1982年 第2卷 第4期
Vol.2, No.4, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

李善兰对 Stirling 数和 Euler 数的研究*

罗见今

（内蒙师院）

我国清代有影响的数学家李善兰（1811—1882）在他的名著《垛积比类》（1867）中提出并研究了两类系数表（依原著顺序为第二表和第七表），获得了重要成果．它们实际就是现代组合数学中的两种重要计数函数．

一、第一种李氏数

《垛积比类》第二表“三角垛有积求高开方廉隅表”和第七表“乘方垛各廉表”是专门的系数表，在全书的十五个表中地位较特殊．文献[1]称第七表为“李氏数”，本文沿用这一命名；鉴于表二在组合数学中的重要性，这里称为“第一种李氏数”．而称表七为“第二种李氏数”，以示区别．

表二与“造表法”给出了第一种李氏数的递归定义（表二译成现代写法如图1）．记表中第一种李氏数为 l_k^p，上标 $p=0,1,2,\cdots\cdots$ 为乘垛的乘数，即横行序数；下标 $k=0,1,\cdots,p$ 为项数[1)]，则该定义可写成：

$p=0$	1						
$p=1$	1	1					
$p=2$	2	3	1				
$p=3$	6	11	6	1			
	24	50	35	10	1		
	120	274	225	85	15	1	
	720	1764	1624	735	175	21	1

图一、第一种李氏数 l_k^p

*1981年7月16日收到。本文为纪念李善兰逝世一百周年而作．

1）若规定 $k=1,2,\cdots\cdots,p+1$，则 l_k^p 的定义式要相应改变．

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i)}\ l_0^0=1;\ l_k^p\equiv 0,\ \text{若}\ k<0\ \text{或}\ k>p;\\ \text{(ii)}\ l_k^p=l_{k-1}^{p-1}+pl_k^{p-1}.\end{array}\right\}\tag{1}$$

可知 $l_0^p=pl_0^{p-1}=p(p-1)l_0^{p-2}=\cdots=p(p-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1\cdot l_0^0=p!$

以及 $l_p^p=l_{p-1}^{p-1}=l_{p-2}^{p-2}=\cdots=l_0^0=1,$

李氏正是用这两条作为表二的边界条件的，可以代替（i）. 表二中，李氏称下列之和为“倍积数”：

$$\sum_{k=0}^{p}l_k^p=(p+1)!\tag{2}$$

这显然是数 l_k^p 的一个基本性质.《垛积比类》十三个垛积表都是按斜行排列、读数的，唯有系数表按横行. 表二左右不对称，读数与顺序有关. 据古汉语习惯，横行读数应从右向左，因此要改写成阿拉伯数字表，正确的译法应如图 1 所示.

第一种李氏数 l_k^p 同组合数学中的计数函数——第一种斯特灵数（Stirling numbers of the first kind）有密切的关系. 根据一本出版不久的组合学专著 [2]，第一种斯特灵数记作 $S_{n,k}$，它的递归定义为：对所有 $n,k\geqslant0$，

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i)}\ S_{0,0}=1,\ S_{n,0}=0,\ \text{对}\ n>0,\\ \text{(ii)}\ S_{n+1,k}=S_{n,k-1}-nS_{n,k}\end{array}\right\}\tag{3}$$

它的数表如图 2 [2][3].

第一种斯特灵数的母函数是降阶乘积（falling factorials，或译为“降阶乘”）[2][4]，这个定理用公式表示出来，即

$n=0$	1							
$n=1$	1							
$n=2$	-1	1						
$n=3$	2	-3	1					
	-6	11	-6	1				
	24	-50	35	-10	1			
	-120	274	-225	85	-15	1		
	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	

图二、第一种斯特灵数 $S_{n,k}$

$$\sum_{k=0}^{n}S_{n,k}x^k=\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)=\binom{x}{n}n!=$$

$$=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)=[x]_n\tag{4}$$

这里，符号 $[x]_n$ 表降阶乘积；而升阶乘积（rising factorials）记作 $[x]^n$，它的定义是：

$$[x]^n = x(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n-1) = \prod_{k=0}^{n-1}(x+k) = \binom{x+n-1}{n}n! \tag{5}$$

图 1 和图 2 的相似不是偶然的．李善兰在卷一的“三角垛有积求高术”及图 1 中确切给出一个有关母函数的定理，应用今天的术语，它可以表述成：

定理　第一种李氏数的母函数是升阶乘积．

即

$$\sum_{k=0}^{p} l_k^p x^{k+1} = \prod_{k=0}^{p}(x+k) = [x]^{p+1}* \tag{6}$$

式（6）是怎样得出的呢？《垛积比类》卷一给出 $m-1$ 乘支垛有积求高术方程，已知 $m-1$ 乘支垛第 $h=p-m+1$ 垛前 x 层之和为 S，求 x：

$$S - \binom{x+p-1}{p}\frac{m(x-1)+p+1}{p+1} = 0 \tag{7}$$

其中当 $m=1$ 时为三角垛有积（和）求层术：

$$S - \binom{x+p}{p+1} = 0,$$

即

$$(p+1)!S - x(x+1)\cdots(x+p-1)(x+p) = 0.$$

原著将方程中的升阶乘积展开为幂级数，并抽出它的系数 l_k^p 单独列成图 1，于是方程变成：

$$(p+1)!S - \sum_{k=0}^{p} l_k^p x^{k+1} = 0.$$

据原著 $S=\binom{x+p}{p+1}$，代入后则得上述定理．以下，将以原著“四乘垛（$p=4$）有积求高术”为例进行分析．

* 在定义 l_k^p 时若规定 $k=1,2,\cdots\cdots,p-1$，则

$$\sum_{k=1}^{p} l_k^{p-1} x^k = \prod_{k=0}^{p-1}(x+k) = \binom{x+p-1}{p}p! = [x]^p.$$

应当说明它同(6)仅形式有别，无本质不同．

原　　文	译　　文
草曰：立天元一元高，	解：设 x 为层数，
以天元加一乘之，得 0|元|，	$x(x+1)=x+x^2$，
又以天元加二乘之，得 0太‖Ⅲ|，	$x(x+1)(x+2)=$ $=2x+3x^2+x^3$，
又以天元加三乘之，得 0太⊥⊢T|，	$x(x+1)(x+2)(x+3)$ $=6x+11x^2+6x^3+x^4$，
又以天元加四集之，得 0太‖≡≣0Ⅲ≣|0|，	$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ $=24x+50x^2+35x^3+10x^4+x^5$
合以一百二十（二三四五连乘数）除之；	$\frac{1}{5!}\prod\limits_{k=0}^{4}(x+k)$展开（按即$\binom{x+4}{5}$展开）；
不除，便以为一百二十段积	把$\prod\limits_{k}^{4}(x+k)$的展式看作和 S 的
（寄左）	120 倍（写在方程的一边）。
乃以积一百二十之，为同数，	$120S=24x+50x^2+35x^3+10x^4+x^5$，
与左相消，得 |=0积‖≢≣0Ⅲ≢|Ø⊦，	$120S-24x-50x^2-35x^3$ $-10x^4-x^5=0$，
为开方式。五乘垛以上以天元仿此推之。	即所求方程。仿此可将 $p\geqslant 5$ 的所有方程推出来。

以上展开过程就给出图 1 的系数表($0\leqslant p\leqslant 4$)，并说明将原著表二译成图 1 是正确的。同时，它给出式（6）当 $p=4$ 的一例；据表二给出了 $0\leqslant p\leqslant 9$ 的 10 例；又据“造表法”可确知 p 值有限大的任意的 l_k^p，因而式（6）已被李氏完全确定。

应用母函数方法由定义（1）可证明（6）：

$$\sum_{k=0}^{p} l_k^p x^{k+1}=\sum_{k=0}^{p}(l_{k-1}^{p-1}+pl^{p-1}_k)x^{k+1}=x\sum_{k=1}^{p} l_{k-1}^{p-1}x^k+p\sum_{k=0}^{p-1} l^{p-1}_k x^{k+1}$$

$$=x\sum_{j=0}^{p-1} l^{p-1}_k x^{k+1}+p\sum_{k=0}^{p-1} l^{p-1}_k x^{k+1}=(x+p)\sum_{k=0}^{p-1} l^{p-1}_k x^{k+1}$$

$$=(x+p)(x+p-1)\sum_{k=0}^{p-2} l^{p-2}_k x^{k+1}=\cdots$$

$$=(x+p)(x+p-1)\cdots(x+2)(x+1)\sum_{k=0}^{p-p} l^{p-p}_k x^{k+1}$$

$$=\prod_{k=0}^{p}(x+k)=[x]^{p+1}.$$

降阶乘积和升阶乘积既联系又区别，取 $x'=x+n-1$ 则 $[x']_n=[n]^n$. $[x]_n$ 和 $[x]^n$ 当 $x=r$ 和 n 时分别为选排列和全排列. $[x]_n=\binom{x}{n}n!$，$[x]^n=\binom{x+n-1}{n}n!$ 即它们与组合的两种基本表达式[4]直接相关，所以这两种函数是组合数学的基础——计数(Enumeration)理论研究的对象. 专著[2]在所列举的27种计数函数中将降阶乘积和升阶乘积列为第一位和第二位不是偶然的，它们在组合计数方面具有基本的重要性. 将二者展开为幂级数，其系数构成第一种斯特灵数和第一种李氏数，后者是前者的绝对值. 因此，$S_{n,k}$ 和 l_k^n 在本质上是两种计数函数，在命名和表达上均有加以区别的必要，否则易于混淆[3]. 本文建议以"李善兰数"来代替 Stirling numbers of the first kind in modulus 这样复杂的命名.

李善兰数 l_k^n 是一种重要的计数函数，例如它可以用于广义莫比乌斯反演——在现代组合数学中有很多应用的一类级数变换方法[5]. 因篇幅所限，兹不详述.

1821年拉普拉斯（P. S. Laplace, 1749—1827）开始把母函数系统地引入概率论，作为处理整值随机变量的一种有用的变换法. 在此之前，欧拉（L. Euler, 1707—1783）也曾使用过母函数方法. 但在李善兰著此书的年代，母函数概念还没有传入中国，而我国最早的概率论译作《决疑数学》（英傅兰雅、华蘅芳合译）是1896年的事了. 因此，李善兰独立从事的有关母函数的研究虽是初步的，却是基本的，在中算史上具有首创性，是一项值得重视的成就.

二、第二种李氏数

《垛积比类》第七表不是用作幂级数的系数，而是三角垛级数的系数，称为第二种李氏数，记作 L_k^m，这里上标 $m=0,1,2,\cdots$，表示 m 乘方垛的乘方次数，即横行序数；下标 $k=0,1,2,\cdots,m$ 为项数[1)]，于是该表及"造表法"给出定义：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & L_0^0=1;\ L_k^m\equiv 0,\ \text{若 } k<0 \text{ 或 } k>m; \\ \text{(ii)} & L_k^m=(m-k+1)L_{k-1}^{m-1}+(k+1)L_k^{m-1}.\end{array}\right\} \tag{8}$$

可知
$$L_0^m=L_0^{m-1}=L_0^{m-2}=\cdots=L_0^0=1,$$
以及
$$L_m^m=L_{m-1}^{m-1}=L_{m-2}^{m-2}=\cdots=L_0^0=1$$
为表七边界，可代(i)作初始条件. 由于表七明显的对称性，于是有

$$L_k^m=L_{m-k}^m \tag{9}$$

与表二的"倍积数"类似，表七中也存在关系

$$\sum_{k=0}^{m}L_k^m=m(+1)!\ . \tag{10}$$

1) 若规定 $m=1,2,\cdots$ 及 $k=1,2,\cdots,m$，则递推式(ii)就变成 $L_k^m=(m-k+1)L_{k-1}^{m-1}+kL_k^{m-1}$（见《中国数学史》328页第2行）. 但按原著第七表的规定，在"一乘"($m=1$)之前有"元"，即应有零乘($m=0$).

第二种李氏数L_k^m就是组合数学中的欧拉数，它不是数论中的欧拉函数 $\varphi(n)$，也不是把正割$\sec x$展开为无穷级数时所用到的欧拉数：1,5,61,1385,…；这种欧拉数记作 $A_{n,k}$，定义为[2]：对所有 $n,k\geqslant1$，

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & A_{n,1}=1;\ A_{n,k}=0,\ \text{对}n<k;\\ \text{(ii)} & A_{n+1,k}=(n-k+2)A_{n,k-1}+kA_{n,k}(k\geqslant2)\end{array}\right\}\qquad(11)$$

与(8)比较，除了在字母写法、次序的安排上有区别外，L_k^m和 $A_{n,k}$是完全相同的；而这些外在的差别，在不同的组合学著作中亦不可避免[6]。现据(11)将欧拉数表列出(见图3，转录自[2])。对照表七"乘方垛各廉表"，易知二者完全相同。

$A_{n,k}$	$k=1$	2	3	4	5	6
$n=1$	1					
2	1	1				
3	1	4	1			
4	1	11	11	1		
5	1	26	66	26	1	
6	1	57	302	302	57	1

图 3．欧拉数 $A_{n,k}$

在《垛积比类》卷四中李善兰又把第二种李氏数推广，事实上得到了"李氏多项式三角形"[1]，若记为 $L_k^m(p)$，则

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & L_0^0(p)=1;\ L_k^m(p)=0,\ \text{当}\ k<0\ \text{及}\ k<m\ \text{时};\\ \text{(ii)} & L_k^m(p)=(m+p-k)L_{k-1}^{m-1}(p)+(k+1)L_k^{m-1}(p).\end{array}\right\}\qquad(12)$$

$L_k^m(p)$当 $0\leqslant m\leqslant5$ 的多项式三角形如图 4 所示。

图 4．李氏多项式三角形$L_k^m(p)$

$m=0$　　1

$m=1$　　1　　p

$m=2$　　1　　$1+3p$　　p^2

$m=3$　　1　　$4+7p$　　$1+4p+6p^2$　　p^3

1　　$11+15p$　　$11+30p+25p^2$　　$1+5p+10p^2+10p^3$　　p^4

1　　$26+31p$　　$66+146p+90p^2$　　$20+91p+120p^2+65p^3$　　$1+6p+15p^2+20p^3+15p^4$　　p^5

李氏在把乘方垛 n^m 展开为一系列三角垛之和(组合级数)时用了系数 L_k^m，在把三角m变垛 $n^m\binom{n+p-1}{p}$ $(m=1,2,3)$展开为一系列三角垛之和时用了系数 $L_k^m(p)$，并确切给出图 4 中 $m=1,2,3$ 的三例，认为其余的"学者自能隅反"。

由 (12) 易知 $L_0^m(p)\equiv1$，$L_m^m(p)\equiv p^m$，可代 (i) 作边界。另外，当 $p=0$ 时，$L_k^m(0)=L_k^{m-1}(m\geqslant1)$；当$p=1$时，$L_k^m(1)=L_k^m$。显然 $L_k^m(p)$是推广了的欧拉数。

在数 l_k^p 和 $L_k^m(p)$ 之间，有关系

$$\sum_{k=0}^{m} L_k^m(p)=\sum_{k=0}^{m} l_k^m\cdot p^k=\prod_{k=1}^{m}(p+k) \tag{13}$$

特别当 $p=1$ 时就得到前边已见到过的(2)和(10)：

$$\sum_{k=0}^{m} L_k^m=\sum_{k=0}^{m} l_k^m=(m+1)!$$

两种李氏数之间是不存在广义莫比乌斯反演的关系的，但式(13)的这一特例却把两者联系起来了。

我们看到，李善兰虽晚于欧拉却独立从事了欧拉数的研究，他的成果深刻而丰富，又经后人整理、阐发，可用 $A_{r;k}$ 的记号综述如下：

1. $A_{n+1;k}=(n-k+2)A_{n;k-1}+kA_{n,k}$.　　(据(8)之(ii)式)
2. $A_{n,k}=A_{n;n-k+1}$.　　(据(9)式)
3. $A_{n,k}=\sum\limits_{r=0}^{k-1}(-1)^r(k-r)^n\binom{n+1}{r}$.
4. $A_{n,k}=\sum\limits_{r=0}^{n-k}(r+1)k^{n-k-r}A_{r+k-1;k-1}$.
5. $\sum\limits_{k=1}^{n}A_{n;k}=n!$.　　(据(10)式)
6. $\sum\limits_{k=2}^{n}(k-1)A_{n;k}=(n-1)!\binom{n}{2}$.
7. $m^n=\sum\limits_{k=1}^{n}A_{n;k}\binom{m+k-1}{n}$.　　(据乘方垛解义)
8. $\sum\limits_{r=1}^{m}r^n=\sum\limits_{k=1}^{n}A_{n;k}\binom{m+k}{n+1}$.　　(据乘方垛求积术)
9. $\sum\limits_{r=1}^{m}{}^{p-n}r^n=\sum\limits_{k=1}^{n}A_{n,k}\binom{m+p-k}{p}$.　　(据乘方支垛造表法)

以上3、6两式由[1]给出，4式由[7]给出而经本文改进。9式中引进的 Σ^{p-n} 叫垛积招差算符或和分差分算符，可单独定义，表示中算传统的垛积招差术或有限差分运算及其逆运算。记 Δ^p 为 p 阶差分算符，则有 $\Sigma^{-p}=\Delta^p$，$\Sigma^p\Sigma^{-p}=\Sigma^0=1$，以及 $\Sigma^p\Sigma^{-n}=\Sigma^{p-n}$。9式中取 $p=n$，$n+1$ 并稍加变化即得7、8两式。

如果记 $A_{n;k}(p)$ 为推广的欧拉数，那么李善兰在《垛积比类》卷四中推广第二种李氏数的工作就相当于定义：

$$10.\quad\begin{cases}\text{(i)}\quad A_{1;1}(p)=1;\ A_{n;k}(p)=0,\ \text{当}k<1\text{及}k>n\text{时};\\ \text{(ii)}\quad A_{n;k}(p)=(n+p-k)A_{n-1;k-1}(p)+kA_{n-1,k}(p).\end{cases}$$

显然有：当$p=0$时，$A_{n,k}(0)=A_{n-1,k}$.（$n\geqslant 1$）

当$p=1$时，$A_{n,k}(1)=A_{n,k}$.

于是三角 n 变垛的组合恒等式与求和式用广义欧拉数$A_{n;k}(p)$表出则有以下两式：

$$11.\quad m^n\binom{m+p-1}{p}=\sum_{k=1}^{n+1}A_{n+1,k}(p)\binom{m+n+p-k}{n+p}.$$

式11中取$p=0$即得7式.

$$12.\quad \sum_{r=1}^{m}r^{n-1}\binom{r+p-1}{p}=\sum_{k=1}^{n}A_{n,k}(p)\binom{m+n+p-k}{n+p}.$$

式12中取$p=1$即得8式．此外，广义欧拉数与第一种斯特灵数之间有关系：

$$13.\quad \sum_{k=1}^{n}A_{n,k}(p)=\sum_{k=1}^{n}\left|S_{n,k}\right|p^{k-1}=\prod_{k=1}^{n-1}(p+k).$$

式13中取$p=1$：$\sum_{k=1}^{n}A_{n,k}=\sum_{k=1}^{n}\left|S_{n;k}\right|=n!$ 即得 5 式.

综上，在十三个公式中，我们在文献[2]里见到过1,2,7三式；据目前所掌握的资料，其余各式为外论所未见．特别是欧拉数的推广，迄未所闻．3,4,6,13四式是后人据原著进行的阐发，其他都是李善兰研究的成果．本文认为李氏的这些工作即令与现代的同类工作相比，也甚称独步．所以一百年来受到高度评价．如他同时代的数学家徐有壬说他的研究"几无余蕴"[8]，稍后的崔朝庆称他"朱氏（世杰）以后当首屈一指"[9]，本世纪初周达说："李秋纫氏（按李善兰号秋纫）著《垛积比类》，枝分条贯，推阐无遗，读者叹观止矣。"[10] 而三十年代我国著名数学家章用盛赞李氏无疑为"数论天才"，当不是溢美之词.

三、自然数前 n 项幂的和

《垛积比类》卷二定义第二种李氏数的目的，是用它来求自然数前n项幂的和（以下称为"幂和"—Sum of powers）．这是一个古老的题目，数学史上有许多记载．从阿基米德（Archimedes，前282—212）开始，印度的婆罗门笈多（Branmagupta，约628），马哈维拉（Mahāvira，约850），巴斯卡拉(Bhāskara，约1150)以及阿拉伯的阿尔·卡希（Al-Karhi，？—1436）等都分别得到过二或三次幂的求和公式[11]．十七世纪欧洲数学重视求幂和的问题．雅各·伯努利(Jacques Bemoulli，1654—1705)在《猜度术》中得到任意次幂的求和公式，据他的原著[12]，此式表为：

$$\sum n^c=\frac{1}{C+1}n^{c+1}+\frac{1}{2}n^c+\frac{c}{2}An^{c-1}-\frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot3\cdot4}Bn^{c-3}$$
$$+\frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}Cn^{c-5}-\frac{c(c-1)(c-2)\cdots(c-5)(c-6)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}$$
$$\cdot Dn^{c-7}+\cdots \tag{14}$$

式中，$A=\frac{1}{6}$，$B=\frac{1}{30}$，$C=\frac{1}{42}$，$D=\frac{1}{30}$，…是著名的伯努利数，在把多种函数展开为无穷幂级数时有用。

我国宋元数学家杨辉、朱世杰也得到了低次幂和公式，例如朱的四角垛公式(1303)：

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\binom{n+1}{2}\frac{2n+1}{3}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \tag{15}$$

杨也有这一结果,进一步还可追溯到十一世纪沈括的工作。到了清代,陈世仁(1676—1722)的“平尖、方尖、再乘尖”使一、二、三次幂和公式系统化了，但没有向更高次发展，而李善兰则用组合级数和欧拉数，一举解决了这个问题，他给出的 8 式简洁而完美，与(14)一样可求任意次幂和：

$$\sum_{r=1}^{m}r^n=\sum_{k=1}^{n}A_{n:k}\binom{m+k}{n+1}$$

与(14)相比，思路判然不同，它的主要特点，是把 n 次幂和分解成 n 类组合之和，每类组合的个数依欧拉数分布。

由于组合数学的发展，这样一个具有魅惑力的问题仍然在吸引着一些数学家的兴趣，从1968年到1980年，J. Riordan[13],J. L. Paul[14],S. L. Gupta[15],M. J. A. Sharkey[16],H. W. Gould[17]，B. Turner[18] 等人在他们的文章中，提出或用不同方法证明了幂和问题或与它相关的、用组合表达的若干公式，其中有：

$$1+\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r}{k}S_k(n)=(n+1)^r, \tag{16}$$

$$S_r(n)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}S_k(n)=n^r, \tag{17}$$

$$S_k(n)=n^{k+1}-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}S_{j+1}(n-1),\quad (n\geqslant 2), \tag{18}$$

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\left[(n+1)^{k+1}-(n+1)^k-\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k}{j}S_{j+1}(n)\right] \tag{19}$$

式中，$S_k(n)=\sum_{j=1}^{n}j^k=1^k+2^k+\cdots+n^k$.

现代组合学家们的工作各具特色，[13]的证明用母函数方法，其他证明则用组合性质或二项式定理，尤以[16]、[18]的证明为简。以上四式(16)和(17)接近，(18)和(19)等价，分别相当于李善兰的 7 、8 两式。这些工作虽属于不同的时期，出发点与表达方式也不尽一致，但都用了组合来表幂和，有其共同点。在此意义上，可以认为李氏的工作同现代的工作大体上是平行的。如果就公式的简洁完美而言，7、8两式也是同类结果中的佼佼者。因此，李善兰的幂和公式应予高度评价。他的这些数学成就具有一定的现代意义。

参考文献

[1] 章用：《垛积比类》疏证，科学，第23卷第11期(1939)，647—663.

[2] Martin Aigner, Combinatorial Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1979), 93, 473, 96, 123.

[3] David, F. N. & Barton, D. E. Combinatorial Chance, London, (1962) 47, 180, 294.

[4] Brylawski, T. Combinatorics, McGraw-Hill Encyclopedia of Science & Technology (1977), 中译文见《科学技术百科全书》第1卷数学(1980)，356.

[5] 徐利治，Möbius-Rota反演理论的扩充及其应用引言，数学研究与评论，创刊号(1981).

[6] 比较[2]124与[3]151.

[7] 李俨，中算家的级数论，中算史论丛(一)，412页前6行公式.

[8] 徐有壬，造各表简法(垛积招差)序，务民义斋算学.

[9] 崔朝庆，垛积一得序，古今算学丛书.

[10] 周达，垛积新义自序，福慧双修算稿一.

[11] Володарский, А. И. Примечания к трактату Шридхары «Патиганита», Физико-Математические Науки в Странах Востока (сборник статей), Москва (1966) 233-234.

[12] A Source Book in Mathematics, By D. E. Smith, Vol. I, New York (1959), 90.

[13] Riordan, J. Combinatorial Identities, New York (1968), 160.

[14] Paul, J. L. On the sum of the kth powers of the first n integers. *Amer. Math. Monthly*, 78(1971) 271-272.

[15] Gupta, S. L. An identity involving the sum of the kth powers of the first n natural numbers, *Math. Gaz.*, 56 (1972), 128-129.

[16] Sharkey, M. J. A. An identity involving the sums of powers, *Math.* Gaz., 57(1973) 131-133.

[17] Gould, H. W. Sums of powers integers, Number Theory Class Notes, Part I, West Virginia University, (1974-1975), 3-4.

[18] Turner, B. Sums of powers of integers via the binomial theorem, *Math. Magazine*, Vol. 53, №2, Mach (1980).

The Study of the Stirling Numbers & the Eulerian Numbers by Li Jenshoo

By Luo Jianjin (罗见今)

Abstract

This paper intends to show that in his book *Duo Ji Bi Lei* (*Various Sums of the Pile*) (1867) Li Jenshoo(1811—1882), the famous chinese mathematician made study of two countig functions—the Stirling numbers of the first kind (in modulus) & the Eulerian numbers $A_{n,k}$—and got several important results, such as an identity involving sums of powers:

$$\sum_{r=1}^{m} r^n = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}\binom{m+k}{n+1}.$$