1]$有着

$$\max_i|R_{j,f}(x_i)|=\sum_{i=1}^{n+1-j/2}h_i^3/2\qquad(j=2,4).\tag{30}$$

证　当 $f\in C^3[0,1]$ 时，由(17)式得

$$\max_i|R_{i,f}(x_i)|\leqslant\|f^{(3)}\|_C\sum_{i=1}^{n}h_i^3/12\leqslant\|f^{(3)}\|_C\bar{\Delta}^2/12.$$

再利用(11)与(12)式，类似于定理2，可得(29)式。而(30)式由(17)式立即可得。定理5证毕。

附注2　[2],[3]的作者后来于[4]中将定理A订正与改进为

定理C　当 $f\in V^3[0,1]$且

$$\sum_{j=2}^{i-1}|h_j-h_{j-1}|\leqslant\beta_2h_i\quad(i=2,\cdots,n)$$

时有

$$\|R_{1,f}^{(k)}\|_C\leqslant C_kV_3(f)\bar{\Delta}^{3-k}\quad(k=0,1,2),$$

其中 $C_0=\frac{1}{24}$，　$C_1=\frac{1}{6}$ 及　$C_2=\frac{1}{3}(2+\beta_1+2\beta_2)$，而

$$\beta_1=\max_i\{\max(h_0,\cdots,h_i)/h_i\}.$$

显然定理C中的条件强于定理1中的条件，而且在定理C的结论中仍存在着疏忽之处。例如由上述定理1与2可见，定理C至少在$k=1$时不能成立。

参考文献

[1] 王兴华，一个数值微分公式的余项，科学通报，24(1979)，19：869—872.

[2] 李岳生，样条函数方法，科学出版社，1979.

[3] 李岳生，高次样条函数的插值方法与偶次样条函数的极值理论，中山大学学报，1974，4，21—45.

[4] 李岳生，二次样条插值余项估计的订正和改进，中山大学学报，1981，2，118—119.

[5] 李岳生、黄友谦，数值逼近，人民教育出版社，1978.

[6] 熊振翔、李心灿、王日爽，曲线·曲面·光顺，国防工业出版社，1979.

[7] 谢深泉，二次与三次样条插值及其变分性质，高校计算数学学报，2(1980)，1：94—96.

[8] 杨义群，一类插值样条的余项估计，浙江大学论文汇编，1980，36—37.

[9] 林芳华，关于一类二次插值样条的收敛性，浙江大学学报，1981，2：139—143.

[10] Meinardus, G. and Taylor, G. D., Periodic quadratic spline interpolant of minimal norm, *J. Approx. Th.* 23(1978), 137—141.

[11] Neuman, E., Quadratic splines and histospline projections, *J.Approx. Th.* 29(1980). 4：297—304.

[12] 杨义群，H-B插值的余项，待发表.

[13] 杨义群，一类三次插值样条的余项估计，计算数学，4(1982)，3.

[14] Корнейчук Н. П., Экстремапьные задчи теории приближения, М., 《Наука》, 1976.

[15] 杨义群，关于圆弧样条逼近的若干精确估计，高校计算数学学报，4(1982)，2：167—174.

The Characterization of a Kind of Quadric Interpolation Spline Coming up to the Optimal Approximation Degree

By Yang Yiqun (杨义群)

Abstract

Let $\Delta=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1\}$ be a partition of $[0,1]$, and let $h_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,\cdots,n)$ and $\bar{\Delta}=\max\limits_i h_i$. The set of splines of degree 2 and deficiency 1 on Δ is denoted by S_2. Let $f\in C'[0,1]$ and $s_{j,f}\in S_2$ $(j=1,3)$ satisfy respectively

(i) $S'_{1,f}(0)=f'(0)$ and $s_{1,f}(x_i)=f(x_i)$ $(i=0,\cdots,n)$,

(ii) $S_{3,f}(0)=s_{3,f}(1)$, $s'_{3,f}(0)=(-1)^{n-1}s'_{3,f}(1)$ and

$$s_{3,f}(x_i)=f(x_i)\quad(i=1,\cdots,n).$$

Write $V^3=\{f:\int_0^1|df^{(3)}(x)|<\infty\}$

and $V^3_j=\{f\in V^3:\ f(0)=f(1) \text{ and } f'(0)=(-1)^jf'(1)\}$ $(j=0,1)$.

Theorem 1 $\|f^{(k)}-s^{(k)}_{1,f}\|_{C[0,1]}=O(\bar{\Delta}^{3-k})$ $(k=0,1,2)$ $\forall f\in V^3$ if and only if

$$\max_k\left|\sum\nolimits_{i=1}^k(-1)^ih_i^2\right|=O(\bar{\Delta}^2).\tag{1}$$

Theorem 3 Let $j\in\{0,1\}$. If $n\in\{1+j,3+j,+5+j,\cdots\}$, then

$$\|f^{(k)}-s^{(k)}_{3,f}\|_{C[0,1]}=O(\bar{\Delta}^{3-k})\quad(k=0,1,2)\quad\forall f\in V^3_i$$

is equivalent to Eq. (1).