1982年 第2卷 第1期
Vol.2, No.1, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

关于正态积分的一个不等式*

王锦功

（吉林大学）

记标准正态密度

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right). \tag{1}$$

形如

$$\int_x^\infty p(u)du \tag{2}$$

的正态积分在实际应用中非常有用．正因如此，不少作者曾研究它，并给出了某些重要的不等式．

Gordon 在［1］中得到了不等式

$$\frac{x}{x^2+1}p(x)\leqslant\int_x^\infty p(u)du\leqslant\frac{1}{x}p(x),\quad x>0. \tag{3}$$

Birnbaum［2］及 Sampford［3］分别改进了 Gordon 的下界与上界，得到了不等式

$$\frac{\sqrt{4+x^2}-x}{2}p(x)\leqslant\int_x^\infty p(u)du,\quad x\geqslant 0, \tag{4}$$

和

$$\int_x^\infty p(u)du\leqslant\frac{4}{3x+\sqrt{x^2+8}}p(x)\equiv S_1(x),\quad x>-1. \tag{5}$$

Tate［4］进一步改进了 Birnbaum 的下界和 Gordon 的上界，得到了不等式

$$T_0(x)\equiv\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\exp\left(-x^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\int_x^\infty p(u)du$$

* 原稿于 1981 年 6 月 9 日收到．全文曾于 1981 年 3 月在全国数理统计学术大会上宣读．1982 年 5 月压缩．推荐者：周光亚（吉林大学数学系）

$$\leqslant \frac{1}{2}+\frac{p(x)}{x}-\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{p(x)}{x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \equiv T_1(x),\quad x\geqslant 0. \tag{6}$$

用（5）和（6）作为（2）的上方逼近，变量x在区间〔0,∞）上取值，有时（5）比（6）优越，有时（6）比（5）优越。

我们的主要结果是用作者在文〔5〕中提出的“分划替代”法，能得到关于正态积分估计的一个新的不等式

$$W_0(x)\leqslant\int_x^{\infty}p(u)du\leqslant W_1(x),\quad x\geqslant 0, \tag{7}$$

此处

$$W_0(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{2}{3}\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{\pi}x^2\right)-\frac{1}{3}\exp\left(-\frac{2(3-\sqrt{3})}{\pi}x^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

$$W_1(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{2}{3}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)-\frac{1}{3}\exp\left(-\frac{2}{3}x^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

对此还有

定理 1　对一切实数$x\geqslant 0$，有

$$T_0(x)\leqslant W_0(x). \tag{10}$$

由（7）和（10），可见下方不等式（7）是（6）在整个区间上的一种改进。关于上方不等式，在〔0,∞）上，以0.1为步长，分别计算$W_1(x)$，$T_1(x)$和$S_1(x)$的值，再进行比较，可以看出在（0,1.5）上，有

$$W_1(x)<T_1(x), \tag{11}$$

而在（0,0.5）上，有

$$W_1(x)<S_1(x). \tag{12}$$

可见上方不等式（7）是（5）和（6）的一种局部改进。

进一步，按文〔5〕中“分划加细”的方法，可以得到

定理 2　对一切实数$x\geqslant 0$，有

$$\underline{W}_i(x)\leqslant\int_x^{\infty}p(u)du\leqslant\overline{w}_i(x),\quad x\geqslant 0, \tag{13}$$

这里

$$\underline{W}_i(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\sum_{k=1}^{i}a_k\exp(-b_kx^2)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

$$\overline{W}_i(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\sum_{k=1}^{i}a_k\exp(-c_kx^2)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

其中

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{4\beta_k}{\pi}, \\ b_k = \dfrac{\operatorname{tg}\left(\sum\limits_{j=1}^{k}\beta_j\right) - \operatorname{tg}\left(\sum\limits_{j=1}^{k-1}\beta_j\right)}{2\beta_k}, \quad k=1,2,\cdots,i \\ c_k = \dfrac{1}{2\cos^2\left(\sum\limits_{j=0}^{k-1}\beta_j\right)} \end{cases} \tag{16}$$

我们约定 $\beta_0=0, \beta_k>0, k=1,2,\cdots,i$，并且 $\sum\limits_{k=1}^{i}\beta_k=\frac{\pi}{4}$. 特别，对于取 $i=2, \beta_1=\frac{\pi}{6}$, $\beta_2=\frac{\pi}{12}$ 时，公式（13）的特殊情形就成为（7）了.

给出定理 2 的证明并不困难. 只要按［5］中之（三）的思想，对任意给定的一组 i 种类型张角 $2\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{i-1}, 2\beta_i$，在方形域 R_{is} 中，作相应的分划图形，具体步骤略述如下：

1. 将 R_{is} 分成 8（$i-1$）块多边形，使其以原点 O 为顶点的张角依次为 $2\beta_1$, β_2, $\cdots$, $\beta_{i-1}, 2\beta_i$，等等.

2. 在以原点 O 为顶点，张角分别为 $2\beta_1, \beta_3, \cdots, \beta_{i-1}, 2\beta_i$ 的 8（$i-1$）块多边形内作等面积的扇形.

3. 在以原点 O 为顶点，张角分别为 $2\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{i-1}, 2\beta_i$ 的 8（$i-1$）块多边形内作内接扇形，使其半径分别为

$$x\left[\cos\left(\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j\right)\right]^{-1}, \quad k=1,2,\cdots,i.$$

4. 以原点 O 为圆心作与 R_{is} 等面积的圆.

以上法画出的分划图形为基础，利用“分划替代”法和正态密度的性质，便可推得不等式（13）. 附带可得下述结果：

1° $\{\underline{W}_i(x)\}$ 是一单调上升函数列，$\{\overline{W}_i(x)\}$ 是一单调下降函数列. 其极限皆为正态积分（1）.

2° 对任意 $i\geqslant 2$, $x\geqslant 0$，有 $T_0(x)\leqslant \underline{W}_i(x)$. 由此可见，下方不等式（13）是 Tate 不等式（6）在整个区间上的一种改进.

3° 对 $i\geqslant 2$，上方不等式（13）是 Sampford 不等式（5）和 Tate 不等式（6）的一种局部改进，改进的区间长度将随 i 的增大而变大. 如在（13）中，以 $i=9$ 为例，取 $\beta_k=\frac{\pi}{36}$, $k=1,2,\cdots,9$ 时，通过计算比较，可以看出在区间（0, 2.7）上，有

$$\overline{W}_9(x) < T_1(x), \tag{17}$$

而在区间（0, 0.8］上，有

$$\overline{W}_9(x) < S_1(x). \tag{18}$$

比较（17）和（11），（18）和（12），便知有 3°.

综上所述，作为正态积分（2）的估计，显然，用公式（13）比用 Sampford 公式（5）和 Tate 公式（6）更加优越.

参 考 文 献

[1] Gordon, R. D. Values of Mill's ratio of area to founding ordinate of the normal probability integral for large values of the argument, *Ann. Math. Stat.*, 12 (1941), 364—366.

[2] Birnbaum, Z. W., An inequality for Mill's ratio, *Ann. Math. Stat.*, 13 (1942), 245—246.

[3] Sampford, M. R., Some inequalities on Mill's ratio and related functions, *Ann. Math. Stat.*, 24 (1953), 130—132.

[4] Tate, R. F., On a double inequality *of the normal distribution Ann Math. Stat.*, 24 (1953), 132—134.

[5] 王锦功，概率积分在整个区间上的近似式，吉林大学自然科学学报，1981 年第 4 期，35—40.

An Inequality on the Normal Integral

By Wang Jin-gong (王锦功)

Abstract

The purpose of this paper is to give an inequality about the normal integral

$$\int_x^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}du$$

and it has been shown that our inequality is an improvement of Tate's and Sampford's inequality.