1982年 第2卷 第4期
Vol.2, No.4, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

ZFC 的模型的上限序数的一个性质*

孙文植

（南京大学）

§1 引 言

Forcing 方法假设存在 ZFC 的一个可数可传的模型 M[1]. 记满足 $\alpha\notin M$ 的最小序数 α 为 Γ_0，显然 M 中一切序数所成的集合即 Γ_0. 由于 M 是 ZFC 的模型，故 Γ_0 应具有某些性质. 本文证明了它满足关系 $\omega^{\Gamma_0}=\Gamma_0$，故 Γ_0 为 ε 数或 1 级关键数，进而证明了 Γ_0 是 $\varkappa$ 级关键数（$\varkappa$ 为任意自然数）. 文中的记号等引用[2].

§2 超穷归纳定义的函数符号的解释及绝对性

[2]中 ch.9.5 中，假设 T 是 ZF 的一个扩张系统，且 T 的符号除 ZF 中已有的外，均为常数，T 的非逻辑公理则较 ZF 的公理可有所增加.

设 M 是 T 的一元谓词符号，且 $\underset{T}{\vdash}\exists xM(x)$，$\underset{T}{\vdash}M(x)\wedge y\in x\rightarrow.\ M(x)$（即 M 不空且可传）. 又设 ZF 的谓词符号 $\in$ 及 $=$ 在 T 中的解释 ϵ_M 及 $=_M$ 仍分别是 $\in$ 及 $=$ 而保持不变，又 ZF 的非逻辑公理在 M 下的解释分别在 T 中可证. 这时称 M 是 ZF 在 T 中的一个可传的 $\in$ 解释或模型. 在解释 M 下，ZF 的函数符号及谓词符号 F、Q 在 T 中的解释分别记为 F_M 及 Q_M. [2]详细研讨了各种 F_M 及 Q_M 的构成及其绝对性. 但对 ZF 中由超穷归纳

$$F(\sigma)=G[\sigma,\ [\langle F(\tau),\ \tau\rangle\mid\tau<\sigma]] \tag{1}$$

所定义的函数符号 F 在 T 中的解释我们进一步可有下面的定理 2.2.

引理 2.1（解释定理）如 $\mathbf{A}$ 是 ZF 的定理，则 $\mathbf{A}$ 在 T 中的解释 $\mathbf{A}^{(M)}$ 也是 T 的定理.

证明见[2].

由于(1)是 ZF 的定理，由引理 2.1，(1)在 T 中的解释

$$M(\sigma)\rightarrow F_M(\sigma)=G_M(\sigma,\ [\langle F_M(\tau),\ \tau\rangle\mid\tau<\sigma]) \tag{2}$$

* 1980 年 10 月 27 日收到.

是T中的定理.

由于T包含ZF，其中关于超穷归纳定义的定理仍成立. 又满足$M(\sigma)$的序数σ全体，或是全体序数，或是全体序数的一个截段（这时有满足$\neg M(\sigma)$的最小序数，记为Γ_0，称为上限序数），因此我们有

定理 2.2 如果F是ZF中由超穷归纳(1)定义的函数符号，而F_M是F在T中的解释，则对于满足$M(\sigma)$的序数σ有$F_M(\sigma)=G_M(\sigma, [\langle F_M(\tau), \tau\rangle | \tau<\sigma])$，即$F_M$是用函数符号$G_M$按超穷归纳定义的.

如果G绝对，则当有$M(\sigma)$时，$G_M(\sigma, [\langle F_M(\tau), \tau\rangle | \tau<\sigma])=G(\sigma, [\langle F_M(\tau), \tau\rangle | \tau<\sigma])$，故$M(\sigma)\to F_M(\sigma)=G(\sigma, [\langle F_M(\tau), \tau\rangle | \tau<\sigma])$，因(1)所定义的函数符号唯一，故$M(\sigma)\to F_M(\sigma)=F(\sigma)$，即$F$绝对. 所以我们有

定理 2.3 如G绝对，则由(1)所定义的F亦绝对.

§3 序数运算的绝对性

序数加法$F(\beta,\alpha)=\alpha+\beta$由超穷归纳

$$F(\beta,\alpha)=\begin{cases}\alpha & \text{如 } \beta=0\\ sF(\gamma,\alpha) & \text{如 } \beta=s\gamma\\ \bigcup[F(\gamma,\alpha)|\gamma<\beta] & \text{如 } \lim(\beta)\end{cases}$$

定义，（其中α为参数）.

令 $$G(x,\alpha)=y\longleftrightarrow Q(x,y,\alpha)，\text{其中}$$

$Q(x,y,\alpha)\longleftrightarrow Func(x)\wedge \mathrm{Ord}(\mathrm{Dom}(x))\wedge((x=0\wedge y=0)\vee\exists z(\mathrm{Dom}(x)=s\ \wedge y=s(x‘z))\vee(\lim(\mathrm{Dom}(x)\wedge y=\bigcup(\mathrm{Rang}(x))\vee.\neg(Func(x)\wedge\mathrm{Ord}(\mathrm{Dom}(x)))\wedge y=0$，

则有 $$F(\beta,\alpha)=G([\langle F(\tau,\alpha), \tau\rangle | \tau<\beta], \alpha).$$

由于$Q(x,y,\alpha)$中每个符号均绝对，并且因$\mathrm{Dom}(x)=s(z)$关于z完全（Complete[2]），故如谓词符号R由$R(x,y)\longleftrightarrow\exists z(\mathrm{Dom}(x)=sz\wedge y=s(x‘z))$定义，则$R$绝对，$\therefore Q$绝对，因此函数符号$G$亦绝对，故由定理2.3得

定理 3.1 如$F(\beta,\alpha)=\alpha+\beta$，则在解释$M$下，$F$绝对.

如果定义$G'(x,\alpha)=y\longleftrightarrow Q'(x,y,\alpha)$，其中

$Q'(x,y,\alpha)\longleftrightarrow Func(x)\wedge\mathrm{Ord}(\mathrm{Dom}(x))\wedge((x=0\wedge y=0)\vee\exists z(\mathrm{Dom}(x)=sz\wedge y=x‘z+\alpha)\vee(\lim(\mathrm{Dom}(x))\wedge y=\bigcup(\mathrm{Rang}(x)))\vee.\neg(Func(x)\wedge\mathrm{Ord}(\mathrm{Dom}(x)))\wedge y=0$，

则由序数加法绝对可知Q'亦绝对，因此G'绝对. 但

$$F'(\beta,\alpha)=G'([\langle F'(\tau,\alpha), \tau\rangle | \tau<\beta], \alpha)=\begin{cases}0 & \text{如 } \beta=0\\ F'(\gamma,\alpha)+\alpha & \text{如 } \beta=s\gamma\\ \bigcup[F'(\tau,\alpha)|\tau<\beta] & \text{如 } \lim(\beta),\end{cases}$$

故$F'(\beta,\alpha)=\alpha\cdot\beta$. 由$G'$绝对可知$F'$即序数乘法运算对可传的$\in$解释绝对.

类似地序数乘方 $F''(\beta,\alpha)=\alpha^\beta$，对可传的 $\in$ 解释也绝对．因此有

定理 3.2 如 $F(\beta,\alpha)=\alpha+\beta$，$F'(\beta,\alpha)=\alpha\cdot\beta$，$F''(\beta,\alpha)=\alpha^\beta$ 则在解释 M 之下，F,F'，F'' 均绝对．

§4 关于 ZFL_A 的一些讨论

[2]在 $ch9.6$ 中定义了

$$C(\sigma)=\begin{cases}[c(\tau)\mid\tau<\sigma] & \text{如 } J_0(\sigma)=0\\ \mathscr{F}_i(C(J_1(\sigma)),\ C(J_2(\sigma))) & \text{如 } J_0(\sigma)=i,\ i=1,2,\cdots,9\\ \{C(J_1(\sigma),\ C(J_2(\sigma)))\} & \text{如 } J_0(\sigma)>9\end{cases}$$

而定义 $L(x)\longleftrightarrow\exists_\sigma(x=C(\sigma))$，称满足 $L(x)$ 的集 x 为可构造集，$\forall_x L(x)$ 称为可构造公理．

ZFL 为 ZF 加可构造公理所得的系统．

在 ZFL 中再加入常项 A 及公理 $Trans(A)$，$Card(A)\leqslant\aleph_0$ 及对ZFL的任一封闭公式 $\mathbf{A}$ 加入 $\mathbf{A}\longleftrightarrow\mathbf{A}_A$ 为新公理如此所得的 ZFL 的扩张系统记为 ZFL_A，显然 ZFL_A 满足 §2 关于系统 T 的条件．

[2] 证明了 ZFL_A 是 ZFL 的保守扩张．所以 ZFL_A 不矛盾当且仅当 ZFL 不矛盾，当且仅当 ZF 不矛盾．

[2]证明了 A 是 ZFL 在 ZFL_A 中的 $\in$ 解释．因为 A 可数可传，故 A 是可数可传的 $\in$ 解释．A 相当于 §1 中的可数可传的模型 M．

今记 $\alpha\notin A$ 的最小的序数 α 为 Γ_0 则有

引理 4.1 $\Gamma_0=[\alpha\mid\alpha\in A]$，且 $\Gamma_0>\omega$，$\Gamma_0<\aleph_1$．

证明：由 Γ_0 的定义，任一 $\alpha\in\Gamma_0$ 有 $\alpha\in A$，反之，对任一 $\alpha\geqslant\Gamma_0$，由 A 可传，$\alpha\notin A$，$\therefore\Gamma_0=[\alpha\mid\alpha\in A]$．又 $\because\omega$ 绝对，$\therefore\omega\in A$，$\therefore\omega<\Gamma_0$．因 $\Gamma_0\geqslant\aleph_1$ 与 A 可数不合又易知 $\Gamma_0<\aleph_1$．

[2] 定义，如 $\vdash_T M(X_1)\wedge\cdots\wedge M(x_n)\to.\ M(F(x_1,\cdots x_n))$ 则称 F 在可传解释 M 之下是 M 不变的，并有

引理 4.2 如 F 对 M 绝对，则 F 是 M 不变的．

由 4.2 可得

推论 4.3 A 是可构造集的 Γ_0 截段，即 $A=[C(\sigma)\mid\sigma<\Gamma_0]$

证明 因 A 是 ZFL 在 ZFL_A 中的解释，$\therefore$ 可构造公理 $\forall xL(x)$ 的解释 $\forall x(x\in A\to L_A(x))$ 即 $\forall x(x\in A\to\exists\sigma(\sigma\in A\wedge x=C(\sigma)))$（注意 C 是绝对的函数符号）是 ZFL_A 的定理．由 4.1 可得 $\forall x(x\in A\to\exists\sigma(\sigma<\Gamma_0\wedge x=C(\sigma)))$．另方面，因 C 绝对，由 4.2，C 是 A 不变的，即 $\sigma\in A\to C(\sigma)\in A$，即 $\sigma<\Gamma_0\to C(\sigma)\in A$，故 $x\in A\longleftrightarrow\exists\sigma(\sigma<\Gamma_0\wedge x=C(\sigma))$ 是 ZFL_A 的定理，$\therefore A=[C(\sigma))\mid\sigma<\Gamma_0]$．

以下的讨论均在 ZFL_A 中进行．

§5 Γ_0 的性质

在 ZFL_A 中对于 Γ_0 进一步可推出下列性质

定理 5.1 如 $\alpha,\beta<\Gamma_0$，则 $\alpha+\beta<\Gamma_0\wedge\alpha\cdot\beta<\Gamma_0\wedge\alpha^\beta<\Gamma_0$

证明 设 $\alpha,\beta<\Gamma_0$，则由 §4，$\alpha,\beta\in A$. 由序数加、乘、乘方运算的绝对性，它们均是 A 不变的，即由 $\alpha,\beta\in A$ 可得 $\alpha+\beta\in A\wedge\alpha\cdot\beta\in A\wedge\alpha^\beta\in A$，即 $\alpha+\beta<\Gamma_0\wedge\alpha\cdot\beta<\Gamma_0\wedge\alpha^\beta<\Gamma_0$.

序数算术中把具有性质 $\alpha,\beta<\gamma\to\alpha+\beta<\gamma$ 的非零序数 γ 称为加法关键数. 且由关于序数展开为任一序数 α 的乘幂和的 Cantor 定理[3]，γ 为加法关键数当且仅当有 δ 使 $\gamma=\omega^\delta$

定理 5.2 如 $\gamma>\omega$ 且 $\alpha,\beta<\gamma\to.\alpha+\beta<\gamma\wedge\alpha\cdot\beta<\gamma\wedge\alpha^\beta<\gamma$

则 (1) γ 是加法关键数，故有 γ_0 使 $\gamma=\omega^{\gamma_0}$

(2) γ_0 亦为加法关键数，故有 γ_1 使 $\gamma_0=\omega^{\gamma_1}$

(3) γ_1 是极限数

(4) $\omega^{\gamma_1}=\gamma_1$

(5) $\omega^\gamma=\gamma$　故 γ 是 ε 数

证明 (1) 显然. (2) 设 $\alpha,\beta<\gamma_0$，则由序数乘方关于幂指数的严格单调性 $\omega^\alpha,\omega^\beta<\omega^{\gamma_0}$. 由条件 $\omega^\alpha\cdot\omega^\beta=\omega^{\alpha+\beta}<\omega^{\gamma_0}$，$\therefore\alpha+\beta<\gamma_0$，故 γ_0 是加法关键数. 因此有 γ_1 使 $\gamma_0=\omega^{\gamma_1}$ (3) 由 $\gamma>\omega$，$\gamma_1\neq0$. 又反设 $\gamma_1=\alpha+1$，则 $\gamma=\omega^{\omega^{\gamma_1}}=\omega^{\omega^{\alpha+1}}$，$\therefore\omega^{\omega^\alpha}<\omega^{\omega^{\alpha+1}}=\gamma$，由条件 $(\omega^{\omega^\alpha})^\omega<\gamma$，即 $\omega^{\omega^{\alpha+1}}<\gamma$，矛盾. $\therefore\gamma_1$ 是极限数. (4) $\because\omega^{\gamma_1}\geqslant\gamma_1$，只要证 $\omega^{\gamma_1}\leqslant\gamma_1$. 今证明 $\omega^{\gamma_1}\subseteq\gamma_1$. $\because\gamma_1$ 是极限数，$\therefore\omega^{\gamma_1}=\bigcup[\omega^\delta|\delta<\gamma_1]$，故只要证明对任一 $\delta<\gamma_1$ 有 $\omega^\delta\subseteq\gamma_1$ 即可. 设 $\delta<\gamma_1$，由严格单调性，$\omega^{\omega^\delta}<\omega^{\omega^{\gamma_1}}=\gamma$. 故由条件 $(\omega^{\omega^\delta})^{\omega^{\omega^\delta}}<\gamma$，即 $\omega^{\omega^{\delta+\omega^\delta}}<\omega^{\omega^{\gamma_1}}$，$\therefore\delta+\omega^\delta<\gamma_1$，但 $\omega^\delta\leqslant\delta+\omega^\delta$，$\therefore\omega^\delta<\gamma_1$，因此 $\omega^\delta\subseteq\gamma_1$. (5) $\because\gamma_0=\omega^{\gamma_1}=\gamma_1$，$\therefore\gamma=\omega^{\gamma_0}=\omega^{\gamma_1}=\gamma_1$，由 $\omega^{\gamma_1}=\gamma_1$，$\gamma=\omega^\gamma$.

定理 5.3 $\Gamma_0=\omega^{\Gamma_0}$. 故 Γ_0 为 ε 数.

证明 由 5.1、5.2 立即可知.

最小的 ε 数，直觉上是形为 $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ 形的序数，Γ_0 是否可能是第一个 ε 数呢？下面的讨论表明不可能.

§6 Γ_0 的进一步性质

如果把 ω^α 记为 $F_0(\alpha)=\omega^\alpha$，则 F_0 是加法关键数的"排序函数"，而 ε 数则是具有性质 $F_0(\alpha)=\alpha$ 的 F_0 的"不动点". [4]把加法关键数称为 0 级关键数. 当引进 ε 数的"排序函数" F_1 时，ε 数称为 1 级关键数，而 F_1 的不动点，即满足 $F_1(\alpha)=\alpha$ 的序数，则称为 2 级关键数. 同样可引进 3 级关键数等. 这里我们将进一步证明 Γ_0 是任意的 K 级关键数.

6.1 关于序数加、乘、乘方运算绝对性的说明.

§2中 $F(\sigma)=G(\sigma,\ [\langle F(\tau),\ \tau\rangle|\tau<\sigma])$ 所定义的 F 应是ZF的一个新函数符号，因此 $F(x)$ 对任一集合 x 都有定义。但一般我们感兴趣的是当 x 为序数的情形，按[2]的约定，此外的情形规定 $F(x)=0$。函数符号 F 在T中在解释M下绝对，[2]定义为 $M(x)\to F_M(x)=F(x)$ 在 T 中可证。在证明定理2.3时，我们证明了 $M(\sigma)\to F_M(\sigma)=F(\sigma)$ (3)。但由于ZF中有 $\neg\mathrm{Ord}(x)\to F(x)=0$，取其解释得 $M(x)\wedge\neg\mathrm{Ord}(x)\to.F_M(x)=0$ 在 T 中可证。因此有 $M(x)\wedge\neg\mathrm{Ord}(x)\to.\ F_M(x)=F(x)$ (4)。(3) (4) 可得 $M(x)\to F_M(x)=F(x)$ 即 F 绝对。由于[2]中已作了约定，故当§3中证出 (3) 后即可断言 F 绝对。

序数加法亦有同样的情形。§3中曾指出如 $F(\beta,\alpha)=\alpha+\beta$，则 F 绝对。这里的 F 亦应是函数符号，对任何 x，w，$F(x,w)=x+w$ 均有意义，但当 x、w 之一非序数时 $F(x,w)=0$。为要得到所需的结果，只需把§3中的 $G(x,\alpha)=y\longleftrightarrow Q(x,y,\alpha)$ 改为 $G(x,w)=y\longleftrightarrow Q(x,y,w)$，其中 $Q(x,y,w)$ 为 $Q(x,y,w)\longleftrightarrow\mathrm{Func}(x)\wedge\mathrm{Ord}\ (\mathrm{Dom}(x))\wedge\mathrm{Ord}(w)\wedge((x=0\wedge y=w)\vee\exists z(\mathrm{Dom}(x)=sz\wedge y=s\ (x'z))\vee(\lim(\mathrm{Dom}(x))\wedge y=\bigcup(\mathrm{Rang}(x))))\vee.\ \neg(\mathrm{Func}(x)\wedge\mathrm{Ord}(\mathrm{Dom}\ (x))\wedge\mathrm{Ord}(w))\wedge y=0$。同样这里的 Q 绝对。这时，当 w 非序数时，由 G 的定义，显然 $F(\beta,w)=0$。所以 $F(x,w)=w+x$ 对任何 x，w 有定义，但当两者之一非序数时 $F(x,w)=0$。同样 $F'(x,w)=w\cdot x$ 作为两元函数符号绝对，当 x、w 两者之一非序数时 $w\cdot x=0$，当两者都是序数时，$x\cdot w$ 即是序数乘法。$F''(x,w)=w^x$ 的情形同此。

引理6.2　当 x 为非空序数集时 $\alpha+\bigcup x=\bigcup[\alpha+\beta|\beta\in x]$

证明　当 $\beta\in x$ 时，$\because\beta\leqslant\bigcup x$，$\therefore\alpha+\beta\leqslant\alpha+\bigcup x$ 故 $\bigcup[\alpha+\beta|\beta\in x]\leqslant\alpha+\bigcup x$(5)。反之，如 $\beta\in\alpha+\bigcup x$，则当 $\bigcup x=\gamma+1$ 时，必有 $\gamma+1\in x$，$\therefore\beta<\alpha+(\gamma+1)\leqslant\bigcup[\alpha+\beta|\beta\in x]$ 即 $\beta\in\bigcup[\alpha+\beta|\beta\in x]$。而如果 $\bigcup x$ 为极限数，则 $\beta\in\alpha+\bigcup x=\bigcup[\alpha+\gamma|\gamma\in\bigcup x]$，因此有 $\gamma\in\bigcup x$ 使 $\beta<\alpha+\gamma$。而由 $\gamma\in\bigcup x$，有 $\delta\in x$，使 $\gamma<\delta$，$\therefore\beta<\alpha+\gamma<\alpha+\delta\leqslant\bigcup[\alpha+\beta|\beta\in x]$。因此仍有 $\beta\in\bigcup[\alpha+\beta|\beta\in x]$。最后，如 $\bigcup x=\phi$，则必有 $x=\{\phi\}$，故显然有 $\beta\in\bigcup[\alpha+\beta|\beta\in x]$。因此 $\alpha+\bigcup x\subseteq\bigcup[\alpha+\beta|\beta\in x]$。即 $\alpha+\bigcup x\leqslant\bigcup[\alpha+\beta|\beta\in x]$。

引理6.3　α 为加法关键数当且仅当 $\alpha\neq0$，且对任一 $\xi<\alpha$ 有 $\xi+\alpha=\alpha$。

证明略，见[3]

引理6.4　如 x 是非空加法关键数集，则 $\bigcup x$ 是加法关键数

证明　显然 $\bigcup x\neq0$。设 $\xi<\bigcup x$，则有 $\alpha\in x$ 使 $\xi<\alpha$，而对一切 $\beta\in x\wedge\beta\geqslant\alpha$ 有 $\xi<\beta$。$\because\beta$ 为加法关键数，$\therefore\xi+\beta=\beta$，$\therefore\xi+\bigcup x=\bigcup[\xi+\beta|\beta\in x]=\bigcup[\beta|\beta\in x]=\bigcup x$。由6.3 $\bigcup x$ 为加法关键数。

引理6.5　如 x 为非空序数集，则 $\bigcup[\omega^\gamma|\gamma\in x]=\omega^{\bigcup x}$

证明　因 $[\omega^\gamma|\gamma\in x]$ 是非空加法关键数集，由6.4。$\bigcup[\omega^\gamma|\gamma\in x]$ 是加法关键数。故有 α 使 $\bigcup[\omega^\gamma|\gamma\in x]=\omega^\alpha$。$\because$ 对 $\gamma\in x$ 有 $\omega^\gamma\leqslant\omega^\alpha$，$\therefore\gamma\leqslant\alpha$，$\therefore\bigcup x\leqslant\alpha$，故 $\omega^{\bigcup x}\leqslant\omega^\alpha$。又如 $\gamma\in x$，则 $\gamma\leqslant\bigcup x$，故 $\omega^\gamma\leqslant\omega^{\bigcup x}$，故 $\omega^\alpha=\bigcup[\omega^\gamma|\gamma\in x]\leqslant\omega^{\bigcup x}$。因此 $\bigcup[\omega^\gamma|\gamma\in x]=\omega^\alpha=\omega^{\bigcup x}$。

引理6.6　对任一 β，有 $\alpha>\beta$ 使 $\omega^\alpha=\alpha$，即 $\exists_\alpha(\alpha>\beta\wedge\omega^\alpha=\alpha)$

证明　令 $\alpha_0=\beta+1$，$\alpha_{n+1}=\omega^{\alpha_n}$，$x=[\alpha_n|n\in\omega]$，而令 $\alpha=\bigcup x$，显然 $\beta<\alpha_0\leqslant\alpha$。又 $\because\omega^{\alpha_n}=\alpha_{n+1}\leqslant\alpha$，$\therefore\bigcup[\omega^{\alpha_n}|n\in\omega]\leqslant\alpha$。但由6.5，$\bigcup[\omega^{\alpha_n}|n\in\omega]=\bigcup[\omega^\gamma|\gamma\in x]=\omega^{\bigcup x}=\omega^\alpha$，$\therefore\omega^\alpha\leqslant\alpha$。又 $\because\omega^\alpha\geqslant\alpha$，$\therefore\omega^\alpha=\alpha$。

定义6.7 $\sup^+ x = y \longleftrightarrow \forall z(z\in x\to Ord(z))\wedge((\bigcup x\in x\wedge y=s(\bigcup x))\vee(\bigcup x\notin x\wedge y=\bigcup x))\vee\cdot\neg\forall z(z\in x\to \mathrm{Ord}(z))\wedge y=0$

若记上列定义公理的右边为 $Q(x,y)$，则易见 Q 对可传的 $\in$ 解释绝对，$\therefore \sup^+$ 绝对．特别，$\sup^+$ 在 ZFL_A 中对解释 A 绝对．由定义 $\sup^+ x$ 当 x 为序数集时是 x 的最小的严格上界，当 x 不是序数集时则为 0 .

引理 6.8 如 F 由下式定义 $F(x_1,\cdots x_n)=\mu_\sigma Q(\sigma, x_1,\cdots,x_n)$ 而其中的 Q 绝对，则 F 对可传的 $\in$ 解释绝对证明见[2]．

定义 6.9 $F_1(\alpha)=\mu_\beta(\omega^\beta=\beta\wedge\beta\geqslant\sup^+[F_1(\gamma)|\gamma<\alpha])$

由 6.6 知，这个定义合理．

引理 6.10 F_1 对可传的 $\in$ 解释绝对，特别在 ZFL_A 中对解释 A 绝对．

证明 $\because F_1(\alpha)=G([\langle F_1(\gamma),\gamma\rangle|\gamma<\alpha])$，这里 $G(x)=\mu_\beta(\omega^\beta=\beta\wedge\beta\geqslant\sup^+(\mathrm{rang}(x)))=\mu_\beta Q(\beta,x)$，其中 $Q(y,x)\longleftrightarrow.\omega^y=y\wedge(\sup^+(\mathrm{rang}(x))\in y\vee\sup^+(\mathrm{rang}(x))=y)$．由 3.2，$F''(x,y)=y^x$ 则 F'' 绝对，又 ω 绝对，因此 Q 绝对．$\therefore$ 由 6.8G 绝对，又由 2.4，F_1 绝对．

引理 6.11 (1) F_1递增，即 $\alpha<\beta\to F_1(\alpha)<F_1(\beta)$ (2)$\omega^\beta=\beta\to\exists\alpha(F_1(\alpha)=\beta)$．

证明 (1) 由定义 6.10 显然．(2)设有 β_0 是满足 $\omega^\beta=\beta\wedge\neg\exists\alpha(F_1(\alpha)=\beta)$ 的最小的 β．今先证明 $[\gamma|F_1(\gamma)<\beta_0]$是序数．为此只要证$[\gamma|F_1(\gamma)<\beta_0]$可传，即只要证明如果 $F_1(\gamma)<\beta_0\wedge\delta<\gamma$ 则 $F_1(\delta)<\beta_0$ 即可．但这由 F_1 递增立即可知．设$[\gamma|F_1(\gamma)<\beta_0]=\alpha$，由 β_0 的取法，凡小于 β_0 的 ε 数均在$[F_1(\gamma)|\gamma<\alpha]$中，故 β_0是$\geqslant\sup_+[F(\gamma)|\gamma<\alpha]$的最小的 ε 数．由 F_1 定义，$\beta_0=F_1(\alpha)$，与假设不合，故 (2) 得证．

引理 6.12 x 为非空的 ε 数集，则 $\bigcup x$ 是 ε 数

证明 对 $\gamma\in x$，有 $\omega^\gamma=\gamma$，由 6.5，$\omega^{\bigcup x}=\bigcup[\omega^\gamma|\gamma\in x]=\bigcup[\gamma|\gamma\in x]=\bigcup x$，故 $\bigcup x$ 是 ε 数．

引理 6.13 x 是非空序数集，则 $\bigcup[F_1(\gamma)|\gamma\in x]=F_1(\bigcup x)$

证明 $\because[F_1(\gamma)|\gamma\in x]$是非空 ε 数集，由 6.12，$\bigcup[F_1(\gamma)|\gamma\in x]$为 ε 数．由 6.11，有 α 使 $\bigcup[F_1(\gamma)|\gamma\in x]=F_1(\alpha)$．$\because$ 对 $\gamma\in x$，$F_1(\gamma)\leqslant F_1(\alpha)$，$\therefore$ 由 F_1 递增 $\gamma\leqslant\alpha$，$\therefore\bigcup x\leqslant\alpha$，故 $F_1(\bigcup x)\leqslant F_1(\alpha)=\bigcup[F_1(\gamma)|\gamma\in x]$又如 $\gamma\in x$，则 $\gamma\leqslant\bigcup x$，$\therefore F_1(\gamma)\leqslant F_1(\bigcup x)$，故又有 $\bigcup[F_1(\gamma)|\gamma\in x]\leqslant F_1(\bigcup x)$．因此引理得证．

引理 6.14 $\exists\alpha(\alpha>\beta\wedge F_1(\alpha)=\alpha)$．称满足 $F_1(\alpha)=\alpha$ 的序数 α 为 2 级关键数．

证明 令 $\alpha_0=\beta+1$，$\alpha_{n+1}=F_1(\alpha_n)$，$x=\{\alpha_n|n\in\omega\}$，而令 $\alpha=\bigcup x$．和 6.6 一样，容易证明有 $F_1(\alpha)=\alpha$．

引理 6.15 $\Gamma_0=\bigcup[\alpha|\alpha<\Gamma_0\wedge F_1(\alpha)=\alpha]$即 Γ_0 是小于 Γ_0 的 2 级关键数的最小上界．

证明 由 6.14，$\exists\alpha(\alpha>\beta\wedge F_1(\alpha)=\alpha)$ 是 ZF 的定理，故它在 A 下的解释（注意 F_1 对 A 绝对）$\beta\in A\to\exists\alpha(\alpha\in A\wedge\alpha>\beta\wedge F_1(\alpha)=\alpha)$ 是 ZFL_A 的定理，即 $\beta<\Gamma_0\to\exists\alpha(\alpha<\Gamma_0\wedge\alpha>\beta\wedge F_1(\alpha)=\alpha)$．因此对任一 $\beta<\Gamma_0$ 有 $\beta<\bigcup[\alpha|\alpha<\Gamma_0\wedge F_1(\alpha)=\alpha]$故 $\Gamma_0\leqslant\bigcup[\alpha|\alpha<\Gamma_0\wedge F_1(\alpha)=\alpha]$．另方面 $\bigcup[\alpha|\alpha<\Gamma_0\wedge F_1(\alpha)=\alpha]\leqslant\Gamma_0$ 显然，因此引理得证．

引理 6.16 如 x 是非空 2 级关键数集，则 $\bigcup x$ 亦是．

证明　对$\gamma\in x$，有$F_1(\gamma)=\gamma$。由6.13，$F_1(\bigcup x)=\bigcup[F_1(\gamma)|\gamma\in x]=\bigcup[\gamma|\gamma\in x]=\bigcup x$。$\therefore \bigcup x$是2级关键数。

定理 6.17　Γ_0是2级关键数

证明　由6.16及6.15立即可得。

同样，容易归纳证明Γ_0是任意的k（自然数）级关键数。为此只需归纳假设$F_0,F_1,\cdots,F_k$已定义，称满足$F_i(\alpha)=\alpha$的序数为$i+1$级关键数（$0<i\leqslant k$）且F_i有性质（1）F_i绝对，递增且$F_{i-1}(\beta)=\beta\to\exists\alpha(F_i(\alpha)=\beta)$，（2）$\bigcup[F_i(\gamma)|\gamma\in x]=F_i(\bigcup x)$对非空序数集成立，（3）$x$是非空的$i$级关键数集，则$\bigcup x$是$i$级关键数，（4）$\exists\alpha(\alpha>\beta\wedge F_i(\alpha)=\alpha)$则由（1）～(4）可知$\Gamma_0$是$i+1$级关键数。如定义$F_{k+1}(\alpha)=\mu_\beta(F_k(\beta)=\beta\wedge\beta\geqslant\sup^+[F_{k+1}(\gamma)|\gamma<\alpha])$，则由归纳假设可证明（1）～(4）对$F_{k+1}$成立，进而可知$\Gamma_0$是$k+2$级关键数。由于证明过程类同于6.10～6.17，这里略去。因此我们有

定理 6.18　Γ_0是k（k为任意的自然数）级关键数。

定理6.18使我我知道Γ_0在可数序数中是一个很大的序数。如果把可数的k级关键数所成的集记成A_k，则有$A_0\subset A_1\subset A_2\subset\cdots$，并且每一个$A_k$比前一个都要稀得多。由于$\Gamma_0$属于每一个$A_k$，所以它在每一个$A_k$中都是第$\Gamma_0$个元素，而$\Gamma_0$在关键数中的级数每升高一级，都使它在全体可数序数中的位置很大地后推。

参　考　文　献

[1]　Barwise, J., "Handbook of Mathematical Logic", North-Holland, 1977.

[2]　shoenfield, J. R. "Mathematical Logic", Addison-wesleag 1967.

[3]　Levy, A., "Basic Set Theory" Springer-Verlag, 1977.

[4]　Schütte, "Proof Theory", Springer-Verlag, 1977.

A Property of Upper Bounded Ordinal of the Model of ZFC

By Sun Wen-zhi（孙文植）

Abstract

Forcing has assumed that there is a countable transitive model of ZFC. The least ordinal which is not in the model is called it's upper bounded ordinal. In this paper the critical number of ordinal addition is called the zero-order's critical number, the fixed point of the enumerating function of the zero-order's critical number is called one-order's critical number. and so on. It is proved that the upper bounded ordinal is a k-order's critical number (k is an arbitrary natural number). Therefore, it is a huge ordinal in all countable ordinals.