1982年 第2卷 第4期
Vol.2, No.4, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

悖论与数学基础问题(II)*

徐利治 朱梧槚 袁相碗 郑毓信
(吉林大学) (南京大学数学系)

在本文中，主要讨论悖论定义问题，此外，还将对‘悖论的起源’、‘数学三次危机’和‘Zermelo 解决悖论的方案’等内容作简要的综述和评论. 至于 Russell 对悖论的解决方案与悖论成因等内容的讨论将在本文的续篇中给出.

§1 悖论的定义和起源

所谓悖论，从字面上讲就是荒谬的理论. 那么，为什么要把悖论这样一个晦涩古怪的名词来取代这一通俗易懂的说法呢？按照美国柯朗数学研究所 M. Kline 教授的说法，那是为了不把自相矛盾的真相摆在桌面上，才采用了这样一个婉转的措辞[1]. 当然，M.Kline 教授是针对 ‘Paradoxes’ 才这样说的，并不是针对‘悖论’所说，因此，我们在这里不是直接引用而是引而套用了 M. Kline 的说法. 当然，现在时间一长，悖论这一词汇也用习惯了，其真实函义也就人人皆知了.

关于悖论的定义，当前流行的说法，如‘悖论是一种导致逻辑矛盾的命题. 这种命题，如果承认它是真的，那么它又是假的；如果承认它是假的，那么它又是真的’[19]. 又如‘悖论是指这样一个命题 A，由A出发，可以找到一语句 B，然后，若假定B真，就可推得 $\neg$B 真，亦即可推出B假. 若假定 $\neg$B 真，即B假，又可推导出B真’[2]. 再有如‘一个命题构成一个悖论，如果由它的真可以推出它的假，而由它的假又可以推出它的真’[3]. 诸如此类的定义法，有它合理的一面，但有不够全面的地方. 第一，任何一个悖论在实质上都相对地被包含在某个理论体系中，例如，著名的 Russell 悖论是一个被包含在古典集合论系统中的悖论. 可能有的悖论看上去说不象针对那一个理论系统，其实只是这个悖论所属系统的原始概念和基本原则没有明朗化. 所以，一个悖论总是相对于某个理论系统而言的. 如果竟有这样一个悖论，它将被包含在历史的和将来的任何一个理论体系中，那么，

* 1981年6月15日收到.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

我们就既不要去研究什么悖论的成因，也不必去考虑排除悖论的办法，因为既有这种绝对的悖论出现，那么研究它也无济于事．当然，我们也不相信会有这种悖论出现．由此可见，当我们给悖论下定义的时候，如果忘记了‘相对于某一理论体系’这个前提，将会造成怎样的误解．第二，并非每个悖论都要陈述为一个命题或某一语句的形式，有的悖论往往要有一个推演过程来表现．第三，从一些著名的悖论的陈述形式来看，人们并不习惯于要求把每个悖论都化归为‘肯定等价于否定’的形式，也可用某一系统中并存的两个互相矛盾的命题来表述一个悖论．例如，古典集合论中的Cantor悖论就是一例，人们习惯于把它表述为$\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{P(M)}}$和$\overline{\overline{M}}\geqslant\overline{\overline{P(M)}}$这样两个互相矛盾的命题，并没有也不必要化归为两个矛盾命题的等价式．综上所述，我们认为孤立地用‘肯定等价于否定’来作为悖论的定义是不够合理而全面的．

所以，我们主张采用 A. A. Fraenkel 与 Y. Bar-Hillel 的说法，‘如果某一理论的公理和推理原则看上去是合理的，但在这个理论中却推出了两个互相矛盾的命题，或者证明了这样一个复合命题，它表现为两个互相矛盾的命题的等价式．那么，我们就说这个理论包含了一个悖论’[4]．我们认为，这样来定义悖论较为全面而合理，因为在这里，首先指明了任何一个悖论总是相对于某一理论系统而言的．其次又指出了一个悖论可以表现为某一理论系统中两个互相矛盾的命题的形式．最后才指出，悖论也可集中地表现为‘肯定等价于否定’的复合命题．这样看来，当前流行的那种定义法，就只是抽取了 Fraenkel 陈述中的最后两句话作为悖论的定义，这当然是不够全面而合理了．另外，在 Fraenkel 陈述中的第一句话，不光是指明了任一悖论总相对于某一系统这一点，十分重要的是在这里强调了该系统的公理和推理原则本来看上去是合理的，如果不强调指出这一点，那么我们就可轻而易举地把一些明显的矛盾命题凑合在一起算作一个系统，然后宣布在这个系统中创造性地发现了许多悖论．

关于悖论的起源，可以追溯到古希腊和我国先秦哲学时代，但在那时及其往后的一个相当长的历史时期中，悖论往往泛指那些推理过程看上去是合理的，但推理的结果却又违背客观实际．例如，著名的Zeno悖论便属于这一类悖论，可参阅参考文献[5]中的有关论述．

在历史上，还有另一种与之相反的情形而称之为悖论的，那就是由于新观念的引入而违背了具有历史局限性的传统观念，这也一时称为悖论的发现．这就不是推理看上去好象是合理的问题，而是传统观念貌似真实的事了．例如 Galilei 对‘平方数与自然数一一对应’的发现而矛盾于‘全体大于部分’的原则，在历史上也称为 Galilei 悖论．这就不是 Galilei 的发现在推理上的问题，而是由于‘全体大于部分’的直观原则是从有限数量的事物关系中抽象出来的，自然不适用无穷集合的情形了．诸如此类的悖论还可列举，例如，鳄鱼的二难论，……等等．但所有这些与我们今天所讲悖论的含义已略有距离．因之，述其一、二就不作更多的讨论了．

历史上，与今天所讲悖论的含义较为切近并可看作悖论之直接起源的是这样一件事．公元前六世纪，克里特哲学家 Epimenides 发现了一个实际上没有构成悖论的‘悖论’．其原始命题是；一个克里特人说：‘所有的克里特人所说的每一句话都是谎话’．试问所说这句话是真是假．如果它是真话，则因这句话也出自一个克里特人之口，故按此话的论断可推知这句话为假．因之，由这句话的真可导至它为假．但反过来，若设这句话为假，则并

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

不导致任何矛盾．但仅由它的真可导致它为假这一点而言，就足以引人注目的了．

在此顺便指出：上述那个并非悖论的‘悖论’却至今有被误认为‘悖论’的情况，其实是一种误解或疏忽．因为假定这句话是假，并不引起矛盾，更推不出它为真，至多说并非每个克里特人总说谎．另外，在历史上，这个原来认为是悖论而实际上不是悖论这一点也早已为人们所觉察，并设法修改它．最先是Eubulides(BC4世纪)把上述命题改述为：‘现在我说的是一句假话’．这就是我们下文所要分析讨论的‘强化了的扯谎者悖论’，对此暂且不谈．又有Russell指出，如果假定了‘在此克里特人说这句话之前的每个克里特人所说的每句话皆为假话’这样一个前提，则上述原始命题便构成悖论．因由原始命题的真导至它为假已如上述，现假定原始命题为假，则至少有一个克里特人说过一句真话，但因为有了如上这样一个前提，这就有且仅有这一原始命题是真话．故又由它的假导至了它为真．这就构成了现代意义下的一个悖论．但是这样一个前提太强，无非是在人为地制造悖论罢了．

再举一个例子，一个人说：‘上帝是全能的，全能就是胜过一切’．试问此话真、假如何？设其为真，则可问：‘上帝能否创造一个对手来击败上帝呢’？如果能，则上帝就要被上帝自己创造出来的对手击败，故上帝并非全能．如果不能，就说明上帝还有事情做不到，即并非全能．不论何说，均导至‘上帝全能’这句话为假．但是，反过来设这句话为假，则并不导至任何矛盾，全能的上帝本来就不存在．

以上二例均不构成悖论，却指明了一个逻辑推理，即当否定者自身被包括在被否定的对象中时，则否定者必然走向它的反面．‘上帝全能’原要否定一切，因为上帝自己也置身于这一切之中，结果必然否定上帝自己．前例中那个克里特人也是一样，由于他自身就是克里特人，必然导至他自身说谎．

后来，人们顺着Epimenides的原始命题，终于构造了等价于上述Eubulides命题的‘强化了的扯谎者悖论’，即‘永恒性说谎者悖论’，陈述如下：

〈在本页本行里所写的那句话是谎话〉

由于上一行里除了这句话本身之外别无任何其他的话，因此，这是一句话中套话的话，而被套之话就是套它之话自身，于是若设该话为真，则要承认该话之结论，从而导至该话为谎话．若设该话为谎话，则应肯定该话结论的反面为真，因之推出该话为真．

这就真正构成了现代意义下的一个悖论．问题出在什么地方？这是由于语言层次的混乱，被论断是真是假的话与去论断它的话混而为一．如果在下一行写上一句话：

（A）现正在下雨．

然后再在下一行写一句话

（B）前一行里写的那句话是谎话．

这就不能构成悖论．话（B）是真是假，要看（A）的真假，而（A）的真假决定于现在是否下雨．在这里，话（A）是被论断的话，而话（B）是对（A）去作论断的话．故‘强化了的扯谎者悖论’的症结就在于作论断的话与被论断的话混而为一．所以，这个悖论的排除在于语言的分层，这正是近代语义学产生发展的原因，也正是语义学所研究的重要内容．

最近美国数理逻辑学家Smullyan写了一本书，其书名为‘这本书的书名叫什么?’现把这本书放在桌子上，并有甲、乙、丙三个人围着它，因为甲不识字而指着该书问：‘这本

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

书的书名叫什么?’而乙又接着指着这本书说：‘这本书的书名叫什么?’这时丙在考虑，刚才乙讲这句话算是回答甲的问题呢？还是在重复甲的提问呢？而且乙可以叫别人永远猜不着。因为这既是问也是答。但是，如果乙诚心想回答甲的问题而又愿意把话说得清楚些：‘这本书的书名就叫做《这本书的书名叫什么?》’。这就不致引起丙的烦恼了。在这里，同样存在着语义学的问题。

§2　悖论举例和数学三次危机

悖论的出现，本来并没有引起数学家和逻辑学家的重视，似乎古昔相传的悖论只是人为地制造出来的话和事，并不值得介意。直到十九世纪九十年代，悖论在数学的基础学科集合论中出现了，这样才开始引起数学家的注意，例如，下述Burali-Forti 悖论最早是集论的创始者Cantor在1895年发现的，但他没有公开，继之由Burali-Forti 在1897年发现。如所知，在超限数论中有如下的一些定理[7]。

定理1　任何一个良序集A不能与A的任何截段A_a相似。

定理2　凡由序数所组成的集，按其大小为序排列时，必为一良序集。

定理3　一切小于序数α的序数所组成的良序集W_α的序数$\overline{W}_\alpha$就是序数α，即 $\overline{W}_\alpha=\alpha$。

现将一切序数汇集在一起组成一集，记为Γ，这由 Cantor 用以造集的概括原则是可以办到的。于是，由定理2，Γ可编成良序集，故Γ有一序数r，即$\overline{\Gamma}=r$。既然Γ是一切序数所组成的良序集，故$r\in\Gamma$，于是Γ_r便是Γ之一元素r截Γ所得的一个截段，由定理3，$\overline{\Gamma}_r=r$。因此，由$\overline{\Gamma}=r$和$\overline{\Gamma}_r=r$而知$\overline{\Gamma}=\overline{\Gamma}_r$，这表明良序集$\Gamma$的序数与它的一个截段$\Gamma_r$的序数相同，即$\Gamma$与$\Gamma_r$相似，矛盾于定理1，这就是 Burali-Forti 悖论。

继此之后，过了两年，Cantor在1899年又发现了一个悖论，人们称之为Cantor悖论，现陈述如下：

如所知，在古典集论中有所谓

Cantor定理　任何集合M的基数$\overline{\overline{M}}$小于幂集P(M)的基数$\overline{\overline{P(M)}}$。其中所谓幂集，就是任给一集M，由M的一切子集所组成的集合称为M的幂集，并记为P(M)。

这样一来，根据集合论的概括原则，可有一切集合所组成的集合u。由 Cantor 定理知$\overline{\overline{u}}<\overline{\overline{P(u)}}$，另一方面，又可证$P(u)$为$u$的一个子集。事实上，设$x\in P(u)$，则$x$为$u$的一个子集，故$x$为一集合，故$x\in u$。因之$P(u)\subseteq u$，即$P(u)$为$u$的子集，从而$P(u)$的基数小于等于$u$的基数，即$\overline{\overline{P(u)}}\leqslant\overline{\overline{u}}$，矛盾。这就是Cantor悖论。

直到1900年为止，虽然以上集合论中的悖论出现了，但是，一则由于Cantor对此不加公开，二则也并不引起知情的数学家的不安，认为这仅仅是牵涉到集合论中一些较为专门的技术性问题，只要把一些定理的证明作些调整或修改，便可解决问题，从而在当时竟形成了一个充满着安全感的局面，亦即：

‘集合论的概念是逻辑概念，而且一般认为集合是属于逻辑的，逻辑的理论似乎应该是没有矛盾的。因此，归约到了集合论，看来快要达到目的了。的确，在1900年于巴黎召开的国际数学会议上，法国大数学家Poincaré宣称：“数学的严格性，看来今天才可说是实

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

现了”。事实上，当时的数学家都喜气洋洋，非常乐观。

以前，对于非欧几何的不矛盾性，欧氏几何的不矛盾性，实数论的不矛盾性等等，人们虽然不能马上作出证明，但大家都相信不会导致矛盾，事实上也从未遇到出现矛盾的麻烦。

现在已把这些理论的不矛盾性直接间接地归约到集合论的不矛盾性，以致人们更加相信集合论绝不会出现矛盾’[6]。

但是，安全的想象为时不长，事隔不到两年，Russell 悖论出现了，这可惊动了整个西方哲学、逻辑学界和数学界。因为人们对 Russell 悖论稍加分析，就发现了只要用逻辑术语来替代集合论术语，Russell 悖论就要直接牵涉到逻辑理论本身，从而直接冲击了数学和逻辑学这两门一向认为严谨的学科，这就不能不使悖论问题成为数学界和逻辑学界认真研究的课题，现将 Russell 悖论陈述如下：

集合可分为两种：一种是本身分子集，例如，‘一切概念所组成的集’，由于它本身也是一个概念，所以必为该集自身的一个元素。又如‘一切集合所组成的集合’也是一个本身分子集。另一种是非本身分子集，例如，自然数集合 N 决不是某个自然数 n。这样，任给一集 M，它不是本身分子集就是非本身分子集，不应有其他例外，现考虑‘一切非本身分子集的集 $\sum$’，试问 $\sum$ 是那一种集合？若设 $\sum$ 为本身分子集，则 $\sum$ 为自身的一个元素，而 $\sum$ 之每一元皆为非本身分子集，故 $\sum$ 亦应是一个非本身分子集，再设 $\sum$ 为非本身分子集，而一切非本身分子集皆在 $\sum$ 之中，故 $\sum$ 亦应在其中，因之 $\sum$ 又是一个本身分子集，不论那种说法都说不通。这就是 Russell 悖论。

Russell悖论的出现不仅对Poincaré 关于‘完全的严格性已经达到’的说法是一个否定，而且直接动摇了他企图通过集论来为分析奠基的信心。又如德国数学家 Dedekind 正在为分析数学和数论奠基而著述〈什么是数学，其意义如何?〉一文，逻辑学家兼数学家 Frege 的巨著〈关于算术概念〉也接近完成，由于他们的理论都涉及集合概念而延搁了上述著作的出版。

Russell 悖论作为被包含在古典集合论里的一个悖论，不仅很快发现它可化归为最基本的逻辑概念的形式，而且进一步发现能用日常语言来表述它的基本原则，Russell 自己就在1919年把它改写为著名的‘理发师悖论’。现陈述如下：

李家村上所有有刮胡子习惯的人可分为两类，一类是自己给自己刮胡子的，另一类则是自己不给自己刮胡子的，李家村上有一个有刮胡子习惯的理发师自己约定：‘给而且只给村子里自己不给自己刮胡子的人刮胡子’。现在要问这个理发师是属于那一类人？如果说他是属于自己给自己刮胡子的一类，则按他自己的约定，他不应该给他自己刮胡子，因之是一个自己不给自己刮胡子的人。再设他是属于自己不给自己刮胡子的一类，则按他自己的约定，他必须给他自己刮胡子，因之他又是一个自己给自己刮胡子的人了。种种说法都不通，这就是所谓理发师的悖论。

五

当然，Russell 悖论及其变形是大家所熟悉的，由于它的重要性不能不予叙述。顺便指出，Zermelo 也曾同时独立地发现了这个悖论，所以也有 Russell-Zermelo 悖论之称。此后，西方数学界和逻辑学界就相继出现了各种其他形式的悖论，再举例一、二。

Richard 悖论在 1905 年发现，今选定一种语言，例如英语，则任一英语的语句，它总

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

是由26个拉丁字母中的一些字母(可重复出现)、单字与单字之间的空档和逗点所组成的一个符号序列，而且是有穷长的，否则这句话便是一句永远说不完的话而不成其为语句了．总之，我们把任一英语的语句或一段话理解为由28个符号中任选并可重复出现的有穷序列．但是，'由一切这样的元——这种元，能用一有限或可数的符号系中的有限多个符号来表示——所组成的集是可数的，这里，在有限符号系的情况下并容许任意长的符号复合．事实上，

$$\aleph_0+\aleph_0^2+\cdots+\aleph_0^K=\aleph_0,$$

$$\aleph_0+\aleph_0^2+\cdots=\aleph_0,$$

$$n+n^2+\cdots=\aleph_0.$$

例如，所有用有限多个字母併写成的任意长的字(即有意义或无意义的字母的复合)所组成的集是可数的．同样，由一切书籍，一切交响乐章以及诸如此类的东西组成的集也是如此'[23]．因此，一切英语的语句集的势是可数的．

今考虑所有能用有限句英语的语句陈述的十进位小数所组成的集E，当然$\overline{\overline{E}}\leqslant\aleph_0$，如此E的一切元便可排成可数序列

$$E:\ \theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \cdots,\ \theta_n,\ \cdots;$$

现定义一个十进位小数N如下：'如果E中第n个小数的第n位小数的数字是p，则规定N的第n位小数的数字是$p+1$，而当$p=9$时，则为0'［英译为：Let N be a number definied as follows, If the nth figure in the nth decimal is p, let the nth figure in N be $p+1$(or 0, if $p=9$)］．因此，N是一个能用有限句英语的语句所陈述的十进位小数，故N∈E．但又由N的定义可知N与E中之每一个十进位小数皆有一有穷差位．故按有穷差位判别法可知，N与E中之一切元皆相异，故N∉E．矛盾．此即Richard悖论．

基于所谓'有穷可定义概念'(Dixon, 1906)可以构造出与Richard悖论同类型的一系列悖论，举二例如下：

1 试考虑一切能用有限句英语语句陈述的超穷序数的集L，并简称L中之任一元为可定义的超穷序数，完全类似地可知$\overline{\overline{L}}=\aleph_0$，但超穷序数却有不可数多，那么不妨称那些不属于L的超穷序数为不可定义的超穷序数．这些不可定义的超穷序数中必有一个最小的，设为r，于是$r\notin$L．另方面，我们就用'the least indefinable ordinal'［最小的不可定义序数］来陈述r，则应有$r\in$L．矛盾．此为一例．

2 由于每一个自然数都能用一个英文词汇或短语去描述它，而每个英文词汇或短语总是用有限多个英文字母组成的，其中凡重复几次出现的字母就同时算几个字母，例如，100是由h、u、n、d、r、e、d七个字母描述的，同时也可用'直次于101之前的自然数'或'大于99的最小自然数'等等英文的短语去描述，那么，在各种各样的描述中总有一种所用的字母最少，特称这种描述为最简描述．今考虑：〈一切至多只用100个英文字母就能描述的自然数的集S〉，可证S为有限集合．事实上，对于每一个英文字母，可有26种选择，或者不选，计有27种选择．因之，充其量只有27^{100}种可能的描述，就算其中每一种描述都是上述意义下的最简描述，那么，由这27^{100}种描述也只能描述有限多个自然数．因之，S之元素的个数必为有限．令N为全体自然数的集，故有$M=N\backslash S\neq\phi$，既然M为非空自然数

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

集，M中必有最小自然数m(良序集之任一子集必有首元)，因此，一方面由于$m\in M$而知[m是一个仅用少于或等于100个英文字母所不能描述的自然数]．但是，我们可用下面一句话来描述m：'用至多100个字母所不能描述的自然数中最小的那个自然数'．现在把这句话译成英文：[the least positive integer which cannot be described in at most hundred letters]，只要数一下即知只用了67个字母，可见，[m是一个用少于100个字母所能描述的自然数]，故$m\in S$，于是$m\notin M$，矛盾．总之，这是用少于100个英文字母去描述了一个少于或等于100个字母所不能描述的自然数．这是与Richard悖论同类型之悖论的又一例．

我们再讲一个Grelling悖论，它在1908年被发现，在我们日常语言中，一个形容词可按其所描述的性质是否符合于该形容词本身而分为两类；凡是符合的称为自状的，凡是不符合的称为非自状的．例如，形容词'中文的'是自状的，因为不仅可以指着任何中文的'书'、'语句'或'词'等等说：'这是中文的'，同时也可指着'中文的'三个字说：'这是中文的'，即可用它自身来形容它自身，或者说形容词所形容的性质与它自身相符合，所以它是自状的．反之，'英文的'却是非自状的，我们能指着'book'说：'这是英文的'，却不能指着'英文的'三个字说：'这是英文的'，因为它明明是中文字，亦即'英文的'这个形容词所描述的性质与它自身不相符合．又如'字'是自状的，因为它本身也是一个字．但'圆的'是非自状的，因为它本身不是圆的，而是方块的．如此，则所有的形容词被划分为自状的与非自状的两大类．但'非自状的'也是个形容词，试问它属于那一类．若设形容词'非自状的'是非自状的，则正好与它自身相符合，那么按定义它应该是'自状的'．再设'非自状的'是自状的，则正好与它自身不相符合，则它又应该是'非自状的'．不论哪种说法都说不通，这就是Grelling悖论．

还有许多其他不同形式的悖论，我们就不一一列举了．但是，不能不把与悖论问题相关的并称为数学史上三次危机的大事作一概要的陈述．

'公元前五世纪，一个希腊人，Pythagoras学派的希帕索斯，发现了等腰直角三角形的直角边与斜边不可通约，从而导致了数学的第一次危机'[6]．事情是这样的，当时人们还处在刚刚从自然数概念脱胎而形成有理数概念的早期阶段，对于无理数的概念是一无所知．因此，当时人们的普遍见解是确信'一切量都可以用有理数来表示'．亦就是说，在任何精确度的范围内的任何量，总能表示为有理数，这在当时已成为希腊人的一种普遍信仰．这就是Pythagoras学派形成其观点和信条的前提，在毕氏学派看来，不仅深信数的和谐与数是万物的本源，而'宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数比'已成为他们的信条．如此，上述希帕索斯的这一发现，就成为'荒谬'和违反常识的事，不仅严重触犯了毕学派的信条，同时冲击了当时希腊人的普遍见解，不能不使人们感到惊奇不安，同时也可看作是一种悖论的出现，所以这一事件堪称为数学史上的第一次危机．相传毕氏学派就因这一发现而把希帕索斯投入海中处死，因为他在宇宙间搞出了一个直接否定毕氏信条的怪物．但是希帕索斯的伟大发现却是淹不死的，它以顽强的生命力而被广为流传，迫使人们去认识和理解'自然数及其比(有理数)不能包括一切几何量'，迫使毕氏学派承认这一悖论和提出单子概念去解决这一悖论．单子概念是一种如此之小的度量单位，以致本身是不可度量却又要保持为一种单位．这或许是企图通过'无限'来解决问题的最早努力．但是，毕

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

氏学派的努力却又引起了Zeno的非难．Zeno认为一个单子或者是0或者不是0，如果是0，则无穷多个单子相加也产生不了长度，如果不是0，则由无穷多个单子组成的有限长线段应该是无限长的，不论何说都矛盾[9]．所以，连同著名的Zeno悖论在内也都列为数学第一次危机的组成部分．另一方面，又由于上述可称为希帕索斯悖论的出现，进一步促使人们从依靠直觉、经验而转向依靠证明，导至了公理几何学与逻辑学的诞生．

数学史上把十八世纪微积分诞生以来在数学界出现的混乱局面称为数学的第二次危机．如所知，在十七世纪和整个十八世纪由于微积分理论的产生及其在各个领域里的广泛应用，使得微积分理论得到了飞速的发展．但在另一方面，整个微积分理论却建立在含混不清的无穷小概念上，从而没有一个牢固的基础，遭到了来自各个方面的非难和攻击．其中以Berkeley大主教对微积分的攻击最为激烈．'Berkeley批判了Newton的许多论点，例如，在<求曲边形的面积>一文中，Newton说他避免了无穷小，他给x以增量0，展开$(x+0)^n$，减去x^n，再除以0，求出x^n的增量与x的增量之比，然后扔掉0的项，从而得到x^n的流数．Berkeley说Newton首先给x一个增量，然后让它是0，这违背了背反律'[5]．'至于导数被当作y与x消失了的增量之比，即dy与dx之比，Berkeley说它们既不是有限量也不是无穷小量，但又不是无．这些变化率只不过是消失了的量的鬼魂'[5]．Berkeley之激烈攻击微积分主要是出于他极端恐惧于当时自然科学的发展所造成的对宗教信仰的日益增长的威胁．但也正由于当时的微积分理论没有一个牢固的基础．致使来自各方面的非难和攻击似乎言之有物．历史上，曾称Berkeley如上之论述为Berkeley悖论，而且迫使数学家不能不认真对待这个悖论，借以解除数学的第二次危机，Cauchy详细而有系统地发展极限论，Dedekind在实数论的基础上证明极限论的基本定理，还有Cantor与Weierstrass都加入了为微积分理论寻找牢固基础的工作，发展了极限理论．

普遍认为，由于严格的微积分理论的建立，上述数学史上的两次危机已经解决．但在事实上，建立严格的分析理论是以实数理论为基础的，而要建立严格的实数理论又必须以集合论为基础，而集合论的诞生和发展，却又偏偏出现了一系列的悖论，由此而构成了更大的危机．在今天，人们恰当地把集合论悖论的出现及其所引起的争论局面称之谓数学的第三次危机．因此，在一定程度上讲，数学第三次危机乃是前两次危机的发展和深化，因为集合论的悖论所涉及的问题更加深刻，涉及的范围更为广阔．本文及其续篇的内容实际上就是从某一角度全面讨论数学的第三次危机，因为我们在这里始终贯穿了对这次危机的产生和寻找解决方案等情况的讨论和描述．

§3 ZERMELO对悖论的解决方案

随着悖论的出现和研究，推动了人们从逻辑和哲学的角度深入研究数学基础中的问题，并取得了极积的成果．'既然集合论出现了矛盾，人们当然可以把数学建基于别的理论之上，而把集合论彻底抛弃，但是，经过探索，发觉别的理论更不好弄，更难于运用，不及集合论方便有力，所以大家都致力于对集合论的改造了'[6]．'改造的方案主要有二：一是Russell的类型论，二是Zermelo的公理集合论'[6]．

应当指出，'Russell对于悖论的研究很有贡献，这是许多数学家和逻辑学家所公认

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

的，虽然他的理论在实践上造成很大的困难，但是现有的一些解决悖论的方法，无不渊源于Russell早年提出的见解'[8]. 因为Russell是从本质上而不是从个别技术性细节上来分析悖论的，亦即'Russell把Cantor集合论所导致的悖论剥去了一切数学上技术性的枝节，从而揭示了这样一个惊人的事实，即我们的逻辑直觉（诸如关于真理、概念、存在、集合的直觉）是自我矛盾的'[10]. Russell认为'一个集合可以用两种方法予以定义，我们可以枚举它的元素，…，也可以指明它的性质．…，那种枚举式的定义称为外延性的定义，而那种指明性质的定义方法称为内涵式的定义'[11]. 基于这样一种考虑问题的准则，寻找出路的办法有两条道路可走，这就是Russell当年所指出的几个可能方向中的、Russell称之曰'量性限制理论'和'曲折理论'这样两个方向，更确切地可称之为'外延理论'和'内涵理论'. 对于Russell指出的曲折理论，后来在Quine的工作中得到了阐发，至于量性限制理论，其'最主要的特性就是对于全集或无限制的关于某种现象的概念的存在性加以限制，后来由Zermelo和其他人所发展起来的公理化集合论在涉及集合时就可以看成是对这一思想的阐发'[10]. 现在，我们就来分析讨论Zermelo等人在这方面的工作及其思想方法．

自从Russell悖论出现以后，Zermelo想借助于他所说的"划分公理"（或称分出公理）来排除它，其法是否有效，尚要看看他的具体做法再作定论．

划分公理 设L为任一集合，$R(\theta)$是与L的变元有关的一句话，则L中一切能使$R(\theta)$成真话的元素可组成一集合$L_{R(\theta)}$.

显然，$L_{R(\theta)}\subseteq L$，即$L_{R(\theta)}$为L的一个子集．

根据划分公理，可证下述定理为真．

定理 任意一集L必有一子集不是L的元素．

证明 设$\theta\notin\theta$为与L内的变元θ有关的一句话．由公理知$L_{R(\theta)}$为一集且$L_{R(\theta)}\subseteq L$，此处$R(\theta)$即$\theta\notin\theta$，其余符号意义如公理中所述．现在只要证明$L_{R(\theta)}\notin L$即可．因为这就找到了L的一个子集$L_{R(\theta)}$不是L的元素．现用反证法，假设$L_{R(\theta)}\in L$，则作为L之一元的$L_{R(\theta)}$必或使$\theta\notin\theta$为真，或使$\theta\notin\theta$为假．因此，$L_{R(\theta)}\in L_{R(\theta)}$与$L_{R(\theta)}\notin L_{R(\theta)}$两个关系中有且仅有一个成立．但是，若$L_{R(\theta)}\in L_{R(\theta)}$，则因$L_{R(\theta)}$中的每一元皆使$\theta\notin\theta$为真，于是，作为$L_{R(\theta)}$之一元的$L_{R(\theta)}$应使$\theta\notin\theta$为真，故推得$L_{R(\theta)}\notin L_{R(\theta)}$. 再设$L_{R(\theta)}\notin L_{R(\theta)}$，而这正表示作为L之一元素的$L_{R(\theta)}$使$\theta\notin\theta$成真话，从而必在$L_{R(\theta)}$之中，故又推得$L_{R(\theta)}\in L_{R(\theta)}$. 条条路都说不通．说明原先的假设$L_{R(\theta)}\in L$一事不得成立．故$L_{R(\theta)}\subseteq L$但$L_{R(\theta)}\notin L$. 证毕．

有了这条定理，即可证明Russell悖论陈述中的那个'一切非本身分子集的'集'$\sum$'不是一个集合．否则，设$\sum$为一集，则由定理可知，$\sum$必有一子集Γ不是$\sum$的元素，即有

$$\Gamma\subseteq\sum \quad 且 \quad \Gamma\notin\sum \qquad (*)$$

作为集合$\sum$的子集Γ必为一集，故可问Γ是本身分子集还是非本身分子集，设Γ为本身分子集，则有$\Gamma\in\Gamma$，但$\Gamma\subseteq\sum$，故$\Gamma\in\sum$，这与(*)矛盾．再设Γ为非本身分子集，则因$\sum$为一切非本身分子集的集，故$\Gamma\in\sum$，又矛盾于(*)．那种说法都不通，说明$\sum$为集的假定不得成立．故$\sum$不是集合．既然如此，就不能问$\sum$是本身分子集还是非本身分子集．

这样一来，从表面上看，似乎只要承认划分公理，Russell悖论就能排除，其实并非这样简单．首先要问，划分公理是和那些原始概念、推理原则和基本原理结合起来进行推理的．否则，仅由一条划分公理，不要说进行推理，连它自身的陈述也不可能．所以，

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

‘只要承认划分公理，便能排除Russell悖论’这样一种孤立的说法，不只是粗糙的，可以说是错误的。在此，需要一整套的原始概念和推理原则，即要有它的公理系统。对此，先让我们明确此点而姑且暂缓考虑，下文再作讨论。

现在，还是先让我们认真考虑一下，问题究竟出在什么地方？如所知，概括原则是Cantor建立古典集合论的重要思想方法之一，但是，稍加分析，即可看出，上述那个划分公理不过是概括原则的一个简单推论，只要把‘集合L且$R(\theta)$’作为一个性质P，则‘$L_{R(\theta)}$是一集’在概括原则之下是理所当然的。如此，在Cantor系统中，一方面由概括原则推知上述那个$\sum$(一切非本身分子集的集)是一个集合，另一方面，由概括原则而推出划分‘公理’，又如上由划分‘公理’而推出$\sum$不是集合。由此可见，概括原则本身就是自相矛盾的。

再举一例，一方面由概括原则推出划分‘公理’，又由划分‘公理’推知‘任一集合必有一子集不是它的元素’。从而有下面的结论：

($*_1$) 一切集合所组成的‘集合’E不是集合。否则，设E为一集，则E有一子集Γ不为E的元素，因E被假定为集，故E的子集Γ必为集合，而$\Gamma\notin$ E表示E并非一切集的集，至少把Γ漏掉了，从而与E的定义相矛盾。证毕。

另一方面，由概括原则；

$$G=\{g|P(g)\} \text{ 和 } \forall g(g\in G\longleftrightarrow P(g)),$$

只要令‘集合’为一性质，即有

$$E=\{s|s\text{为一集}\} \text{ 和 } \forall s(s\in E\longleftrightarrow s\text{为一集}).$$

因此，又有结论：

($*_2$) 一切集合所组成的集合E是一个集合。

如此，($*_1$)和($*_2$)均由概括原则推出，但它们是互相矛盾的。可见，矛盾的交点已集中到概括原则这个Cantor用以造集的思想方法上去了。

后来，经过仔细分析，人们归结到如下四件事不能同时成立，这就是：

（1）$x\notin x$是一个条件(含x的语句)。

（2）任给一条件$\phi(x)$决定一集，即$x\in A\longleftrightarrow\phi(x)$。

（3）集合为个体之一，因而x处均可代以A。

（4）$P\longleftrightarrow\neg P$为一矛盾。

现在我们来证明上述(1)、(2)、(3)、(4)不得同时成立。否则，假设它们同时成立，则由(1)知$x\notin x$是一个条件，故我们可取$x\notin x$为一条件$\phi(x)$，由(2)而有$x\in A\longleftrightarrow x\notin x$，由(3)而知A可代入$x$处，于是$A\in A\longleftrightarrow A\notin A$，由(4)而知$A\in A\longleftrightarrow A\notin A$是一矛盾。证毕。

所以，在(1)、(2)、(3)、(4)中至少要否定一条。Russell从否定(1)出发而展开他的类型论，Zermelo-Fraenkel(基于否定(2)而构造ZFC集合论公理系统，Bernays-Gödel在否定(3)的基础上形成他们的BG集合论公理系统，Бочвар以否定(4)为起点，发展他的多值逻辑。其中ZFC系统和BG系统本质上差不多，实质上均以修改概括原则为前提，即在不同程度上对概括原则的那种造集的任意性加以适当的限制，到目前为止，单从排除悖论这一点讲，类型论、ZFC系统、BG系统都能使已经发生的逻辑、数学悖论不在他们的系统中出现。至于那些语义学悖论，则又当别论，已在Tarski的工作中获得一定的处理。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

那么多值逻辑的展开能否排除悖论呢？由参考文献[20]可知，在承认概括原则的前提下，多值逻辑的展开对于悖论的排除来说，将是无济于事的。当然，我们并没有说，发展多值逻辑的价值，完全取决于能不能排除悖论这一标准。

有了如上的简要综述，即可把我们的讨论再转向Zermelo的工作。如前所述，矛盾的交点已集中到概括原则本身，但是，概括原则这一思想规定究竟在什么地方出问题，似乎又突出地表现在〈一切集合汇集在一起〉究竟能不能构成集合这样一个问题。致使人们很快就把注意力集中到概括原则所肯定的那种造集的任意性这一点上。因之，Zermelo首先构造公理系统，在保留概括原则中之‘合理因素’的前提下，对造集的任意性加以适当的限制，形成了一个包括划分公理在内的集合论公理系统。在这个系统内，只承认按系统中公理所允许的限度内构造出来的集才是集合，凡是超出系统中公理所允许的限度而构造出来的‘集’是概不承认的。特别是有如由一切集组成的‘集’等等在这个公理系统中是不被承认为集的。在这个系统中能把Cantor悖论、Burali-Forti悖论以及Russell悖论等等既经出现的逻辑、数学悖论予以排除。

这样在Zermelo于1908年建立了他的集论公理系统后，Fraenkel与Skolem在1921—1923年间给出了一个严格的解释，并对Zermelo公理系统作了改进，形成了今天著名的ZF系统，加上选择公理，便是熟知的ZFC系统。

现在，我们除ZF的形式语言和一阶谓词演算的公理和推理原则略而不叙外，将ZFC系统的诸非逻辑公理陈述如下，以对这一系统的基本原则有一概略了解。最后，我们再对ZFC系统作一简短的一般性评述。ZFC系统的陈述有许多版本，在这里，我们采用Herbert B. Enderton所著《ELEMENTS OF SET THEORY》一书中的陈述形式，在该书之末所附的公理表中，包括了外延、空集、配对、并集、幂集、子集、无穷、选择、代换、正则等十条公理，我们不仅要按这些公理在该书中的出处一一笔录，而且特别重视这些公理的非形式化的自然语言的表达方式[21]。

外延性公理 如果两个集合有完全相同的元素，则它们相等：

$$\forall A \forall B[\forall x(x \in A \Longleftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B]$$

空集公理 存在一个不含任何元素的集合：

$$\exists \phi \forall x, \quad x \notin \phi$$

对偶公理 对任何集合u和v，存在一个集合恰以u和v为其元素：

$$\forall u \forall v \exists B \forall x(x \in B \Longleftrightarrow x = u \text{ or } x = v)$$

并集公理（初级形式）对任何两个集合a和b，存在一个集合，它的元素或者是属于a或者是属于b（或者属于两者）的集合：

$$\forall a \forall b \exists B \forall x(x \in B \Longleftrightarrow x \in a \text{ or } x \in b).$$

幂集公理 对任何集合a存在一个集合，它的元素恰好是a的所有的子集：

$$\forall a \exists B \forall x(x \in B \Longleftrightarrow x \subseteq a)$$

只要愿意，这里的‘$x \subseteq a$’可以改写为$\in$的定义形式：

$$\forall t(t \in x \Longrightarrow t \in a).$$

以后，我们要扩大这组公理，包括子集公理、无限公理、选择公理、代换公理和正则公理。并集公理还要用更强的形式重新叙述。（并非全部这些公理都是真正必需的，将会发

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

现其中某些是多余的。）

子集公理 对每一个不包含 B 的公式——，下式

$$\forall t_1 \cdots \forall t_R \forall C \exists B \forall x(x \in B \Longleftrightarrow x \in C \& \underline{\quad\quad})$$

是公理。

若用语言叙述，这个公理断言（对任何 t_1，…，t_k 和 C）存在这样的一个集合 B，其元素正好是 C 中所有使——成立的那些集合 x。于是，自然得出 B 是 C 的子集的结论（子集公理之名由此而来）。集合 B 被（t_1，…，t_k 和 C）唯一确定，并可用抽象记号的变形

$$B = \{x \in C \mid \underline{\quad\quad}\}$$

给它命名。

我们需要改进并集公理（初级形式）的说法，以便知道存在一个集合，它正好包含着 A 的元素的元素全体。

并集公理 对任意集合A，存在一个集合B，它的元素正好是A的元素的元素全体：

$$\forall x[x \in B \Longleftrightarrow (\exists b \in A) x \in b].$$

定义 对任何集合 a，它的后继 a^+ 定义为

$$a^+ = a \cup \{a\},$$

当且仅当 $\phi \in A$ 并且在后继下封闭，即

$$(\forall a \in A) a^+ \in A$$

时，说集合 A 是归纳集合。

虽然我们还没给出‘无限’的形式定义，我们可以正式看到，任何一个归纳集将是无限的。

到现在我们还没有提供无限集的存在性公理。虽然我们能确立其存在的无限多个不同的集合。但是，我们还没有能证明有无限多元素的集合。因此，我们还不能证明任何归纳集合的存在。为此，我们引进

无限公理 存在归纳集合：

$$(\exists A)[\phi \in A \& (\forall a \in A) a^+ \in A].$$

借助于这个公理，我们能定义自然数。

选择公理有许多种等价的形式，今取其一种并用自然语言陈述之。

选择公理 令$\mathscr{A}$是这样的一种集合：（a）$\mathscr{A}$ 的每个元素是非空集合，并且（b）$\mathscr{A}$的任何两个不同的元素不相交。那末存在集合 C 恰好包含$\mathscr{A}$ 的每个元素中的一个元素（即对每个$B \in \mathscr{A}$，$C \cap B$ 是某个 x 的单元集 $\{x\}$）。

代换公理 对任何不包含字母 B 的公式 $\varphi(x,y)$，下述公式是公理：

$$\forall A[(\forall x \in A) \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x,y_1) \& (x,y_2) \Rightarrow y_1 = y_2)$$
$$\Rightarrow \exists B \forall y (y \in B \Longleftrightarrow (\exists x \in A) \varphi(x,y))].$$

现把代换公理译成自然语言：把公式 $\varphi(x,y)$ 读作‘x提名y’，则公理的前提说：‘A的每一个元素至多提名一个对象’。而结论‘所有被A之元提名的那些对象组成一集B’。名称‘代换’反映集合A中的每一个 x 由它的被提名者（如果有的话）代替而产生集合 B 这样一种思想。

正则公理 每个非空集合A有元素m，且$m \cap A = \phi$：

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$(\forall A \neq \phi)(\exists m \in A) m \cap A = \phi.$$

如上这些公理便构成 ZFC 集合论公理系统，从这些公理内容可看出，Zermelo-Fraenkel 构造 ZFC 系统，其真实目的乃在于为分析学奠定严格的基础，因为如前所述，微积分的基础已通过Cauchy 到 Dedekind 归约到了实数论，而实数论的不矛盾性又归约于集合论的不矛盾性。那么ZFC系统则以如下路线来为微积分奠基，这就是由无穷公理来保证自然数集的合法性，再由幂集公理导至实数集的合法化，然后再由子集公理来保证实数集中满足性质 P 的元所组成的子集的合法性，这样一来，只要 ZFC 系统无矛盾，严格的微积分理论就能在 ZFC 公理集合论上建立起来了。但是，问题正在于 ZFC 系统本身的无矛盾性至今没有解决.所以至今不能保证在这个系统中今后不会出现悖论，虽然在 ZFC 系统中能够排除已经出现的那些集合论悖论，并且 ZFC 系统一直展开到今天，尚未出现过其他矛盾。但是，Poincaré 指出：我们设置栅拦，把羊群围住，免受狼的侵袭，但是很可能在围栅拦时就已经有一条狼被围在其中了。

参　考　文　献

[1] 莫里斯·克莱因，数学的基础(上)，自然杂志，1979，第4期.（原载法文期刊 La Recherche, 1975年3月号，陈以鸿译，莫绍揆校.）

[2] 张锦文，《集合论与连续统假设浅说》，上海教育出版社，1980年.

[3] 黄耀枢，论逻辑在数学发展中的作用，哲学研究，1979，第7期.

[4] Fraenkel A. A. &Bar-Hillel Y., Foundations of Set Theory, Amsterdam: North Holland, 1958.

[5] 莫里斯·克莱因，古今数学思想，上海科学技术出版社，1979.

[6] 莫绍揆，数学三次危机与数理逻辑，自然杂志，1980，第6期.

[7] 那汤松 И. П.，实变函数论(下)，高等教育出版社，1956.

[8] 杨熙龄，悖论研究八十年，国外社会科学，1980，第7期.

[9] Luchins, A. & Luchins, E., 'Logical Foundation of mathematics for Behavioral Scientists', New york, Holt Rine Hart and Vinston Inc, (1965).

[10] Gödel, K., 'Russell's mathematical Logic', in the philosophy of Bertrand Russell, ed. by P. A.Sehilpp, New York, Tudor, 1944, Reprinted in this anthology, pp. 211—32.

[11] Russell, B., Introduction to Mathematical Philosophy, London, G. Allen, 1919, Excerpts reprinted in this anthology, pp. 113—33.

[12] Carnap, R., Die mathemalik als Zweig der logik, Blätter für deutsche philosophie 4.

[13] Tarski, A., Logic, Semantics, Metamathematics, trans. by Woodger, J. H., Oxford, Clarendon Press, 1956, including "The Concept of Truth in Formalized Languages", "On the Concept of logical Consequence", etc.

[14] Schaff, A.,《语义学引论》，周易、罗兰译，商务，1979.

[15] Nagel, E. and Newman, J. R., Gödel's proof, New York, New York Univ.

[16] Gödel, K., On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems, trans. by Meltzer, B., with an introduction by Braithwaite, R. B., Edinburgh, Oliver and Boyd. 1962.

[17] 杨熙龄，哥德尔对哲学的贡献，国外社会科学，第5期.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[18] Tarski, A., "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics" in Readings in Philosophical Analysis, ed. by Feigl, H. and Sellars, W., New York, Appleten, 1949.

[19] 《逻辑学辞典》试写辞条选登，社会科学战线，1980，第2期.

[20] Moh Shaw-Kwei, Logical paradoxes for Many-Valued Systems, J. S. L., (1954), 19, 37 40.

[21] Herbert B. Enderton, Elements of set theory, 1977.

[22] Tarski, A., 《The Semantic Concept of Truth in Formalized Language》, Reprinted in (48), p 152—278.

[23] Hausdorff, F., Mengenlehre, Watter de Hruyler, 1935.

Antinomies and the Foundational Problem of Mathematics (II)

By Hsu L. C. (徐利治), *Chu W. J.* (朱梧槚)

Yuan S. W. (袁相碗), *Tseng Y. S.* (郑毓信)

Abstract

This expository article centers on discussing the question of how to define more comprehensively the concept of antinomy (or paradox) in mathematical science. Also included in the present discourse are expositions about the origin of antinomies, three mathematical crises and Zermelo's program for resolving antinomies, etc.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.