1982年 第2卷 第4期
Vol.2, No.4, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

Riemann Zeta函数的一个表达式*

张南岳
（北京大学）

在本短文中，我们考虑整函数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}}$，得到 Riemann Zeta 函数$\zeta(s)$的一个表达式.

由伽码函数知，当$\sigma=Re(s)<2$时，

$$\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{-\frac{s}{2}}dt.$$

令 $t=\frac{x^2}{n^2}$，

$$\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\frac{1}{n^s}=\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{n^2}}\frac{1}{n^2}x^{1-s}dx.$$

当$1<\sigma<2$时，上式对n求和，得到

$$\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=2\int_0^{\infty}f(x)x^{1-s}dx, \quad (1)$$

其中
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\zeta(2k+2)}{k!}x^{2k}. \quad (2)$$

设$g(s)=\frac{1}{t^2}e^{-\frac{x^2}{t^2}}$，由 Euler-Maclaurin 公式

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g(n)=\int_0\frac{1}{t^2}e^{-\frac{x^2}{t^2}}dt+\frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_0^{\infty}\psi_q(t)\frac{1}{t^{q+2}}P_q\left(\frac{x^2}{t^2}\right)e^{-\frac{x^2}{t^2}}dt$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2x}+\frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_0^{\infty}\psi_q(t)\frac{1}{t^{q+2}}P_q\left(\frac{x^2}{t^2}\right)e^{-\frac{x^2}{t^2}}dt$$

*1981年10月5日收到．1982年4月26日收到压缩稿．

其中 $P_q(t)$ 是 q 次多项式，$q>1$，$\psi_q(t)=B_q(t-[t])/q!$，$B_q(t)$ 是 Bernoulli 多项式.

若记 $F(x)=f(x)-\frac{\sqrt{\pi}}{2x}$，那么因为 $|\psi_q(t)|\leqslant C_q$（与 q 有关的常数），有

$$|F(x)|\leqslant C_q\frac{1}{x^{q+1}}\int_0^\infty t^q P_q(t^2)e^{-t^2}dt=O\left(\frac{1}{x^{q+1}}\right).$$

由(1)式，当 $1<\sigma<2$ 时，

$$\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=2\int_0^1 f(x)x^{1-s}dx+2\int_1^\infty f(x)x^{1-s}dx$$

$$=2\int_0^1 f(x)x^{1-s}dx+\frac{\sqrt{\pi}}{s-1}+2\int_1^\infty\left(f(x)-\frac{\sqrt{\pi}}{2x}\right)x^{1-s}dx$$

上式右边的第一项在 $\sigma<2$ 是解析的，第三项是整函数. 由解析开拓，上式当 $\sigma<2$，且 $\sigma\neq 1$ 时成立.

又当 $\sigma<1$ 时，$-\int_0^1 x^{-s}dx=\frac{1}{s-1}$，所以当 $\sigma<1$ 时，

$$\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=2\int_0^\infty\left(f(x)-\frac{\sqrt{\pi}}{2x}\right)x^{1-s}dx.$$

另一方面，由(2)式，当 $\sigma<2$ 时，

$$\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=2\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k\zeta(2k+2)}{k!}\int_0^1 x^{1+2k-s}dx+\frac{\sqrt{\pi}}{s-1}+2\int_1^\infty F(x)x^{1-s}dx$$

$$=2\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k\zeta(2k+2)}{k!(2+2k-s)}+\frac{\sqrt{\pi}}{s-1}+2\int_1^\infty F(x)x^{1-s}dx.$$

上式的第一项是一个亚纯函数，第三项是整函数. 因此由解析开拓，上式在 $s\neq 1,2,4,6,\cdots$ 成立.

因为 $\zeta(2k+2)=\frac{(-1)^k(2\pi)^{2k+2}B_{2k+2}}{2(2k+2)!}$，$B_k$ 是 Bernoulli 数，最后得到

$$\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\sum_{k=1}^\infty\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{(k-1)!(2k)!(2n-s)}+\frac{\sqrt{\pi}}{s-1}+2\int_1^\infty F(x)x^{1-s}dx.$$

$(s\neq 1,2,4,8,\cdots)$.

参 考 文 献

Tennenbanm, J., On the Function $\sum_{n=0}^\infty\frac{\zeta(n+2)}{n!}x^n$, *Math. scand.*, 41(1977), P242—248.