1982年 第2卷 第4期
Vol.2, No.4, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

假如没有素数概念该怎么办？

——中国数学史的一个侧面

莫绍揆

（南京大学数学系）

在今天，我们在学数学的初始阶段便学到了素数的概念，利用这个概念很多问题可以很快地得到解决．例如，

第一，有了素数概念后，最大公约数、最小公倍数等概念极易于理解，而计算它们也非常容易．

第二，利用素数概念，我们可以很快地求得不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的一切正整数解，所谓整勾股弦数，（本文不讨论负数，故“正”字有时也省略了）．

如果没有素数概念或者不准使用素数概念，这些问题便较难解决了．

我国古代数学是没有素数概念的（这个概念是近代从西洋输入的），但我国古代数学家对上面这些问题却解决得非常好．他们是怎样解决的呢？现在我们来略作介绍．

第一，在约分过程中，是必须使用最大公约数的．《九章算术》卷一方田章里说：

“约分术曰：可半者半之．不可半者副置分母子之数，以少减多，更相减损，求其等也．以等数约之”。

即是说，如果分母分子皆可半（即都有2的因子），那便“半之”（以2除分母分子），否则便将分母分子并列，互相减去，以得出相等之数为止，这个“等数”便是今天所说的最大公约数，以这个等数约之便得．例如，要将 $\frac{49}{91}$ 约分，可如下进行：

49	49	7	7	7	7	7	7
91	42	42	35	28	21	14	7

于是用7约分母分子得 $\frac{49}{91}=\frac{7}{13}$，这便是约分的结果．

容易看见，“更相减损”的过程实即辗转相除法的过程，并没有用到素数的概念．可

* 1981年10月9日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

见我国早已使用辗转相除法，把后者叫做欧几里得算法，是不够妥当的。

值得指出，即使分母分子可半，仍可用同法求出等数。但如果先行“半之”，直到“不可半”时才求等数，可使求等数的过程更为简单容易，所以《九章算术》才分开处理了。

第二，对两个分数进行加、减时，现在我们都使用通分法，用两分数的分母的最小公倍数作为公共分母。但是《九章算术》中对两分数加、减时，却规定以两分母之积作为公共分母，求得和、差后再行约分。这样可以避免求最小公倍数。这种做法也有其道理不能说它不好。

但是，对多个分数进行加、减时，如果仍然用各分母的乘积作为公共分母，这个分母很快便变得很大，对以后进行的约分是不利的。因此，《九章算术》规定：多个分数相加、减时，应以各分母的最小公倍数为公共分母。这个最小公倍数是怎样求的呢？《九章算术》用的方法很巧妙，与今天所使用的方法不尽相同，但却有异曲同工之妙。卷四少广章里说，

“术曰：(一) 置全步及分母子，(二) 以最下分母徧乘诸分子及全步，(三) 各以其母除其子，置之于左，(四) 命通分者，(五) 又以分母徧乘诸分子及已通者，皆通而同之……”。

(以下的话与求各分母的最小公倍数无关)。

例如，试求 $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}+\frac{7}{15}$.

照《九章算术》所说，可如下进行。

(一) 置全步（即1）及分母子	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{15}$
(二) 以最下（右）分母徧乘	15	$\frac{15}{2}$	$\frac{45}{8}$	$\frac{75}{12}$	$\frac{105}{15}$
(三) 通分(指约分)	15	$\frac{15}{2}$	$\frac{45}{8}$	$\frac{25}{4}$	7
(四) 以最下分母徧乘	60	$\frac{60}{2}$	$\frac{180}{8}$	$\frac{100}{4}$	28
(五) 通分(约分)	60	30	$\frac{45}{2}$	25	28
(六) 以最下分母徧乘	120	60	$\frac{90}{2}$	50	56
(七) 通分(约分)	120	60	45	50	56

当各分母完全消失后，过程即行结束，在“全步”一行下的数便是各分母的最小公倍数，亦即所求的公共分母，而后面各行中的数便是相应分数的新分子。就上例言便得

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}+\frac{7}{15}=\frac{60}{120}+\frac{45}{120}+\frac{50}{120}+\frac{56}{120}$$

显然这是正确的结果。

必须指出，今天所说的“通分”实指“扩分”（把分母扩大），在《九章算术》中是不讨论的，这里的“命通分者”与下文的“已通者”“皆通而同之”等等，“通”指“处理”，实际上指“约分”，即把其中出现的分数化简，以往的注解家未注意到这点，以为《九章

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

算术》有疏漏（例如，秦九韶便补“可约者约之”一句，其实，这句即“命通分者”）。有了约分过程后，读者不难相信，《九章算术》中所得的最小公倍数与今天所求的相同，而且求的过程与今天的过程也基本相同。

值得指出，在《九章算术》中，凡两个分数加、减都用分母的乘积为公共分母，只有在少广章（卷四）中对多个分数才以分母的最小公倍数为公共分母，这是容易看出的。但是却有两例，加、减时的公共分母却既不是分母的乘积，又不是分母的最小公倍数，这是很奇怪的。这两例是：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\quad \text{的公共分母用 } 120\,.$$

（分母的乘积为 720，而最小公倍数为 60）

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\quad \text{的公共分母用 } 83160$$

（分母的最小公倍数为 27720，分母的乘积为 $2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 83160$）。

对于这个奇怪现象，一个可能的解释是：作者是使用最小公倍数的，只是计算时偶然多算了因子 2 及因子 3 .（$120=2\times 60$，$83160=3\times 27720$），这是无心的错误。

另一可能解释是：作者故意在这两例中选取既为最小公倍数的倍数又为相乘积的因数的数作为分母，表明可作公共分母的不限于这两者，以使读者不致于太过拘泥。

这两种可能性均有，但看来前者的可能性（无心错误）更大。

第三，求整勾股弦数是一个大问题，即使在今天，也要经过一番很仔细的讨论才能解决的，在讨论中，素数概念是一个不可缺少的工具。但在我国古代的《九章算术》中，却利用很巧妙的方法，无须利用素数概念，而把一切有理勾股弦数都求出来了。

显然，要求出一切勾股弦数(正整数)，可先求一切有理的勾股弦数。在方程 $x^2+y^2=z^2$ 中，如果任意对其中两数给以有理数，则求第三个数时需进行开方，一般得出的是无理数，不能符合要求，要想得出一切有理的勾股弦数，最好能够找出两个数 u，v，使得当 x,y,z 全为有理数时，u，v 必为有理数；反之，x，y，z 又能够由 u，v 而有理地表出。这样，只须 u，v 取尽一切有理数便能够把一切有理勾股弦数表出了。

这两数是什么数呢？《九章算术》回答说：是 x 与 $z-y$。在《九章算术》卷九勾股篇中，最初五题是 x,y,z 之间的互求，第六到第十题便是由 x，$z-y$ 而求 x,y,z 的。第六题是：

“今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问水深葭长各几何？
术曰：半池方(x)自乘，以出水($z-y$)一尺自乘减之，余倍出水除之，即得水深(y)，加出水数得葭长(z)”。

这里，“半池方自乘”为 x^2，“出水自乘”为 $(z-y)^2$，相减后余数便是 $x^2-(z-y)^2$，以“倍出水（即 $2(z-y)$）除之”便是：

$$y=\frac{x^2-(z-y)^2}{2(z-y)}$$

由这数“加出水数即葭长”即指：

$$z=y+(z-y)=\frac{x^2-(z-y)^2}{2(z-y)}+(z-y)=\frac{x^2+(z-y)^2}{2(z-y)}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

如命 $x=u$，$z-y=v$，那便有：

$$x=u,\qquad y=\frac{u^2-v^2}{2v},\qquad z=\frac{u^2+v^2}{2v}$$

这便是 x，y，z 用 u，v 所作的有理表示.

这个 u，v 正合我们上面提出的要求．因此，只要 u，v 取尽一切有理数（但须 $u\geqslant v$），那末便得出一切有理的勾股弦数了．

这里 u，v 都可取有理数为变值，我们还可加以变化，使得只有一个数以有理数为变值，其余的都以正整数为变值．

因 u，v 为有理数，故 u/v 亦为有理数，可写为 $u/v=m/n$（m，n 为正整数），进行约分后，还可要求 m，n 无公因子（即其等数为 1）．于是可写为

$$u=mt,\quad v=nt$$

（m，n 为整数，无公因子，t 为有理数）

将 u，v 之值代入上式得

$$y=\frac{m^2-n^2}{2n}t,\qquad z=\frac{m^2+n^2}{2n}t,\qquad x=mt.$$

如记 $\frac{t}{2n}$ 为 p（p 为有理数），则又可写为

$$y=(m^2-n^2)p,\qquad z=(m^2+n^2)p,\qquad x=2mnp.$$

根据上面的讨论，可知当 m，n 取一切正整数（但 $m\geqslant n$ 且 m，n 无公因子）而 p 取一切有理数时，上式便给出一切有理的勾股弦数．这是《九章算术》的成果．

《九章算术》没有研究正整数的勾股弦数的问题，但根据上面的成果，稍加考虑，便不难解决“求一切正整数的勾股弦数”的问题．我们归结为下列定理：

定理 x，y，z 为正整数的勾股弦数当且仅当它可表成下列形式：

$$x=2mnp,\qquad y=(m^2-n^2)p,\qquad z=(m^2+n^2)p$$

其中 m，n，p 为正整数，$m>n$，m，n 无公因子．

证 充分性是显然的，因为上三式都是正整数而又满足方程 $x^2+y^2=z^2$，故为勾股弦数．今证必要性，即证：当 x，y，z 为整数时，p 必可取为整数．

设 x，y，z 为整数而 $p=\frac{k}{h}$（h，k 为整数且无公因子即其等数为 1）．如果 h 与 m 有等数 $h_1>1$，命 $h=h_1h_2$．由于 m，n 的等数为 1，故

h_1 为 m^2k 的因子而 h_1 与 n^2k 的等数为 1．从而 $(m^2k\pm n^2k)/h_1$ 决非整数．再用 h_2 除得 $(m^2k\pm n^2k)/h_1h_2$，更非整数，即 y 与 z 非整数．同理，如果 h 与 n 有等数 $h_1>1$，那末 y 与 z 亦非整数．如欲 y，z 为整数，h 与 m 与 n 的等数必须为 1，从而 h 与 $m\cdot nk$ 的等数亦为 1．根据等数的求法，知有整数 a、b 使

$$amnk-bh=1.$$

两边乘以 2 得 $$2amnk-2bh=2$$

两边除以 h 得 $$2amnk/h-2b=2/h$$

但 $2amnk/h=ax$ 为整数，故 $2/h$ 必为整数，从而 $h=1$ 或 2．

如果 $h=1$ 则 $p=k$ 为整数，符合定理要求．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

如果$h=2$则因m，n与h的等数为1知m，n均为奇数．这时

$$y=(m^2-n^2)\frac{k}{2}=2\cdot\frac{m-n}{2}\,\frac{m+n}{2}k\ ,$$

$$z=(m^2+n^2)\frac{k}{2}=\left[\left(\frac{m+n}{2}\right)^2+\left(\frac{m-n}{2}\right)^2\right]k\ ,$$

$$x=2mn\frac{k}{2}=\left[\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2\right]k\ .$$

因m，n为奇数，故 $\frac{m-n}{2}$，$\frac{m+n}{2}$均为整数（记为m',n'），又k亦为整数（记为p'），因此x，y，z仍可表成$(m'^2-n'^2)p'$，$2m'n'p'$，$(m'^2+n'^2)p'$的形状，符合定理的要求．于是定理得证．

当然，《九章算术》中并没有提出求一切正整数的勾股弦数的问题，但我们已能利用当时已有的概念及已知的性质而证明《九章算术》的公式实已穷尽了一切整勾股弦数．我们有理由认为《九章算术》已给出求一切整勾股弦数的完整公式（至于给出求一切有理勾股弦数的完整公式那更不成问题了）．

我们知道，在希腊时代只能求出零星的个别的若干个整勾股弦数，直到公元第三世纪（公元250年前后）狄奥番图（Diophantus）才得出类似于上文的求整勾股弦数的完全公式，那已在《九章算术》之后四五百年了．可以说《九章算术》是第一个记载勾股弦数的完整公式的，这是我国古代数学的一个巨大贡献．

末了，还可指出一点．我国古代数学，一般说来，在几何学方面是比较弱的，但这只就推理方面而言，至于有关面积与体积的计算，一般却是很卓越的．《九章算术》卷五商功篇有一题：

“今有羡除下广六尺，上广一丈，深三尺，末广八尺无深；袤七尺问积几何？”

“术曰：并三广以深乘之，又以袤乘之，六而一”．

亦即　羡除体积$=\frac{1}{6}\times$三广之和$\times$深$\times$袤．这个公式一般认为是初等几何里面最伤脑筋最难缠的一个，不见于欧氏《几何原本》，一般认为，直到18世纪末勒让德（Legendre）才发现它，写在他的几何书（卷六第20题）中．这条定理却写在二千年前的《九章算术》中，连西洋的数学史家也大吃一惊呢！（本段所论，参见 J. L. Coolidge, A History of Geometrical Methods p. 21—22）．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.