1982年 第2卷 第4期
Vol.2, No.4, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

Opial 不等式二十年*

陈文忠　　冯恭己　王兴华
（厦门大学）　　（杭州大学）

1960 年 Z. Opial 在[1]中建立了如下的一个不等式，这个不等式立即被随后发表的一些文献称之为 Opial 不等式：

Opial 不等式 设 $f(x)\in C^1[0,h]$ 且 $f(0)=f(h)=0$，又设 $f(x)>0$ $(0<x<h)$.则有

$$\int_0^h|f(x)f'(x)|dx\leqslant\frac{h}{4}\int_0^h f'(x)^2dx \tag{1}$$

其中常数 $\frac{h}{4}$ 是最佳的。

Opial 不等式出现后，引起国内、外许多学者的注意，先后发表大量论文，对 Opial 不等式进行广泛地推广，形成一类独特的新型不等式。本文试就二十年来 Opial 不等式的发展概况和主要结果作一粗略的介绍，全文共分四节：

§1 Opial 不等式的加强和直接推广

Z. Opial 不等式(1)发表之后，紧接着 C. Olech [2]削弱了 Opial 的条件，证得

定理 1.1 设 $f(x)$ 在$[1,h]$上绝对连续，且设 $f(0)=f(h)=0$. 则 Opial 不等式(1)仍然成立，而其中的等号当且仅当

$$f(x)=\begin{cases}Cx & \left(0\leqslant x\leqslant\frac{h}{2}\right),\\ C(h-x) & \left(\frac{h}{2}\leqslant x\leqslant h\right)\end{cases}$$

时适用，这里 C 是常数。

C. Olech 的证明比 Z. Opial 的证明简单得多。他指出定理 1.1 是如下定理的推论。

定理 1.2 设 $g(x)$ 在$[0,a]$上绝对连续且 $g(0)=0$，则有

$$\int_0^a|g(x)g'(x)|dx\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a g'(x)^2dx \tag{2}$$

*1981年12月10日收到。

式中等号当且仅当 $g(x)=Cx$ 时适用，这里C为常数。

事实上，若定理1.2 成立，则当 $f(x)$ 满足定理 1.1 条件时，我们取 $a=\frac{h}{2}$、$g(x)=f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant\frac{h}{2})$。就有

$$\int_0^h |f(x)f'(x)|dx\leqslant\frac{h}{2}\int_0^h f'(x)^2dx.$$

又取$a=\frac{h}{2}$、$g(x)=f(h-x)$ $\left(\frac{h}{2}\leqslant x\leqslant h\right)$，有

$$\int_0^{\frac{h}{2}}|f(h-x)f'(h-x)|dx\leqslant\frac{h}{4}\int_0^{\frac{h}{2}}[f'(h-x)]^2dx.$$

在上式中令 $h-x=t$ 得

$$\int_{\frac{h}{2}}^h |f(x)f'(x)|dx\leqslant\frac{h}{4}\int_{\frac{h}{2}}^h f'(x)^2dx.$$

将得到的两个不等式相加就得到不等式（1），并且等号成立的情形从过述证明也看得很清楚。

随后 P.R.Beesack[3]、N.Levinson[4]、C.L.Mallows[5]、以及 R.N.Redersen[6] 都先后给出了 Opial 不等式各种不同的简化证明，这里只介绍 Mallows 在[5]中关于不等式(2)的证明。令 $h(x)=\int_0^x|g'(t)|dt$，则有$|g(x)|\leqslant h(x)$ $(0\leqslant x\leqslant a)$，于是

$$2\int_0^a|g'(x)g(x)|dx\leqslant\int_0^a h'(x)h(x)dx=h^2(a).$$

利用 Schwarz 不等式有

$$h^2(x)=\left(\int_0^a h'(x)dx\right)^2\leqslant\int_0^a dx\int_0^a h'(x)^2dx=a\int_0^a|g'(x)|^2dx \tag{3}$$

从而得到

$$\int_0^a|g'(x)g(x)|dx\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a|g'(x)|^2dx.$$

因为在(3)中等号当且仅当 $g(x)=Cx$ (C为常数)适用，所以不等式(2)中的等号也如此。

1962 年， P.R.Beesack 在[3]中除了进一步简化 Opial 不等式的证明外，首次将 Opial 不等式直接推广为下面较一般的形式：

定理1.3 设$p(x)$是(a,X) $(-\infty\leqslant a<X<+\infty)$上的正值连续函数且$\int_a^X\frac{dx}{p(x)}<+\infty$，又设 $f(x)$ 在$[a,X]$上绝对连续且

$$f(x)=\int_a^x f'(t)dt \qquad (a\leqslant x\leqslant X),$$

$$f^2(x)=O\left(\int_a^x\frac{dt}{p(t)}\right) \qquad (x\to a^+).$$

则有

$$\int_a^X|f(x)f'(x)|dx\leqslant\frac{1}{2}\int_a^X\frac{dx}{p(x)}\int_a^X p(x)f'(x)^2px.$$

等号当且仅当

$$f(x)=C\int_a^x\frac{dt}{p(t)}$$

时适用，其中C为常数。

定理 1.4　设 $p(x)$ 是 (a,b) 上的正值连续函数且 $\int_a^b \frac{dx}{p(x)} < +\infty$，若 X 使得 $\int_a^X \frac{dt}{p(t)} = \int_X^b \frac{dt}{p(t)}$，又设 $f(x)$ 在每个子区间 $[a,X]$、$[X,b]$ 上绝对连续且

$$f(x)=\begin{cases}\int_a^x f'(t)dt & (a\leqslant x\leqslant X);\\ -\int_x^b f'(t)dt & (X\leqslant x\leqslant b),\end{cases}$$

$$f^2(x)=\begin{cases}O\left(\int_a^x \frac{dt}{p(t)}\right) & (x\to a^+);\\ O\left(\int_x^b \frac{dt}{p(t)}\right) & (x\to b^-).\end{cases}$$

则有

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leqslant \frac{K}{2}\int_a^b p(x)f'(x)^2dx. \tag{4}$$

其中 $K=\int_a^X \frac{dt}{p(t)}=\int_X^b \frac{dt}{p(t)}$。不等式(4)中的等号当且仅当

$$f(x)=\begin{cases}A\int_a^X \frac{dt}{p(t)} & (a\leqslant x\leqslant X);\\ B\int_X^b \frac{dt}{p(t)} & (X\leqslant x\leqslant b)\end{cases}$$

时适用，这里A，B是常数。

在定理 1.4 中取 $a=0$，$p(x)\equiv 1$ 便是 Opial 不等式(1)。

1966 年 G.S.Yang 在[7]中简化了 Beesack 上面两个定理的证明，并沿同一方向进一步推广得到

定理1.5　设 $p(x)$ 是 (a,X) 上的正值连续函数且 $\int_a^X \frac{dx}{p(x)} < +\infty$，又设 $q(x)$ 是 $[a,X]$ 上的正值、不增有界函数。若 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上绝对连续且 $f(a)=0$，则

$$\int_a^X q(x)|f(x)f'(x)|dx \leqslant \frac{1}{2}\int_a^X \frac{dx}{p(x)}\int_a^X p(x)q(x)f'(x)^2dx,$$

式中等号当且仅当 $q(x)\equiv$ 常数而 $f(x)=C\int_a^X \frac{dt}{p(t)}$ 时适用，这里C为常数。

同一论文也对定理 1.4 作了同样的推广。

1965 年，华罗庚在[8]中沿另一个方向直接推广 Opial 不等式，他对 $q=1$，p 为自然数建立如下定理，并猜想对于 $p>0$ 定理仍然成立。

定理1.6　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续且 $f(a)=0$，则对 $p\geqslant 0$，$q\geqslant 1$ 有

$$\int_a^b |f(x)|^p|f'(x)|^q dx \leqslant \frac{q}{p+q}(b-a)^p\int_a^b |f'(x)|^{p+q}dx. \tag{5}$$

1966 年 G.S.Yang 在[7]中对 $p\geqslant 1$，$q\geqslant 1$ 证明不等式(5)成立。1967 年 J.S.W.Wong 在[9]中给出定理 1.6 一个非常简短的证明。但实际上正如 1971 年 P. R. Beesack 在[10]中指出的，Yang 的证明对于 $p\geqslant 0$，$q\geqslant 1$ 也是正确的。

若$f(a)=f(b)=0$，从定理1.6可导出

定理1.7 若$f(x)$在$[a,b]$上绝对连续且$f(a)=f(b)=0$，则对$p\geqslant 0$，$q\geqslant 1$有

$$\int_a^b |f(x)|^p |f'(x)|^q dx \leqslant \frac{q}{p+q}\left(\frac{b-a}{2}\right)^p \int_a^b |f'(x)|^{p+q} dx. \tag{6}$$

我们称不等式(5)和(6)为Opial-华罗庚不等式。

应当指出Opial-华罗庚不等式中的等号仅当$q=1$时才有适用的可能性存在，而当$q>1$时不等式常是严格的。事实上，1969 K.M.Das在[11]中将不等式(5)改进为

$$\int_a^b |f(x)|^p |f'(x)|^q dx \leqslant \frac{q^{\frac{q}{p+q}}}{p+q}(b-a)^p \int_a^b |f'(x)|^{p+q} dx \tag{7}$$

1974年D.T.Sham在[12]中将Opial-华罗庚不等式加强为如下定理。

定理1.8 设$f(x)$在$[a,b]$上绝对连续且$f(a)=0$。若$p>0$，则有

$$\int_a^b |f(x)|^p |f'(x)| dx + \frac{p(b-a)^p}{p+1}\int_a^b \frac{g_2(x)}{(x-a)^{p+1}} dx \leqslant \frac{(b-a)^p}{p+1}\int_a^b |f'(x)|^{p+1} dx, \tag{8}$$

其中 $$g_2(x)=(p+1)\int_a^x |f(t)|^p |f'(t)| dt - |f(x)|^{p+1} \geqslant 0.$$

特别地，若$f'(x)$在(a,b)内不变号，则$g_2(x)\equiv 0$，于是不等式(8)就是Opial-华罗庚不等式，而当$f'(x)$在(a,b)内变号，则$g_2(x)\geqslant 0$，因此不等式(8)加强了Opial-华罗庚不等式。

1979年〈科学通报〉不适宜地发表了论文[13]，导致国内一些学者去证明Opial-华罗庚不等式([14],[15],[16])。1981年何天晓、王寿城在[17]中从形式上推广了Opial-华罗庚不等式。随后党诵诗．胡克等也都在同一方向上做了些改进工作，综合他们的结果得到如下较一般的结果。

定理1.9 设$p\geqslant s>0$，又设$f(x)$在$[a,b]$上绝对连续且$f(x)=0$，则对$\alpha<\beta$且α、$\beta\in[a,b]$有

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|^p |f'(x)| dx$$

$$\leqslant \begin{cases} \left(\frac{p+1}{s+1}\right)^s \frac{1}{s+1}\left\{\left(\left[(\beta-a)^s\int_a^\beta |f|^{p-s}|f'|^{s+1}dx\right]^2-\left[\frac{A_{\beta\alpha}}{\beta-\alpha}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}-(\alpha-a)^s\int_a^\alpha f|^{p-s}|f'|^{s+1}dx\right\}; & (p\geqslant s\geqslant 1, \\ \left(\frac{p+1}{s+1}\right)^s \frac{1}{s+1}\left\{\left(\int_a^\beta |f|^{p-s}|f'|^{s+1}dx\right)^{1-s}\left(\left[(\beta-a)\int_a^\beta |f|^{p-s}|f'|^{1+s}dx\right]^2-\left[\frac{A_{\beta_\alpha}}{\beta-\alpha}\right]^2\right)^{\frac{s}{2}} \right. & \end{cases}$$

$$\left. -(\alpha-a)^s\int_c^\alpha |f|^{p-s}|f'|^{s+1}dx\right\} \quad (p\geqslant s>0,\ s\leqslant 1)$$

其中 $$A_{\beta、\alpha}=(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta |f|^{p-S}|f'|^{1+s}e(x)dx-\int_\alpha^\beta e(x)dx\int_\alpha^\beta |f|^{p-S}|f'|^{S+1}dx$$

这里的$\epsilon(x)$是选取使得$1-e(x)+e(y)\geqslant 0\ (x,y\in(\alpha、\beta))$的任何实值函数。若选取$\epsilon(x)\equiv$常数，则$A_{\beta、\alpha}=0$。

在定理1.9中若取$e(x)$使得$A_{\beta、\alpha}\neq 0$，则得到的不等式改进了Opial-华罗庚不等式，特别当$s=p$时是胡克得到的，而取$e(x)\equiv$常数则是党诵诗到得的。又若取$s=p$且$\epsilon(x)\equiv$

常数，便是[17]中的结果.

1968年 D. Willett 在[18]中建立了含有高阶导数的 Opial 型不等式. 从此开辟直接推广 Opial 不等式的另一个方向，他得到

定理1.10　设 $f(x)\in C^{n-1}[a,b]$，又 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，且 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，$(n\geqslant 1)$. 则存在常数 $C_n\leqslant\frac{1}{2}$ 使得

$$\int_a^b|f(x)f^{(n)}(x)|dx\leqslant C_n(b-a)^n\int_a^b|f^{(n)}(x)|^2dx. \tag{9}$$

在同一论文中 D. Willett 利用不等式(9)去证明 n 阶线性微分方程解的存在和唯一性.

1969 年 K.M.Das 在[11]中将不等正(9)中的常数 C_n 的界值改进为

$$C_n\leqslant\frac{1}{2n!}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{\frac{1}{2}}\quad(n\geqslant 1).$$

并指出不等式 (9) 除 $n=1$ 外是严格的. 在同一文章中 Das 还指出，若要求 $f(b)=f'(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0$，则不等式(9)中的常数 C_n 可改为 $\frac{C_n}{2^n}$.

记不等式(9)中常数 C_n 的最佳值为 C_n^*. 1969 年 D.W.Boyd 在[20]中得到如下两个定理.

定理1.11　i) 若 $n=2m+1$　$(m=0,1,2,\cdots)$ 则

$$C_n^*=\frac{\lambda_0}{2^n(n-1)!}$$

其中 λ_0 是如下的 $(n+1)$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的最大特征值，这里

$$a_{ij}=C_{2m}^{2i}\frac{1}{2m-2j+2i+1};\quad(i,j=0,1,2,\cdots m).$$

ii) 若　$n=2m(m=1,2,\cdots)$，则

$$C_n^*=\frac{1}{\alpha_0^n2^n(n-1)!}$$

其中 α_0 是方程 $\det B(\alpha)=0$ 的最小正根，这里 $B(\alpha)=(b_{ij}(\alpha))$ 是 m 阶矩阵：

$$b_{ij}(\alpha)=\omega^{2ij}\alpha^{2ij}\sum_{k=0}^{2m-2i-1}(-1)^k\frac{g_j^{(k)}(1)}{k}$$

$$g_j(x)=\mathrm{ch}(\omega^j\alpha x)、\qquad\omega=\exp\frac{2\pi i}{n}$$

$$(i,j=0,1,2,\cdots,m-1).$$

定理 1.12　对 $n=1,2\cdots$ 有

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{C_n^*}{2n!}\leqslant\left(\frac{n}{4n-2}+\frac{1}{C_{2n}^n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

从而可见　$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^*}{2n!}=\frac{1}{2}.$$

K.M.Das 在[11]中还将 Opial-华罗庚不等式推广到含有高阶导数的情况，得到

定理 1.13　设 p、$q>0$ 且 $p+q\geqslant 1$．又设 $f(x)\in C^{n-1}[a,b]$ 且 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，并且 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0\,(n\geqslant 1)$．则存在常数 $C_n(p,q)$，使

$$\int_a^b |f(x)|^p|f^{(n)}(x)|^q dx\leqslant C_n(p,q)(b-a)^{np}\int_a^b |f^{(n)}(x)|^{p+q}dx, \tag{10}$$

其中

$$C_n(p,q)=\frac{1}{p+q}q^{\frac{q}{p+q}}\left(\frac{n(p+q-1)}{n(p+q)-1}\right)^{p\frac{p+q-1}{p+q}}(n!)^{-p}.$$

在不等式(10)中取 $n=1$ 得到(7)，若不等式(10)中 $p+q=1$，则有

$$\int_a^b |f(x)|^p|f^{(n)}(x)|^q dx\leqslant\frac{q^q}{(n!)^p}(b-a)^{np}\int_a^b |f^{(n)}(x)|dx.$$

在文章中，Das 还指明了不等式适用的情形：或是 $f^{(n)}(x)\equiv 0\,(a<x<b)$，或是 $n=1$ 且 $f^{(n-1)}(x)=C(x-a)^q$（C 为常数）．

注意，不等式(10)中最佳常数尚未确定．

§2　隐型的 Opial 不等式

1967 年 J.Calvert 在[21]中建立了隐型的 Opial 不等式．他得到如下两定理．

定理 2.1　设 $f(x)$ 在 (a,b) 上绝对连续且 $f(a)=0\,(-\infty\leqslant a<b<+\infty)$．又设 $g(t)$ 是对 f 的值域以及 $t=\int_a^x|f'(u)|du$ 有定义的复值连续函数，对任何 t，有 $|g(t)|\leqslant g(|t|)$，而对 $t>0$，$g(t)$ 是不减函数．写 $\mathrm{F}(x)=\int_0^x g(t)dt\,(x>0)$．则对 $p>1$ 以及正值连续函数 $r(x)\in \mathrm{L}^{1-q}(a,b)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$，有

$$\int_a^b |g(f)||f'(x)|dx\leqslant \mathrm{F}\left(\left(\int_a^b r(x)^{1-q}dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b r(x)|f'(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

式中的等号，适用于 $f(x)=C\int_a^x r(x)^{1-q}dx$（$C$ 为常数）．

若 $f(b)=0\,(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$，定理结论仍然成立，但此时不等式中的等号适用 $f(x)=C\int_x^b r(t)^{1-q}dt$（$C$ 为常数）．

特别，在定理 2.1 中取 $g(t)=t^{p-1}\,(p>1)$，得

$$\int_a^b |f(x)|^{p-1}|f'(x)|dx\leqslant\frac{1}{p}\left(\int_a^b r(x)^{1-q}dx\right)^{p-1}\left(\int_a^b r(x)|f'(x)|^p dx\right).$$

若令 $l=p-1$，则对 $l>0$ 有

$$\int_a^b |f(x)|^l|f'(x)|dx\leqslant\frac{1}{l+1}\left(\int_a^b r(x)^{-\frac{1}{l}}dx\right)\int_a^b r(x)|f'(x)|^{l+1}dx$$

这是定理 1.3 Beesack 不等式的直接推广．

当 p 适合某些条件时，定理 2.1 中不等式可以反向．譬如

理定 2.2　设 $f(x)$ 在 (a,b) 绝对连续且 $f(a)=0\,(-\infty\leqslant a<b<+\infty)$，而 $g(x)$、$r(x)$ 同定理 2.1 所设，若 $p<1$、$\frac{1}{p}+\frac{1}{g}=1$，令 $\mathrm{G}(x)=\int_0^x\frac{dt}{g(t)}\,(x>0)$，则有

$$\int_a^b \frac{|f'(x)|}{|g(f)|}dx \geqslant G\left[\left(\int_a^b r(x)^{1-q}dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b r(x)|f'(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

式中等号适用于 $f(x)=C\int_0^x r(t)^{1-q}dt$（$C$ 为常数）。

J.Calvert 在原文中曾断言定理 2.1 和定理 2.2 已把不等式中等号适用的情况全部指出来了。但 P.R.Beesack 指出这个断言是不正确的。

在定理 2.2 中特别取 $g(t)=t^{p-1}(0<p<1)$，$p-1=l$，则对 $-1<l<0$ 有

$$\int_a^b |f(x)|^l|f'(x)|dx \geqslant \frac{1}{l+1}\left(\int_a^b r(x)^{-\frac{1}{l}}dx\right)^l\int_a^b r|f'(x)|^{l+1}dx.$$

等号当且仅当 $f(x)=C\int_a^x r(t)^{-\frac{1}{l}}dt$（$C$ 为常数）时适用。

1967 年E.K.Godunova 和 V.I.Levin 在[22]中建立了与 Calvert 结果相似的不等式。

定理 2.3 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上绝对连续且 $f(a)=f(b)=0$，又设 $q(x)>0\ (a\leqslant x\leqslant b)$ 且 $\int_a^b q(x)dx=1$，若 $\Phi(u)$ 和 $\Psi(u)$ 在 $u>0$ 是凸性增加函数，且 $\Phi(0)=0$，则

$$\int_a^b \Phi'(|f(x)|)|f'(x)|dx \leqslant 2\Phi\left[\Psi^{-1}\left(\int_a^b q(x)\Psi\left(\frac{|f'(x)|}{2q(x)}\right)dx\right)\right]. \tag{11}$$

定理 2.4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续且 $f(a)=0$。若 $\Phi(x)$ 对 $x>0$ 是凸的增函数且 $\Phi(0)=0$，则有

$$\int_a^b \Phi'(|f(x)|)|f'(x)|dx \leqslant \Phi\left(\int_a^b |f'(x)|dx\right).$$

在不等式(11)中特别取 $\Phi(t)=\frac{t^2}{2}$、$\Psi(t)=t^p\ (p>1)$ 和$q(x)=S(x)^{\frac{1}{1-p}}\left(\int_a^b s(t)^{\frac{1}{1-p}}dt\right)^{-1}$ 其中$s(t)\geqslant 0\ (a\leqslant t\leqslant b)$。则得到如下不等式：

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leqslant C\left(\int_a^b s(x)|f'(x)|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} \tag{12}$$

其中 $$C=\left(\frac{1}{4}\int_a^b s(t)^{-\frac{1}{1-p}}dt\right)^{2\frac{p-1}{p}}.$$

不等式(12)改进了 P.Maroni 在[23]中得到的不等式：当 $1\leqslant p\leqslant 2$ 时

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leqslant 2^{\frac{2}{p}-1}C\left(\int_a^b s(x)|f'(x)|^p dx\right)^{\frac{2}{p}},$$

其中常数 C 与不等式(12)中的常数相同。

1972 年 G.I.Rozanova 在[24]中推广定理 2.4 建立如下不等式

定理 2.5 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上绝对连续且 $f(a)=0$，又设 $r(x)>0\ (a\leqslant x\leqslant b)$ 且 $r(a)=0$，若 $\Phi(u)$、$F(u)$ 对 $u>0$ 是凸的增加函数且 $\Phi(0)=0$，则有

$$\int_a^b r'(x)F\left(\frac{|f'(x)|}{r'(x)}\right)\Phi'\left(r(x)F\left(\frac{|f(x)|}{r(x)}\right)\right)dx$$

$$\leqslant \Phi\left(\int_a^b r'(x)F\left(\frac{|f'(x)|}{r'(x)}\right)dx\right) \tag{13}$$

在不等式(13)特别取 $F(u)=u$ 便是定理 2.4 .

定理 2.3 也可作同样的推广.

1973 年 I.D.Necŏev 在[25]中将 Rozanova 定理2.5中的不等式推广到 n 维欧氏空间.由于结果较繁，这里不再叙述.

关于含有不同函数以及不同阶导数的隐型 Opial 不等式，分别有如下两个工作. 1966 年 R.Redheffer 在[26]中得到

定理 2.6 若 u、v、w、f 在$[a,b]$下绝对连续且

$$\frac{w'(x)}{v(x)}f^2(x)+\frac{w(x)}{v'(x)}f'(x)^2\leqslant 0$$

$$w(x)v'(x)>0,\quad v'(x)\neq 0,\quad v(x)>0$$

则

$$\int_a^b\frac{w(x)}{v'(x)}\left[f^2(x)u'(x)^2+\frac{1}{2}\left(f^2(x)\right)'\left(u^2(x)\right)'\right]dx\geqslant B-A,$$

其中

$$B=\overline{\lim_{x\to b-}}\,u^2(x)f^2(x)\frac{w(x)}{v(x)},\qquad A=\underline{\lim_{x\to a+}}\,u^2(x)f^2(x)\frac{w(x)}{v(x)}.$$

1976 年 D.I.Rozanova 在[27]中得到

定理 2.7 设$f(x)$、$g(x)\in C^n[a,b]$且$f^{(n)}$、$g^{(n)}$在$[a,b]$上绝对连续，又设 $f^{(j)}(a)=g^{(j)}(a)=0\,(j=1,2,\cdots,m-1;\,1\leqslant m\leqslant n)$. $f^{(n)}(b)=g^{(n)}(b)$ 及 $f^{(n+1)}(x)$ 和 $g^{(j)}(x)\,(j=0,1,2,\cdots n+1)$ 在$[a,b]$上不变号，若 $s(x)>0$，而 $\Phi(u)$ 对 $u>0$ 是凸的增函数，则对 $0<q<1$、$p+q>0$有

$$\int_a^b s(x)\Phi\left(\frac{|f(x)|}{|g(x)|}\right)|f^{(n)}(x)|^p|f^{(n+1)}(x)|^q dx$$

$$\leqslant\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{q}{p+q}\right)^q\int_a^b G(x)\Phi\left(\left|\frac{f^{(m)}(x)}{g^{(m)}(x)}\right|\right)|f^{(n)}(x)|^{p+q}dx$$

其中

$$G(x)=|g^{(m)}(x)|\left(\int_a^b\left((t-x)^{m-1}\frac{s(t)}{|g(t)|}\right)^{\frac{1}{1-q}}dt\right)^{1-q}.$$

同年，G.I.Rozanova 在[28]中进而建立了含分数阶导数的隐型 Opial 不等式.他证得

定理 2.8 设 α 是正有理数，又设 $f(x)$、$g(x)$ 可以在 Riemann-Lionville 意义下分别通过 α 阶导数 $f^{(\alpha)}$、$g^{(\alpha)}$的积分表示出来，即

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f^{(\alpha)}(t)dt;$$

$$g(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}g^{(\alpha)}(t)dt,$$

其中 $x\in[a,b]$，此外还设$\frac{f^{(\alpha)}(x)}{|g^{(\alpha)}(x)|}$不增且$g^{(\alpha)}(x)>0\,(x\in[a,b])$，则对凸的增数 $\Phi(u)\,(u>0)$ 和正值增函数 $\Psi(u)\,(u>0)$，有

$$\int_a^b s(x)\,\Phi\left(\frac{|f(x)|}{g(x)}\right)\Psi\left(\frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{g^{(\alpha)}(x)}\right)dx$$

$$\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b G(x)\,\Phi\left(\frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{g^{(\alpha)}(x)}\right)\Psi\left(\frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{g^{(\alpha)}(x)}\right)dx,$$

其中 $s(x)$ 是正值可和函数，而

$$G(x)=g^{(\alpha)}(x)\int_a^b s(t)\,\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{g(t)}dt.$$

G.I.Rozanova 在[27]、[28]中还包含一些其他的积分不等式，详细可参阅原文。

§3 持重的 Opial 不等式

1968 年 P.R.Beesack 和 K.M.Das 在[29]中建立了持重的 Opial 不等式。他得到

定理 3.1 设实数 p、q 使得 $pq>0$ 或有 $p+q>1$ 或有 $p+q<0$，又设重函数 $s(x)$、$r(x)$ 在 (a,X) 上非负可测且使得 $\int_a^X r(x)^{-\frac{1}{p+q-1}}dx<+\infty\ (-\infty\leqslant a<X\leqslant+\infty)$。若 $f(x)$ 在 (a,X) 上绝对连续且 $f(a)=0$、$f'(x)$ 在 (a,X) 上不变号，则有

$$\int_a^X s(x)\,|f(x)|^p|f'(x)|^q dx\leqslant K(X,p,q)\int_a^X r(x)\,|f'(x)|^{p+q}dx$$

其中

$$K(X、p、q)=\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{q}{p+q}}\left(\int_a^X s(t)^{\frac{p+q}{p}}\,r(t)^{-\frac{q}{p}}\left(\int_a^t r(u)^{\frac{-1}{p+q-1}}du\right)^{p+q-1}dt\right)^{\frac{p}{p+q}}<+\infty.$$

等号当且仅当如下的情形适用：或者 $q>0$ 且 $f(x)\equiv0$，或者对某两个实数 $k_1(\geqslant0)$ 及 k_2

$$s(x)=k_1 r(x)^{\frac{q-1}{p+q-1}}\left(\int_a^x r(t)^{\frac{-1}{p+q-1}}dt\right)^{\frac{p(1-q)}{q}}$$

且

$$f(x)=k_2\int_a^x r(x)^{\frac{-1}{p+q-1}}dt$$

1972 年 G.I.Rozanova 在[30]中对由积分表示的函数类建立了类似于定理 3.1 的持重 Opial 不等式。得到

定理 3.2 设 $K(x,t)$ 在方形域 $[a,b;\ a,b]$ 上连续，$v(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若

$$f(x)=\int_a^b K(x,t)\,v(t)\,dt.$$

又设重函数 $s(x)>0$、$r(x)>0\ (a<x<b)$ 则对 $pq>0$ 且 $p+q>1$ 有

$$\int_a^b s(x)\,|f(x)|^p|v(x)|^q dx\leqslant C_1\int_a^b r(x)\,|v(x)|^{p+q}dx$$

其中

$$C_1=\left(\int_a^b s(x)^{\frac{p+q}{q}}r(x)^{-\frac{q}{p}}\left(\int_a^b K(x,t)^{\frac{p+q}{p+q-1}}r(x)^{-\frac{1}{p+q-1}}dt\right)^{p+q-1}dx\right)^{\frac{p}{p+q}}.$$

考虑到定理 3.1 和 3.2 中的常数都依赖于重函数 $r(x)$、$s(x)$ 的选取。1967 年 Boyd 和 Wong 在[31]中建立了另一类持重 Opial 不等式，此类不等式中的重函数使适合某些条件

的边值问题有解，而不等式中的常数与重函数无关。他在文章中证得

定理 3.3 设重函数 $r(x)$、$s(x)$ 是 $[0,a]$ 上非负连续可微的实函数，且使得如下边值问题：

$$\frac{d}{dx}(ry'^{p})=\lambda s'y^{p}$$

$$y(0)=0 \text{ 且 } r(a)y'(a)^{p}=\lambda s(a)y(a)^{p}$$

有一解 $y(x)$ 且 $y'(x)>0\quad(0\leqslant x\leqslant a)$。

若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ $(a<+\infty)$ 上绝对连续且 $f(0)=0$，则对所有 $p>0$ 有

$$\int_0^a|f(x)|^p|f'(x)|s(x)dx\leqslant\frac{1}{\lambda_0(p+1)}\int_0^a|f'(x)|^{p+1}r(x)dx.$$

其中 λ_0 是上述边值问题的最小特征值，等号当 $f(x)$ 是应于 λ_0 的特征函数时适用。

1971 年 Beesack 在[10]中改进了定理 3.3，得到如下的定理。

定理 3.4 设 $r(x)$、$s(x)$ 是正的且 $r(x)$ 和 $s'(x)$ 在 (a,b) 上连续，这里有 $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$，又设微分方程

$$\frac{d}{dx}(r(x)y'(x)^{p})=\frac{1}{p+1}s'(x)y(x)^{p}$$

有一解 $y(x)=\int_0^x y'(t)dt\quad(a<x<b)$ 且 $y'(x)>0$，而且当 x 是足够靠近 b 时，有

$$r(x)\left[\frac{y'(x)}{y(x)}\right]^{p}\geqslant\frac{s(x)}{p+1},$$

当 $x\to a^+$ 时，有

$$\left(r(x)\left[\frac{y'(x)}{y(x)}\right]^{p}-\frac{s(x)}{p+1}\right)\left(\int_a^x r(t)^{-\frac{1}{p}}dt\right)^{p}=O(1),$$

其中 $p>0$。若 $f(x)=\int_a^x f'(t)dt$，且 $\int_a^b r|f'|^{p+1}dx<+\infty$，则有

$$\int_a^b s(x)|f(x)|^p|f'(x)|dx\leqslant\int_a^b r(x)|f'(x)|^{p+1}dx. \tag{14}$$

等号当且仅当 $f(x)=Cy(x)$ 适用。除非 $\int_a^b r(x)y'(x)^{p+1}dx<+\infty$ 且

$$\lim_{x\to b^-}y(x)\left(r(x)y'^{p}(x)-\frac{1}{p+1}s(x)y^{p}(x)\right)=0,$$

否则 $C\equiv0$。

除了上面所指出的等号适用的情形外，若

$$\int_a^X ry'^{p+1}dx=\infty \text{ 且 } \varliminf_{x\to a^+}r(x)y(x)y'(x)<+\infty,$$

或

$$\int_X^b ry'^{p+1}dx=\infty \text{ 且 } \varliminf_{x\to b^-}y(x)(ry'^{p}-(p+1)^{-1}sy^{p})<+\infty,$$

并且当 $x\to b^-$ 时 $r(x)y'(x)^p=O(1)$，其中 $a<X<b$，那末此时不等式(14)也是准确的。即对 $\forall\delta>0$ 存在 $f_0(x)=\int_b^x f'(x)dx$ 且 $\int_a^b r|f_0'|^{p+1}dx<+\infty$，使得

$$\int_a^b s(x)\,|f_0(x)|^p|f_0(x)|\,dx>(1-\delta)\int_a^b r(x)\,|f_0'(x)|^{p+1}dx.$$

特别在定理 3.4 中取 $s(x)\equiv 1$，用 $\frac{1}{p+1}\left(\int_a^b r^{-\frac{1}{p}}dx\right)^p r(x)$ 代替定理中的 $r(x)$，此时有 $y(x)=\int_a^x r(t)^{-\frac{1}{p}}dt$. 则对任何 $f(x)=\int_a^x f'(t)\,dt\,(a<x<b)$ 有

$$\int_a^b |f(x)|^p|f'(x)|\,dx\leqslant\frac{1}{p+1}\left(\int_a^b r(x)^{-\frac{1}{p}}dx\right)^p\int_a^b r(x)\,|f'(x)|^{p+1}dx \tag{15}$$

其中 $p>0$，等号当且仅当 $f(x)=Cy(x)$ (C 为常数) 时适用.

注意，只要假设 $\int_a^b r^{-\frac{1}{p}}dx<+\infty$ $(p>0)$，则不等式(15)对 $a=-\infty$ 或 $b=+\infty$ 都是正确的.

不等式(15)是定理 1.3 的推广，它实际上是 Beesack 和 Das 在[29]中得到的.

1969年 Boyd 在[23]、[33]中还将定理 3.3 推广到含有两个参数 p、q 的情况. 为叙述方便起见，令

$$L_r^\beta=\{f\,|\,f\text{ 在 }(a,b)\text{ 上可测，且}\int_a^b r(x)\,|f(x)|^\beta dx<+\infty\}$$

其中 $r(x)>0$，Boyd 在[33]中证得

定理 3.5 假设重函数 $r(x)$、$s(x)\in C^1(a,b)$ 且 $s(x)>0$, $r(x)>0$ $(a<x<b)$，又设 $p>0$、$k\geqslant 1$、$0\leqslant q\leqslant k$ 定义算子 T_1： $f\in L_r^k$ 令

$$T_1f(x)=s^{\frac{1}{p}}(x)\,r^{-\frac{1}{p}}(x)\int_a^x f(t)\,dt$$

假设算子 T_1 是 $L_r^k\to L_r^\alpha$ $\left(\alpha=\frac{pk}{k-q}\right)$ 的紧緻算子，则如下特征值问题 (P) 有解 (y,λ) 且 $y\in C^2(a,b)$, $y'(x)>0$、$y>0$ $(a<x<b)$：

$$(P)\quad\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left\{\lambda kry'^{\,k-1}-qsy^p y'^{\,q+1}\right\}+psy^{p-1}y'^{\,q}=0,\\ \lim\limits_{x\to a^+}y(x)=0\text{ 和 }\lim\limits_{x\to b^-}(\lambda kry'^{\,k-1}qsy^py'^{\,q-1})=0;\\ \displaystyle\int_a^b r(x)\,|y'|^k dx=1.\end{cases}$$

假如存在一个最大的 λ 值使得 (P) 有解，用 λ^* 表示此值，则对任何 $f(x)=\int_a^x f'(t)\,dt$ 且 $f(x)\in L_r^k$ 有

$$\int_a^b s(x)\,|f(x)|^p|f'(x)|^q dx\leqslant\frac{k\lambda^*}{p+q}\left(\int_a^b r(x)\,|f'(x)|^k\,dx\right)^{\frac{p+q}{k}} \tag{16}$$

等号成立当且仅当 $f(x)=Cy(x)$，其中 $y(x)$ 是对应 λ^* 的特征函数.

特别注意到，在定理 3.5 中，若取 $k=p+1$, $q=1$ 便是定理 3.3 中给出的持重 Opial 不等式. 若取 $k=p\geqslant 1$, $q=0$，则(16)是 P.R.Beesack 在[34]中得到的持重 Hardy 不等式，这样 Boyd 用优美的不等式(16)将两类不等式联系起来了.

1975 年 D.T.Shum在[35]中进而对 $p\geqslant 0$、$q\geqslant 0$ 或 $p<0$、$q<0$ 建立一类新的积分不等式，使 Opial 不等式得到新的发展.

Shum在[35]中假设如下边值问题(P_s)有解 $y(x)=\int_a^x y(t)\,dt$ 且 $y'(x)>0$ $(a<x<b)$：

$$(P_s)\quad\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\{ry'^{p/q}\}=s'y^{p/q},\\ \lim\limits_{x\to a^+}y(ry'^{p/q}-sy^{p/q})=0\\ \lim\limits_{x\to b^-}y(ry'^{p/q}-ry^{p/q})=0;\\ \text{当 } x\to a^+\text{ 时 } r(x)\left(\dfrac{y'}{y}\right)^{p/q}\left(\displaystyle\int_a^x r^{-p/q}dt\right)^{p/q}=O(1);\\ \displaystyle\int_a^b r(y')^{\frac{p+q}{q}}dx<+\infty\end{cases}$$

其中重函数 $r(x)>0$ 且 $\int_a^b r^{-q/p}dx<+\infty$, $s(x)>0$ 且 $s(x)\in C^1(a,b)$，而 $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$. 他证得

定理 3.6 设 $p\geqslant 0$，$q\geqslant 1$ 或 $p<0$，$q<0$，又设 $y(x)=\int_a^x y'(t)dt$，$y'>0$，是问题 (P_s) 的解. 又设 $w(x)$ 是 (a,b) 内正值可测函数使得 $\int_a^x \frac{1}{w(x)}dx<+\infty$ $(a<x<b)$. 定义新的重函数

$$R(x)=r(x)[w(x)]^{(p+q)\frac{q-1}{q}}$$

$$S(x)=s(x)[w(x)]^{q-1}\left(\int_a^x\frac{dt}{w(t)}\right)^{p\frac{1-q}{q}}$$

其中 $r(x)s(x)$ 是问题 (P_s) 中的重函数. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上局部绝对连续且 $f(x)=\int_a^x f'(t)dt$ 及 $\int_a^b R|f'|^{p+q}dx<+\infty$，则对 $p\geqslant 0$，$q\geqslant 1$ 有

$$\int_a^b S(x)|f(x)|^p|f'(x)|^q dx\leqslant\frac{q}{p+q}\int_a^b R(x)|f'(x)|^{p+q}dx. \tag{17}$$

若还设 $f'(x)$ 在 (a,b) 内不变号，则对 $p<0$，$q<0$ 不等式(17)仍然成立.

对 $p\neq 0$，不等式(17)中等号成立当且仅当

$$f(x)=k_1y(x)\quad(k_1\text{ 为常数})$$

及 $q\neq 1$ 时

$$w(x)=k_2(y')^{-1}\quad(k_2>0\text{ 的常数}).$$

对 $p=0$，不等式(17)蜕化为关于 f 的恒等式.

文章中 Shum 还讨论严格的不等式(17)的准确性.

特别从定理 3.6 可得如下结果

推论 1 设 $\alpha<1$ 和 $-\infty<a<b<+\infty$，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续且 $f(a)=0$，则对 $p\geqslant 0$，$q\geqslant 1$ 有

$$\int_a^b(x-a)^{(q-1)\frac{\alpha(p+q)-p}{q}}|f(x)|^p|f'(x)|^q dx$$
$$\leqslant\frac{q}{p+q}\frac{(b-a)^{p\frac{1-\alpha}{q}}}{(1-\alpha)^p}\int_a^b(x-a)^{\alpha(p+q-1)}|f'(x)|^{p+q}dx. \tag{18}$$

若还要求 $f'(x)$ 在 (a,b) 内不变号，则当 $p<0$、$q<0$ 时，不等式(18)仍然成立，不等式(18)中等号成立当且仅当 $f(x)=C(x-a)^{(1-\alpha)}$ (C 为常数).

特别取 $a=0$ 和 $\alpha=\frac{p}{p+q}$ 便是 Beesack 和 Das 在[29]中得到的。

推论 2　设 $-\infty<a<b\leqslant+\infty$，若 $f(x)=\int_a^x f'(t)dt\,(a<x<b)$ 且 $\int_a^b (x-a)^{q-1}|f'(x)|^{p+q}dx<+\infty$，则对 $p\geqslant 0$，$q\geqslant 1$ 有

$$\int_a^b (x-a)^{q-p-1}|f(x)|^p|f'(x)|^q dx\leqslant\left(\frac{p}{p+q}\right)^{-p}\int_a^b (x-a)^{q-1}|f'(x)|^{p+q}dx \tag{19}$$

等号成立当且仅当 $f(x)\equiv 0$，常数 $\left(\frac{p}{p+q}\right)^{-p}$ 是最佳的。

特别取 $a=0$、$b=\infty$、$q=1$、$p>1$ 而 $f(x)=\int_0^x f'(t)dt$，$f'(t)\geqslant 0$ 则有 Hardy 不等式

$$\int_0\left(\frac{f(x)}{x}\right)^p dx<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0 f'(x)^p dx$$

其中常数 $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ 是最佳的。

Shum [35] 中还建立另一类积分不等式。

首先假设如下边值问题 (P_n) 有解 $y(x)=\int_a^x y'(t)dt$ 且 $y'(x)>0$ 而当 $k/q<0$ 时还要求 $y(b)<+\infty$：

$$(P_n)\quad\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[r(y')^{\frac{k-q}{q}}\right]+sy^{\frac{k-q}{q}}=0\\ \lim\limits_{x\to a^+} r\left(\dfrac{y'}{y}\right)^{\frac{k-q}{q}}y^{k/q}=0\ \text{当}\ x\to a^+\ \text{时}\\ r\left(\dfrac{y'}{y}\right)^{\frac{k-q}{q}}\left(\displaystyle\int_a^x r^{-\frac{q}{k-q}}dt\right)^{\frac{k-q}{q}}=O(1)\\ \lim\limits_{x\to b^-} r\left(\dfrac{y'}{y}\right)^{\frac{k-q}{q}}=C\quad(0<C<+\infty)\ \text{且}\\ \qquad\lim\limits_{x\to b^-} \left(r\left(\dfrac{y'}{y}\right)^{\frac{k-q}{q}}-C\right)y^{k/q}=0\\ \displaystyle\int_a^b r(y')^{\frac{k}{q}}dx<+\infty\end{cases}$$

其中重函数 $r(x)>0$ 且 $r(x)\in C(a,b)$，而 $s(x)\geqslant 0$ 且 $s(x)\in C(a,b)$。

Shum 证得下面两个定理

定理 3.7　设 $y(x)$ 是上述边值问题 (P_n) 的解，又设 w 是 (a,b) 上正可测函数且 $\int_a^x \frac{dt}{w(t)}bt<+\infty$。令

$$W(x)=(w(x))^{q-1}\left(\int_a^x\frac{dt}{w(t)}\right)^{p\frac{1-q}{q}}$$

$$R(x)=r(x)[w(x)]^{k\frac{q-1}{q}}$$

$$S(x)=s(x)\left(\int_a^x\frac{dt}{w(t)}\right)^{k\frac{1-q}{q}}$$

若 $f(x)$ 在 (a,b) 上局部绝对连续，$f(x)=\int_a^x f'(t)dt$ 且 $\int_a^b R(x)|f'(x)|^k dx<+\infty$，则对 $p>0$，$k>q\geqslant 1$ 有

$$\left(\int_a^b W(x)|f(x)|^p|f'(x)|^q dx\right)^{\frac{k}{p+q}}+\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{k}{p+q}}C^{-1}\int_a^b S(x)|f(x)|^k dx$$

$$\leqslant\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{k}{p+q}} C^{-1}\int_a^b R(x)\,|f'(x)|^k dx \tag{20}$$

其中　$C=\lim\limits_{x\to b^-} r(x)\left(\frac{y'(x)}{y(x)}\right)^{\frac{k-q}{q}}$

若 $f'(x)$ 在 (a,b) 内不变号，则当 $p<0$、$k<q<0$ 时，不等式(20)仍然成立。当 $k<0<q\leqslant 1$ 时还要求 $|f(b)|<+\infty$ 及 $\int_a^b \frac{dx}{w(x)}<+\infty$，那末不等式(20)也是正确的。

当 $q\neq 1$ 时，不等式(20)中等号当且仅当

$$f(x)=k_1 y(x)\qquad (k_1 \text{ 为常数}),$$
$$w(x)=k_2(y'(x))^{-1}\qquad (k_2 \text{ 为常数})$$

时适用。

当 $q=1$ 时，不等式(20)中等号当且仅当 $f(x)=k_1 y(x)$　(k_1 为常数)时适用。

在除去 $f(x)\equiv 0$ 外等号不再成立的情况，对不等式(20)的准确性，文章也作了讨论。

特别 Shum 得到如下结果

推论 3　设 $\alpha<1$、$0\leqslant\beta<1$ 且 $1-\beta\neq k/q$ 和 $-\infty<a<b<+\infty$，若 $f(x)=\int_a^x f'(t)\,dt$ $(x\in(a,b))$ 且 $\int_a^b (x-a)^{\alpha(k-1)+(\alpha-1)\beta}|f'(x)|^k dx<+\infty$，则对 $p>0$，$k>q\geqslant 1$ 有

$$(1-\alpha)^{k\frac{p+}{p+q-1}}\left(\int_a^b (x-a)^{(q-1)\frac{\alpha(p+q)-p}{q}}|f(x)|^p|f'(x)|^q dx\right)^{\frac{k}{p+q}}$$
$$+\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{k}{p+q}}(1-\alpha)^k\beta(b-a)^{(1-\alpha)\frac{k-q}{q+\beta}}\int_a^b (x-a)^{(\alpha-1)(k+\beta)-\alpha}|f(x)|^k dx$$
$$\leqslant\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{k}{p+q}}(b-a)^{(1-\alpha)\frac{k-q}{q+\beta}}\int_a^b (x-c)^{\alpha(k-1)+(\alpha-1)\beta}|f'(x)|^k dx. \tag{21}$$

若要求 $f'(x)$ 在 (a,b) 内不变号，则对 $p<0$，$k<q<0$，不等式(21)仍然正确。

若进而要求 $|f(b)|<+\infty$，则对 $p>0$，$k<0<q\leqslant 1$，不等式(21)也是正确的。

当且仅当 $f(x)=k_1(x-a)^{1-\alpha}$ (k_1 为常数)时等号适用。

定理 3.8　设 $y(x)$ 是边值问题 (P_n) 的解，而 $w(x)$，$W(x)$、$R(x)$、$S(x)$ 以及 $f(x)$ 如定理 3.7 所设，则对 $p<0$、$k>q\geqslant 1$、$p+q>0$ 有

$$\left(\int_a^b w(x)^{q-1}|f'(x)|^q dx\right)^{k/q}+C^{-1}\int_a^b S(x)\,|f(x)|^k dx$$
$$\leqslant C^{-1}\int_a^b R(x)\,|f'(x)|^k dx. \tag{22}$$

若又设 $f'(x)$ 在 (a,b) 内不变号，则对 $p>0$、$k<q<0$、$p+q<0$，不等式(22)仍然成立。此外，若还设 $|f(b)|<+\infty$ 且 $\int_a^b \frac{dx}{w(x)}<+\infty$，则对 $p<0$，$k<0<q\leqslant 1$、$p+q>0$，不等式(22)也是正确的。

又若 $f'(x)$ 在 (a,b) 内不变号，则当 $p<0$，$k>q, 0<q\leqslant 1$，$p+q>0$ 则有

$$\left(\int_a^b W(x)|f(x)|^p|f'(x)|^q dx\right)^{\frac{k}{p+q}}+\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{k}{p+q}} C^{-1}\int_a^b s(x)\left(\int_a^x w(t)^{q-1}|f'(t)|^q dx\right)^{\frac{k}{q}}dx$$
$$\leqslant\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{k}{p+q}} C^{-1}\int_a^b R(x)\,|f'(x)|^k dx \tag{23}$$

若 $q\neq 1$，不等式(22)或(23)中等号当且仅当 $f(x)=k_1y(x)$ (k_1 为常数）且 $w(x)=k_2(y')^{-1}$ (k_2 为正常数)时适用。若 $q=1$，不等式(22)或(23)中等号当且仅当 $f(x)=k_1y(x)$ (k_1 为常数)时适用。

最后我们指出，在推广 Opial 不等式的过程中，由于持重 Opial 不等式的建立，引导出一些新型的积分不等式是自然的，有趣的是它们将 Hardy 不等式的推广和 Opial 不等的推广联系在一起了。

§4 离散型的 Opial 不等式

离散型的 Opial 不等式是 J.S.W.Wong、Cheng-Ming Lee 以及 P.R.Beesack 得到的。1967 年 J. S. W. Wong 在[36]中建立了离散型 Opial-华罗庚不等式，得到

定理 4.1 设$\{u_i\}$是不减、非负实数列，则对 $p\geqslant 1$ 有

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i-u_{i-1})u_i^p\leqslant\frac{(n+1)^p}{p+1}\sum_{i=1}^{n}(u_i-u_{i-1})^{p+1}$$

其中 $u_0=0$。

1968 年 Lee Cheng-Ming 在[37]中进一步给出 Opial-华罗庚不等式(5)的离散形式，从而推广了定理 4.1，得到

定理 4.2 设$\{u_i\}$是不减、非负实数列，若 p、$q>0$，$p+q\geqslant 1$ 或 p、$q<0$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i-u_{i-1})^q u_i^p\leqslant K_n\sum_{i=1}^{n}(u_i-u_{i-1})^{p+q}\tag{24}$$

其中取 $u_0=0$，$K_0=1$，而

$$K_n=\max\left(K_{n-1}+\frac{pn^{p-1}}{p+q},\ \frac{q(n+1)^p}{p+q}\right)\qquad(n=1,2,\cdots)$$

定理 4.3 设 $\{u_i\}$ 是不减、非负实数列，若 $p>0$、$q<0$ 且 $p+q\leqslant 1$，$p+q\neq 0$，或者 $p<0$、$q>0$，$p+q\geqslant 1$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i-u_{i-1})^q u_i^p\geqslant C_n\sum_{i=1}^{n}(u_i-u_{i-1})^{p+q}\tag{25}$$

其中取 $u_0=0$、$C_0=1$ 而

$$C_n=\min\left(C_{n-1}+\frac{pn^{p-1}}{p+q};\ \frac{q(n+1)^p}{p+q}\right);\ (n=1,2,\cdots)$$

此外，关于常数 K_n 和 C_n，Lee Cheng-Mimg 在论文中还证得

定理 4.4 若 p、$q\geqslant 1$，则不等式(24)中的常数

$$K_n=\frac{q\ n+1)^p}{p+q}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

若 $p\leqslant 0$，$q<0$，则有

$$K_1=1,\ 而\ K_n=1=\frac{p}{p+q}\sum_{i=2}^{n}i^{p-1},\ (n=2,3,\cdots).$$

若 $p\geqslant 0$、$p+q<0$，则不等式(25)中常数

$$C_1=1\ 而\ C_n=1+\frac{p}{p+q}\sum_{i=2}^{n}i^{p-1},\ (n=2,3,\cdots).$$

1972 年 G.I.Rozanova 在[28]中给出 Opial-Beesack-Das 不等式(定理 3.1)的离散形

式，得到

定理4.5 设$\{u_k\}$是不减，非负实数列且取$u_0=0$，若$\{s_k\}$、$\{r_k\}$是正数列，而$p>0$、$q>0$且$p+q>1$，则有

$$\sum_{k=1}^{n} s_k u_k^p (u_k-u_{k-1})^q < K_n \sum_{k=1}^{n} r_k (u_k-u_{k-1})^{p+q}$$

其中

$$K_n=\left(\sum_{k=1}^{n} s_k^{\frac{p+q}{p}} r_k^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{j=1}^{k} r_j^{\overline{\frac{q}{p+q-1}}}\right)^{p+q-1}\right)^{\frac{p}{p+q}}.$$

说明。1970年出版的D.S.Mitrinović 的著作《Analytic Inequalities》曾对关于 Opial 不等式的工作做过初步总结，在本文写作过程中我们参考了该书的有关内容。

参考文献

[1] Opial, Z., *Ann. Polon. Math.* 8(1960), 29-32.
[2] Olech, C., *Ann. Polon. Math.* 8(1960), 61-63.
[3] Beesack, P.R., *Trans. Amer. Math. Soc.* 104(1962), 470-475.
[4] Levinson, N., *Proc. Amer. Math. Soc.* 15(1964), 565-566.
[5] Mallows, C. L., *Proc. Amer. Math. Soc.* 16(1965), 173.
[6] Pedfrsen, R.N., *Proc. Amer. Math. Soc.* 16(1965), 174.
[7] Yang, G, S., *Proc. Japan. Acad.* 42(1966), 78-83.
[8] 华罗庚，中国科学 14(1965), 789-790.
[9] Wong, J. S., *Canad. Math. Bull.* 10(1967), 175-178.
[10] Beesack, P. R., *Amer. Math. Month. Soc.* 22(1971), 705-741.
[11] Das, K.M., *Proc. Amer. Math. Soc.* 22(1969), 258-261.
[12] Shum, D. T., *Canad. Math. Bull.* 17(1974), 385-389.
[13] 侯明书，科学通报 6(1979), 247.
[14] 王斯雷，科学通报 8(1980), 383.
[15] 梁肇基，华中师范学院学报 2(1980), 33-37.
[16] 陈朝春，华南工学院学报 8(1980), 117-119.
[17] 何天晓，王寿城，数学研究与评论创刊号 (1968), 61-62.
[18] Willett, D., *Amer. Math. Month.* 75(1968), 174-178.
[19] Holt, J. M., *SIAM* J. *Math. Anal.* 13(1965), 767-794.
[20] Boyd, D. N., *J. Math. Anal. Appl.* 25(1969), 378-387.
[21] Calvert, J., *Proc. Amer Math. Soc.* 18(1967), 72-75.
[22] Godunove, E. K. and V. L. Yevin, *Math. Zametki* 2(1967), 221-224.
[23] Maroni, P. M., *Acad. Sci Paris A.* 264(1967), 62-64.
[24] Rozanova, G. I., Moskov. *Gos. Ped. Inst. Ucen.*, Zap. 460(1972), 58-65.
[25] Necoev, I. D. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 211(1973), 1063-1066.
[26] Redheffer, R., *J. Math. Anal. Appl.* 16(1966), 219-242.
[27] Rozanova, G. I. *Math. Physics* 3(1976), 104-108.
[28] Rozanova, G. I. *Math. Physics* 3(1976), 79-103.
[29] Beesack, P. R. and K. M. Das, *Pacific. J. Math.* 26(1968), 232-265
[30] Rozanova, G. I., Moskov. *Gos. Ped. Inst. Ucen.* Zap 460(1972), 66-72.
[31] Boyd, D. W. and J. S. W. Wong, *J. Math. Anal. Appl.* 19(1976), 100-102.
[32] Boyd, D. W., *Canad. J. Math.* 23(1971), 355-363.
[33] Boyd, D. W., *Pacific. J. Math.* 30(1969), 367-383.
[34] Beesack, P. R., *Pacific. J. Math.* 11(1961), 39-61.
[35] Shum, D. T., *Trans. Amer. Math. Soc.* 204(1975), 299-341.
[36] Wong, J. S. W., *Canad. Math. Bull.* 10(1967), 115-118.
[37] Lee, Cheng-Ming, *Canad Math. Bull.* 11(1968), 73-77.