1982年 第2卷 第4期
Vol.2, No.4, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

叙列空间上的二级囿变函数I*

吴从炘　　赵林生

（哈尔滨工业大学）　（哈尔滨第17中学）

闵嗣鹤等人结合广义调和分析引入二级囿变函数和二级 Stieltjes 积分并作了一系列研究(参看[1]-[4])．作者之一在[5]中又较系统地讨论了叙列空间上的囿变函数．本文将这两方面工作联系起来，考虑叙列空间上的二级囿变函数．为此我们先在[4]的基础上，对通常二级囿变函数作些进一步的探讨，特别是引进二级变差函数并得到它与二级囿变函数之间的关系，这就是§1的内容．§2我们将给出叙列空间上二级囿变函数的定义及其刻划．至于其它问题则留待另文述之．

由于一维欧氏空间也是一种叙列空间，所以通常的二级囿变函数也可看成是叙列空间上二级囿变函数之特例．

§1 二级变差函数

我们先列举直接要用到的主要概念和结论．

设 $x(t)$定义在$[a,b]$上，若

$$\bigvee_a^b{}^2(x)\triangleq\sup_{D}\sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\frac{x(t_i)-x(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right|<\infty,$$

则称 $x(t)$为$[a,b]$上的二级囿变函数，其中D取遍$[a,b]$的一切分划：

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b.$$

定理A $x(t)$ 为二级囿变当且仅当下列条件成立：

(i) 存在至多为可列的集 $E\subset[a,b]$使得 $x'(t)$在$[a,b]-E$上确定并连续；

(ii) 在 $t_0^*\in E$ 处恒存在

$$x'(t_0^*-0)\triangleq\lim_{\substack{t\to t_0^{*-}\\ t\in[a,b]-E}}x'(t),\quad x'(t_0^*+0)\triangleq\lim_{\substack{t\to t_0^{*+}\\ t\in[a,b]-E}}x'(t);$$

1981年9月4日收到.

(iii) $\sup\limits_{D}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1}|x'(t_{i+1}-0)-x'(t_i+0)|+\sum\limits_{i=1}^{n-1}|x'(t_i+0)-x'(t_i-0)|\right)<\infty$.

此外，在必要情况下(iii)的左端 $\leqslant\bigvee\limits_a^b{}^2(x)$，而在充分情况下(iii)的左端 $\geqslant\bigvee\limits_a^b{}^2(x)$.

定理B 设 $a<c<b$，若 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上为二级囿变，则它在 $[a,c]$，$[c,b]$ 上亦为二级囿变且

$$\bigvee_a^c{}^2(x)+\bigvee_c^b{}^2(x)\leqslant\bigvee_a^b{}^2(x).$$

反之，若 $x(t)$ 在 $[a,c]$，$[c,b]$ 上为二级囿变，则它在 $[a,b]$ 上亦为二级囿变且

$$\bigvee_a^b{}^2(x)\leqslant\bigvee_a^c{}^2(x)+\bigvee_c^b{}^2(x)+|x'(c+0)-x'(c-0)|.$$

以上内容均取自于[4].

由定理 A 容易证得

命题1 $[a,b]$ 上函数 $x(t)$ 为二级囿变当且仅当满足定理 A 中的条件 (i)，(ii) 以及

(iii)′ $x'(t-0)$，$x'(t+0)$ 有一为囿变(补充规定 $x'(a-0)=x'(a+0)$，$x'(b+0)=x'(b-0)$)；

(iv) $\sum\limits_{t_n^*\in E_0}|x'(t_n^*+0)-x'(t_n^*-0)|<\infty$，其中 $E_0\subset E$ 为 $x'(t)$ 不存在的点的集.

此外，在必要情况下 $\bigvee\limits_a^b(x'(t-0))$，$\bigvee\limits_a^b(x'(t+0))$ 以及 $\sum\limits_{t_n^*\in E_0}|x'(t_n^*+0)-x'(t_n^*-0)|$ 均 $\leqslant\bigvee\limits_a^b{}^2(x)$，而在充分情况下 $\bigvee\limits_a^b{}^2(x)\leqslant\bigvee\limits_a^b(x'(t-0))+2\sum\limits_{t_n^*\in E_0}|x'(t_n^*+0)-x'(t_n^*-0)|$ 且 $\leqslant\bigvee\limits_a^b(x'(t+0))+\sum\limits_{t_n^*\in E_0}|x'(t_n^*+0)-x'(t_n^*-0)|$.

定义1 设 $x(t)$ 为 $[a,b]$ 上的二级囿变函数，则称 $\bigvee\limits_a^t{}^2(x)$ 为 $x(t)$ 的二级变差函数.

由定义 1 不难得到

命题2 $\bigvee\limits_a^t{}^2(x)$ 为渐升函数.

定理1 设 $x(t)$ 为 $[a,b]$ 上的二级囿变函数，则 $\bigvee\limits_a^t{}^2(x)$ 在 $t_0^*\in[a,b]$ 处连续当且仅当 $t_0^*\notin E_0$ 且 $x'(t-0)$，$x'(t+0)$ 有一在 t_0^* 处连续，其中 E_0 的含意如同命题 1.

证 必要性 若 $t_0^*\in E_0$，则由命题 1，2 和定理 B 便知对任何 $\varepsilon>0$ 有 $\delta>0$ 使当 $0<h\leqslant\delta$ 时

$$\sum_{t_n^*\in E_0\cap(t_0^*-h,\ t_0^*+h)}|x'(t_n^*+0)-x'(t_n^*-0)|\leqslant\bigvee_{t_0^*-h}^{t_0^*+h}{}^2(x)$$

$$\leqslant\bigvee_a^{t_0^*+h}{}^2(x)-\bigvee_a^{t_0^*-h}{}^2(x)=\left(\bigvee_a^{t_0^*+h}{}^2(x)-\bigvee_a^{t_0^*}{}^2(x)\right)+\left(\bigvee_a^{t_0^*}{}^2(x)-\bigvee_a^{t_0^*-h}{}^2(x)\right)$$

$$<\varepsilon,$$

故 $|x'(t_0^*+0)-x'(t_0^*-0)|<\varepsilon$，即 $x'(t_0^*+0)=x'(t_0^*-0)$，亦即 $t_0^*\notin E_0$，矛盾。

于 $\varepsilon>0$，则由 $t_0^*\notin E_0$ 和命题 1 可知有 $\delta_1>0$ 使当 $0<h\leqslant\delta_1$ 时

$$\sum_{t_n^*\in E_0\cap[t_0^*-h,\ t_0^*+h]}|x'(t_n^*+0)-x'(t_n^*-0)|<\varepsilon/2,$$

特别有 $|x'(t_0^*+h+0)-x'(t_0^*+h-0)|<\varepsilon/2$。又根据定理 B 可取 $\delta_2>0$ 使当 $0<h\leqslant\delta_2$ 时

$$\bigvee_{t_0^*}^{t_0^*+h}{}^2(x)\leqslant\bigvee_a^{t_0^*+h}{}^2(x)-\bigvee_a^{t_0^*}{}^2(x)<\varepsilon/2.$$

于是对 $[t_0^*,\ t_0^*+h]$ 利用命题 1（注意：以下始终将 $x'(t+0)$ 看成定义在 $[a,b]$ 上的函数）便知当 $0<h\leqslant\min(\delta_1,\delta_2)$ 时

$$\bigvee_{t_0^*}^{t_0^*+h}(x'(t+0))\leqslant\bigvee_{t_0^*}^{t_0^*+h}{}^2(x)+|x'(t_0^*+h+0)-x'(t_0^*+h-0)|<\varepsilon,$$

故 $\bigvee\limits_a^t(x'(t+0))$ 在 t_0^* 处为右连续，从而再由［6］系 1.1 即得 $x'(t+0)$ 在 t_0^* 处为右连续。至于 $x'(t+0)$ 在 t_0^* 处左连续则更为明显。

类似地还可以证明 $x'(t-0)$ 在 t_0^* 处连续。

充分性　为确定起见，不妨设 $x'(t+0)$ 在 t_0^* 处连续。

对于 $\varepsilon>0$，由于此时 $\bigvee\limits_a^t(x'(t+0))$ 在 t_0^* 处也连续，所以自然有 $\delta_1>0$ 使当 $0<h\leqslant\delta_1$ 时

$$\bigvee_{t_0^*-h}^{t_0^*+h}(x'(t+0))=\bigvee_{t_0^*}^{t_0^*+h}(x'(t+0))+\bigvee_{t_0^*-h}^{t_0^*}(x'(t+0))<\varepsilon/4,$$

又由命题 1 和 $t_0^*\notin E_0$ 可知有 $\delta_2>0$ 使当 $0<h\leqslant\delta_2$ 时

$$\sum_{t_n^*\in E_0\cap[t_0^*-h,\ t_0^*+h]}|x'(t_n^*+0)-x'(t_n^*-0)|<\varepsilon/4.$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$ 并使 $t_0^*-\delta\notin E_0$，则对 $[t_0^*-h,\ t_0^*+h]$ 利用命题 1 便知当 $0<h\leqslant\delta$ 时有

$$\bigvee_{t_0^*-h}^{t_0^*+h}{}^2(x)\leqslant\bigvee_{t_0^*-h}^{t_0^*+h}(x'(t+0))+|x'(t_0^*+h+0)-x'(t_0^*+h-0)|$$

$$+2\sum_{t_n^*\in E_0\cap[t_0^*-h,\ t_0^*+h]}|x'(t_n^*+0)-x'(t_n^*-0)|<\varepsilon$$

由此再利用定理 B 当 $0<h\leqslant\delta$ 时有

$$\bigvee_a^{t_0^*+h}{}^2(x)-\bigvee_a^{t_0^*}{}^2(x)\leqslant\bigvee_{t_0^*}^{t_0^*+h}{}^2(x)+|x'(t_0^*+0)-x'(t_0^*-0)|$$

$$=\bigvee_{t_0^*}^{t_0^*+h}{}^2(x)<\varepsilon$$

和

$$\overset{t_0^*}{\underset{a}{\bigvee}}{}^2(x)-\overset{t_0^*-h}{\underset{a}{\bigvee}}{}^2(x)\leqslant\overset{t_0^*}{\underset{a}{\bigvee}}{}^2(x)-\overset{t_0^*-\delta}{\underset{a}{\bigvee}}{}^2(x)\leqslant\overset{t_0^*}{\underset{t_0^*-\delta}{\bigvee}}{}^2(x)+|x'(t_0^*-\delta+0)-x'(t_0^*-\delta-0)|$$

$$=\overset{t_0^*}{\underset{t_0^*-\delta}{\bigvee}}{}^2(x)<\varepsilon,$$

即$\overset{t}{\underset{a}{\bigvee}}{}^2(x)$ 在 t_0^* 处连续。

注 在上述定理的证明中，由于 $t_0^*=a$，b 的情形无须作多少改动，所以就不另指出了。

命题3 $x(t)$ 为 $[a,b]$ 上连续可导的二级囿变函数当且仅当$\overset{t}{\underset{a}{\bigvee}}{}^2(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数。

并且此时有 $\overset{t}{\underset{a}{\bigvee}}{}^2(x)=\overset{t}{\underset{a}{\bigvee}}(x')$。

证 由定理1即可得到它们的等价性，至于等式由命题1亦可推出

根据[6]关于 $\overset{t}{\underset{a}{\bigvee}}(x)$与$x(t)$之间性质的相似性的讨论，由此自然又可进一步得到$\overset{t}{\underset{a}{\bigvee}}{}^2(x)$与 $x(t)$ 之间的一些相似性质。为节省篇幅起见，此处只举出其中之一，这就是

命题4 $x(t)$ 为二级囿变并且 $x'(t)$ 为绝对连续当且仅当 $\overset{t}{\underset{a}{\bigvee}}{}^2(x)$ 为绝对连续。

根据[4]，实际上这又给出了二级绝对连续函数的一种新特征，即 $\overset{t}{\underset{a}{\bigvee}}{}^2(x)$ 为绝对连续。

§2 叙列空间上的二级囿变函数及其刻划

本节我们沿用[5]中的一些名词和记号。

设 λ 为某些实数叙列 $X=(x_1,x_2,\cdots)$ 关于通常加法和数量乘法组成的线性空间，叫做叙列空间。又规定 λ^* 为所有满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_kx_k|<\infty$$

的 $U=(u_1,u_2,\cdots)$ 的全体所构成的叙列空间。

我们称从 $[a,b]$ 到叙列空间 λ 的抽象函数

$$X(t)=(x_1(t),\ x_2(t),\cdots)$$

为囿变函数，假如对任何 $U\in\lambda^*$ 有

$$\sup_D\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\ |x_k(t_{i+1})-x_k(t_i)|<\infty.$$

定义2 我们称 $X(t)$ 为二级囿变，假如对任何 $U\in\lambda^*$ 有

$$\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}{}^2(X,U)\triangleq\sup_D\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left|\frac{x_k(t_{i+1})-x_k(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\frac{x_k(t_i)-x_k(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right|<\infty.$$

定理2　设 $X(t)=\{x_k(t)\}$ 为从 $[a,b]$ 到叙列空间 λ 的抽象函数，则下列命题等价：

(1) $X(t)$ 为二级囿变；

(2) $X(t)$ 满足：1° $x_k(t)$ 为通常的二级囿变函数$(k=1,2,\cdots)$，

2° $X'(t+0)\triangleq\{x'_k(t+0)\}$，$X'(t-0)\triangleq\{x'_k(t-0)\}$ 有一为囿变，

3° $l=\{l_k\}\in\lambda^{**}$，其中 $l_k=\sum\limits_{t^*_{nk}\in E_0^{(k)}}|x'_k(t^*_{nk}+0)-x'_k(t^*_{nk}-0)|$，而 $E_0^{(k)}$ 为 $x'_k(t)$ 不存在的点的集；

(3) $X(t)$ 满足：(i) $x_k(t)$ 为通常的二级囿变函数 $(k=1,2,\cdots)$，

(ii) $(\bigvee\limits_a^b{}^2(x_1),\ \bigvee\limits_a^b{}^2(x_2),\cdots)\in\lambda^{**}$.

证　(1)⇒(2)

因为显然有 $e_k=(\overbrace{0,\cdots,0}^{k-1},1,0,0,\cdots)\in\lambda^*$，又取 $U=e_k$，则

$$\bigvee_a^b{}^2(X,U)=\sup_D\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left|\frac{x_k(t_{i+1})-x_k(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\frac{x_k(t_i)-x_k(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right|$$

$$=\bigvee_a^b{}^2(x_k)$$

故 1° 成立.

今证 2°. 如若 $X'(t+0)$ 非囿变，则由 [5] 定理 5 不妨设有 $U^{(0)}\in\lambda^*$，$u_k^{(0)}\neq 0(k=1,2,\cdots)$ 和自然数 N_n 以及 $\varepsilon_n>0$ 使得

$$\sum_{k=1}^{N_n}|u_k^{(0)}|\bigvee_a^b(x_k(t+0))=n+\varepsilon_n\quad(n=1,2,\cdots).$$

因为 $x_k(t)$ 为二级囿变，故对 $k=1,2,\cdots,N_n$ 有 $[a,b]$ 的分划 D_k:

$$a=s_0^{(k)}<s_1^{(k)}<\cdots<s_{n_k}^{(k)}=b$$

使得

$$\bigvee_a^b(x'_k(t+0))\leqslant\sum_{i=0}^{n_k-1}|x'_k(s_{i+1}^{(k)}+0)-x'_k(s_i^{(k)}+0)|+\frac{\varepsilon_n}{2^{k+2}|u_k^{(0)}|}.$$

设 D 为合并所有 $D_k(k=1,\ 2,\cdots,N_n)$ 的分点而成的分划：

$$a=r_0^{(N_n)}<r_1^{(N_n)}<\cdots<r_{m(N_n)}^{(N_n)}=b,$$

则对 $k=1,\ 2,\cdots,N_n$ 有

$$\bigvee_a^b(x'_k(t+0))\leqslant\sum_{i=0}^{m(N_n)-1}|x'_k(r_{i+1}^{(N_n)}+0)-x'_k(r_i^{(N_n)}+0)|+\frac{\varepsilon_n}{2^{k+2}|u_k^{(0)}|}.$$

取 λ_i 满足：

$$r_i^{(N_n)}<\lambda_i<r_{i+1}^{(N_n)}\quad(i=0,\ 1,\cdots,\ m(N_n)-1),\quad\lambda_{m(N_n)-1}<\lambda_{m(N_n)}<r_{m(N_n)}^{(N_n)}$$

并对 $k=1,\ 2,\cdots,N_n$ 均有

$$\left|\frac{x_k(\lambda_{i+1})-x_k(r_{i+1}^{(N_n)})}{\lambda_{i+1}-r_{i+1}^{(N_n)}}-\frac{x_k(\lambda_i)-x_k(r_i^{(N_n)})}{\lambda_i-r_i^{(N_n)}}\right|\geqslant|x'_k(r_{i+1}^{(N_n)}+0)-x'_k(r_i^{(N_n)}+0)|$$

$$-\frac{\varepsilon_n}{m(N_n)\cdot 2^{k+2}|u_k^{(0)}|}\quad (i=0,\ 1,\cdots,\ m(N_n)-2)$$

和

$$\left|\frac{x_k(r_{m(N_n)}^{(N_n)})-x_k(\lambda_{m(N_n)})}{r_{m(N_n)}^{(N_n)}-\lambda_{m(N_n)}}-\frac{x_k(\lambda_{m(N_n)-1})-x_k(r_{m(N_n)-1}^{(N_n)})}{\lambda_{m(N_n)-1}-r_{m(N_n)-1}^{(N_n)}}\right|$$

$$\geqslant|x_k'(r_{m(N_n)}^{(N_n)}+0)-x_k'(r_{m(N_n)-1}^{(N_n)}+0)|-\frac{\varepsilon_n}{m(N_n)\cdot 2^{k+2}|u_k^{(0)}|}.$$

于是

$$\bigvee_a^b{}^2(X,U^{(0)})\geqslant\sum_{i=0}^{m(N_n)-2}\sum_{k=1}^{N_n}|u_k^{(0)}|\left(\left|\frac{x_k(\lambda_{i+1})-x_k(r_{i+1}^{(N_n)})}{\lambda_{i+1}-r_{i+1}^{(N_n)}}-\frac{x_k(r_{i+1}^{(N_n)})-x_k(\lambda_i)}{r_{i+1}^{(N_n)}-\lambda_i}\right|\right.$$

$$\left.+\left|\frac{x_k(r_{i+1}^{(N_n)})-x_k(\lambda_i)}{r_{i+1}^{(N_n)}-\lambda_i}-\frac{x_k(\lambda_i)-x_k(r_i^{(N_n)})}{\lambda_i-r_i^{(N_n)}}\right|\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{N_n}|u_k^{(0)}|\left(\left|\frac{x_k(r_{m(N_n)}^{(N_n)})-x_k(\lambda_{m(N_n)})}{r_{m(N_n)}^{(N_n)}-\lambda_{m(N_n)}}-\frac{x_k(\lambda_{m(N_n)})-x_k(\lambda_{m(N_n)-1})}{\lambda_{m(N_n)}-\lambda_{m(N_n)}-1}\right|\right.$$

$$\left.+\left|\frac{x_k(\lambda_{m(N_n)})-x_k(\lambda_{m(N_n)-1})}{\lambda_{m(N_n)}-\lambda_{m(N_n)-1}}-\frac{x_k(\lambda_{m(N_n)-1})-x_k(r_{m(N_n)-1}^{(N_n)})}{\lambda_{m(N_n)-1}-r_{m(N_n)-1}^{(N_n)}}\right|\right)$$

$$\geqslant\sum_{i=0}^{m(N_n)-1}\sum_{k=1}^{N_n}|u_k^{(0)}|\left|\frac{x_k(\lambda_{i+1})-x_k(r_{i+1}^{(N_n)})}{\lambda_{i+1}-r_{i+1}^{(N_n)}}-\frac{x_k(\lambda_i)-x_k(r_i^{(N_n)})}{\lambda_i-r_i^{(N_n)}}\right|$$

$$\geqslant\sum_{i=0}^{m(N_n)-1}\sum_{k=1}^{N_n}|u_k^{(0)}|\left(|x_k'(r_{i+1}^{(N_n)}+0)-x_k'(r_i^{(N_n)}+0)|-\frac{\varepsilon_n}{m(N_n)\cdot 2^{k+2}|u_k^{(0)}|}\right)$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{N_n}|u_k^{(0)}|\left(\bigvee_a^b(x_k'(t+0))-\frac{2\varepsilon_n}{2^{k+2}|u_k^{(0)}|}\right)$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{N_n}|u_k^{(0)}|\bigvee_a^b(x_k'(t+0))-\varepsilon_n$$

$$=n\quad(n=1,2,\cdots),$$

这与 $X(t)$ 为二级囿变矛盾。

同理也可证 $X'(t-0)$ 为囿变。

最后来证明3°。假如它不成立，则同样可设有 $U^{(0)}\epsilon\lambda^*$，$u_k^{(0)}\cdot\neq0$ $(k=1,2,\cdots)$，自然数 N_m 和 $\varepsilon_m>0$ 使得

$$\sum_{k=1}^{N_m}|u_k^{(0)}|\,l_k=m+\varepsilon_m\quad(m=1,2,\cdots).$$

设 $E_0^*=\{t_n^*\}$ 为合并所有 $E_0^{(k)}=\{t_{nk}^*\}$ 的点而成，则易见仍有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_k'(t_n^*+0)-x_k'(t_n^*-0)|=l_k\quad(k=1,2,\cdots).$$

对 $k=1,2,\cdots,N_m$ 取公共的 N_0 使

$$\sum_{n=1}^{N_0}|x_k'(t_n^*+0)-x_k'(t_n^*-0)|\geqslant l_k-\frac{\varepsilon_m}{2^{k+2}|u_k^{(0)}|}.$$

因为可以按大小顺序将 t_1^*，$t_2^*,\cdots,t_{N_0}^*$ 加以重排，所以不妨设

$$a<t_1^*<t_2^*<\cdots<t_{N_0}^*<b.$$

取 λ_n，μ_n 满足 $\mu_{n-1}<t_n^*<\lambda_n<\mu_n(n=1,2,\cdots,N_0)$ 并使对 $k=1$，$2,\cdots$，N_m 均有

$$\left|\frac{x_k(\lambda_n)-x_k(t_n^*)}{\lambda_n-t_n^*}-\frac{x_k(t_n^*)-x_k(\mu_{n-1})}{t_n^*-\mu_{n-1}}\right|\geqslant|x_k'(t_n^*+0)-x_k'(t_n^*-0)|$$

$$-\frac{\varepsilon_m}{N_0 2^{k+2}|u_k^{(0)}|}.$$

于是

$$\begin{aligned}\mathop{\vee}_a^b{}^2(X,U^{(0)})&\geqslant\sum_{n=1}^{N_0}\sum_{k=1}^{N_m}|u_k^{(0)}|\left|\frac{x_k(\lambda_n)-x_k(t_n^*)}{\lambda_n-t_n^*}-\frac{x_k(t_n^*)-x_k(\mu_{n-1})}{t_n^*-\mu_{n-1}}\right|\\&\geqslant\sum_{n=1}^{N_0}\sum_{k=1}^{N_m}|u_k^{(0)}|\left(|x_k'(t_n^*+0)-x_k'(t_n^*-0)|-\frac{\varepsilon_m}{N_0 2^{k+2}|u_k^{(0)}|}\right)\\&\geqslant\sum_{k=1}^{N_m}|u_k^{(0)}|\left(l_k-\frac{2\varepsilon_m}{2^{k+2}|u_k^{(0)}|}\right)\\&\geqslant\sum_{k=1}^{N_m}|u_k^{(0)}|\,l_k-\varepsilon_m\\&=m\quad(m=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

这也与 $X(t)$ 为二囿变矛盾。

(2)⇒(3)

这只须注意由命题 1 和[5]定理 5 可知对任何 $U\in\lambda^*$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\mathop{\vee}_a^b{}^2(x_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left(\mathop{\vee}_a^b(x_k'(t+0))+2l_k\right)<\infty$$

或

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\mathop{\vee}_a^b{}^2(x_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left(\mathop{\vee}_a^b(x_k'(t-0))+2l_k\right)<\infty.$$

(3)⇒(1)

显然对任何 $U\in\lambda^*$ 和 $[a,b]$ 的分划 D：$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，我们有

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left|\frac{x_k(t_{i+1})-x_k(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\frac{x_k(t_i)-x_k(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\mathop{\vee}_a^b{}^2(x_k)<\infty,$$

从而$\left(\bigvee_a^b{}^2(x_1),\ \bigvee_a^b{}^2(x_2),\ \cdots\right)\in\lambda^{**}$.

推论 若$X(t)=\{x_k(t)\}$为从$[a,b]$到叙列空间λ的二级囿变函数，则它亦为从$[a,b]$到λ的囿变函数.

证 由[7]$ch7$第16题之证可知对任何t'，$t''\in[a,b]$有

$$|x_k(t')-x_k(t'')|\leqslant L_k|t'-t''|\quad (k=1,2,\cdots),$$

其中

$$L_k=2\left(\bigvee_a^b{}^2(x_k)+\max\left(\left|\frac{x_k(t_0^*)-x_k(a)}{t_0^*-a}\right|,\ \left|\frac{x_k(b)-x_k(t_0^*)}{b-t_0^*}\right|\right)\right),$$

t_0^*为(a,b)的一个定点. 于是由定理2便知对任何$U\in\lambda^*$和$[c,b]$的分划D: $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，我们有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\,|x_k(t_{i+1})-x_k(t_i)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\,L_k\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)$$

$$\leqslant 2(b-a)\left(\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\bigvee_a^b{}^2(x_k)+\frac{1}{t^*-a}\sum_{k=1}^{\infty}(|x_k(t_0^*)|+|x_k(a)|)\,|u_k|\right.$$

$$\left.+\frac{1}{b-t^*}\sum_{k=1}^{\infty}(|u_k(b)|+|x_k(t_0^*)|)\,|u_k|\right),$$

从而$X(t)$为囿变.

参考文献

[1] 闵嗣鹤, On a generalization of the Stieltjes integral and its application to the general harmonic analysis, Science Record, 4 (1951), 109—118.
[2] 董怀允, On Stieltjes integral of order 2, ibid, 5 (1952), 29—43.
[3] 郭大钧，关于二级斯梯节积分的一些性质，四川大学学报（自然科学）1955年第1期，21—32.
[4] 李子平，二级绝对连续函数和二级斯提吉积分，四川大学学报(自然科学)1956年第2期，69—82.
[5] 吴从炘，Функции с ограниченной на пространстве последовательностей, Scientia Sinica, 13 (1964), No. 9, 1359—1380.
[6] Huggins, F.N., Some interesting properties of the variation functions, Amer. Math. Monthly, 83 (1976), No. 7, 538—546.
[7] 国防科技大学应用数学教研室编，实变函数论习题解答，湖南科学技术出版社(1980).

The Bounded Variation Functions of Order 2 on the Sequence Spaces I

By Wu Congxin (吴从炘), and Zhao Linsheng (赵林生)

Abstract

The Stieltjes integral and bounded variation function of order 2 were introduced by Min, S. H., Guo Dajun and etc. One of the authors introduced the notion of bounded variation function on the sequence spaces, again. In this paper we consider the variation function of order 2 and the bounded variation function of order 2 from $[a,b]$ to sequence space λ.