奇异联络的残数和奇异截影的指数*

曾永根

（西南交通大学）

在〔3〕中，D. Lehmann引进了奇异联络的概念．在该文中，作为他的“残数定理”的一个应用，在主丛情形下，他证明了一种“障碍定理”．但是，人们经常碰到的是向量丛里的奇异截影．而这类截影在一般情形下是不能补充成相应的主丛中的奇异截影的．因此．不能利用他的结果而需要专门的讨论．本文就是为此而作的．

在介绍了本文中用到的一些记号和一些较为特殊的结果以后，我们便讨论定义在一流形M上的向量丛的带孤立奇异点的截影．根据这个截影，我们将用一种自然的方式定义一个奇异联络．然后，将证明这个联络在每个胞腔上的残数等于原截影在这个胞腔内的奇点上的指数和．根据这个结果和‘残数定理’，我们便立即获得Hopf定理．跟〔5〕的工作一比较，便可发现：虽然本质上讲，奇异联络总可以修改成通常的联络，但是，在一些涉及到截影奇异性这类问题时，用奇异联络似乎更自然．倘若一定用通常的联络，则有时会陷入技术困境．例如〔5〕就没有能正式完成他的工作**．

然后，运用已经获得的结果，我们证明了一个M. H. Schwartz定理：当两个复介析流形由某一类调和映射相联系时，他们的Schwastz类和陈类之间存在一个关系．M.H.Schwastz证明这个关系是用陈省身的方法：在坐标系流形的一个子流形上应用Stokes公式．而用我们这里的讨论方法，这个结果在几何上是几乎显然的．

关于M. H. Schwartz定理的意义，由最近的〔1〕和〔4〕，可了解其重要性．

工作中，作者得到D. Lehmann和J. P. Brasselet先生的帮助．特此致谢．

一、几点回顾

这里假定读者熟悉联络论，以及陈类的联络论定义方式．

带奇异的联络〔3〕：

原作者是在主丛范围内考虑的，我们这里是在向量丛情形下讨论．

设：V是一n维复解析流形；（D）是V的一个可微胞腔剖分；$(D)^l$是（D）的l骨架；E是V上的一个复向量丛；∇是$E|_{(D)^{2k-1}}$的一个联络．当然，这个联络是可以开拓成$E|_{T(D)^{2k-1}}$上的一个联络的．这里，$T(D)^{2k-1}$表示$(D)^{2k-1}$在V中的一个管道邻域．∇称为E的一个奇异联络．

* 1983年6月29日收到．

** 〔5〕中，作者最后断定$\lim\int_{B_i}=0$.其实，积分$\int_{B_i}$是根本不随B_i变化的．断定极限为0，即断定$\int_{B_i}=0$．而这几乎等价于断定要证明的定理成立．

于是，$\bigtriangledown$ 在胞腔D_a^{2k}上的，相应于陈多项式C_k的，残数定义为：

$$\mathrm{Res}_{D_a^{2k}}(\bigtriangledown, C_k)=\int_{\partial D_a^{2k}}\Delta(\bigtriangledown, \bigtriangledown_a, C_k).$$

这里，∂D_a^{2k}表示D_a^{2k}的边界，

$\bigtriangledown$表示$E|_{D_a^{2k}}$上的某个平凡联络．它总是存在的．而$\Delta(\bigtriangledown, \bigtriangledown_a, C^k)$ 是一个如下定义的$2k-1$ 形：

在向量丛$\widetilde{E}=E|_{\partial D_a^{2k}}\times[0, 1]\to\partial D_a^{2k}\times[0, 1]$ 上定义联络$\widetilde{\bigtriangledown}$：

$$\widetilde{\bigtriangledown}|_{E|_{\partial D_a^{2k}}\times\{t_0\}}=t_0\bigtriangledown+(1-t_0)\bigtriangledown_a, \qquad t_0\text{固定}$$

$$\widetilde{\bigtriangledown}|_{\{Z_0\}\times[0,1]}=0, \qquad z_0\text{固定}$$

设$\widetilde{R}\in\Omega^2(D_a^{2k}\times[0, 1], \mathrm{END}\widetilde{E})$ 是它的曲率，于是

$$\Delta(\bigtriangledown, \bigtriangledown_a, C_k)=\int_0^1 C_k(\widetilde{R})$$

$\int_0^1$表示沿［0， 1］对t进行纤维积分．

残数定理：$\mathrm{Res}(\bigtriangledown, C_k)$ 定义了一个$D-2k$上链．它是$D-$上循环．它所属的上同调类，经过de Rham同构：$H_{DR}^*(V)\cong H^*(V, R)$ 的逆的像正是E 的陈类：$C_k(E)\in H_{DR}^{2k}(V, R)$．

射向场［6］：

设（V_i）是复解析流形V的一个分层结构（stratifi cation）．满足Whitney条件（a）、（b）；

K是V的一个可微三角剖分．它和这个分层结构相容．即每个开单形含于一个层内；

D是K的对偶胞腔剖分．对于D的所有胞腔D_a和层V_j总有：$D_a \pitchfork V_j$．

M．H．Schwastz证明在（D）^{2p}上存在带孤立奇点的r－坐标场，$p=n-r+1$，$Z_r=(X_1, \cdots X_r)$．使

1）$X_i(x)\quad T_xV_j\quad$ 当$x\in V_j\cap(D)^{2p}$ $\forall\ i=1,\cdots r_j$, $\forall\ j$；

2）Z_r只有孤立奇点．它们正是X_r的零点．在（D）$^{2p-1}$上Z_r没有奇点．而在（D）^{2p}上，$Z_{r-1}=(X_1, \cdots X_{r-1})$ 没有奇点．(一个r－坐标场的奇点是指r个向量线性相关之点)．

称这样的场$Z_r=(X_1, \cdots X_r)$ 为一射向场．

M．H．Schwastz类［6］：

如前所设，（V_i）是V的一个分层结构．相应于每个V_i，借助于前面的射向场Z_r，可以决定一个障碍上循环$\widetilde{C}_i\in C_D^{2p}(V, V-\mathring{T}_i)$ 这里T_i表示（D）中和V_i相交的闭胞腔之并．$\mathring{T}_i$于是是V_i的一个管道邻域．

$$\langle\widetilde{C}_i, D_a^{2p}\rangle=\sum_{a_k\in V_i\cap D_a^{2p}} I(Z_r, a_k)$$

$I(Z_r, a_k)$ 表示Z_r在a_k处的指数．$\widetilde{C}_i$在$H_{V_i}^{2p}(V)$ 中的类$C_p(V_i)$．叫Schwastz类．

二、残数和指数

设D是复介析流形V上的一个可微胞腔剖分，E是V上的一个复光滑向量丛；σ是E在V上的带孤立奇点（x_i）的截影，且（x_i）$\cap(D)^{2n-1}=\phi$．

现以x_i为中心，有圆邻域B_i使：

$$B_i\cap B_j=\phi, \qquad \forall i\neq j; \qquad B_i\cap(D)^{2n-1}=\phi, \qquad \forall i\ .$$

在E上取一个爱弥顿度量以后，在V－（x_i）上定义有截影：$S=\dfrac{\sigma}{|\sigma|}$．又定义带孤立奇点

(x_i) 的联络如下：由于在 $V-(x_i)$ 上总有：$E^n=[S]\oplus F^{n-1}$，其中〔S〕表示由截影S产生之一维平凡丛；F^{n-1} 是它的正交余向量丛．在〔S〕中定义联络 ∇^1 为 $\nabla^1 S=0$．

在 F^{n-1} 中取联络 ∇^2 如下：要求在每个 $\dot{B}_i=B_i-x_i$ 上，它是 $E^n|_{B_i}$ 的一个平凡联络的顺〔S〕的投影．这总是可行的．然后，在 $E|_{V-(x_i)}$ 上取 ∇^1 和 ∇^2 之和为联络：$\nabla=\nabla^1\oplus\nabla^2$．

下面将计算联络 ∇ 在任一个 B_i 上的残数．为简单汁，记 B_i 为B．取 $E|_B$ 的一个正规正交局部基．设为：$e_1,\cdots,e_n$．以下用〈〉记前面取定之度量．于是有 $\langle e_i,e_j\rangle(x)=\delta_{ij}$，$x\in\dot{B}$．且设在此基下S表示为：$S=\Sigma\mu_i e_i$，$\mu_i$：$\dot{B}\to C$．于是可得 e_i 的分解：$e_i=\overline{\mu_i}S+(e_i-\overline{\mu_i}S)$，其中 $\overline{\mu_i}S\in\Gamma([S])$ 而 $e_i-\overline{\mu_i}S\in\Gamma(F^{n-1})$ 这里 Γ 表示截影层．

由于 $\nabla^1(\overline{\mu_i}S)=d\overline{\mu_i}\cdot S$，$\nabla^2(e_i-\overline{\mu_i}S)=-\overline{\mu_i}dS+\overline{\mu_i}(dS\cdot\overline{S})S$，于是 $\nabla e_i=-\overline{\mu_i}dS+d\overline{\mu_i}\cdot S+\overline{\mu_i}(dS\cdot\overline{S})S$，这里 $dS=\Sigma d\mu_i\cdot e_i$，$dS\cdot\overline{S}=\Sigma d\mu_i\cdot\overline{\mu_i}$，写成 $\nabla e_i=\Sigma\omega_i^j e_j$，其中 $\omega_i^j=-\overline{\mu_i}d\mu_j+d\overline{\mu_i}\mu_j+\overline{\mu_i}(dS\cdot\overline{S})\mu_j$．对于这样定义的奇异联络，我们先证明一个关系：

予理Ⅰ． $$\mathrm{Res}_{D_a^{2n}}(\nabla,\ C_n)=\sum_{x_i\in D_a^{2n}}\mathrm{Res}_{B_i}(\nabla,\ C_n),$$

类似地定义 $\mathrm{Res}_{B_i}(\nabla,\ C_n)$．

证明： 在 $D_a^{2n}-\sum_{x_i\in D_a^{2n}}B_i$ 上有 $C_n(R_a)=0$（因 ∇_a 是平凡联络）及 $C_n(R)=0$（因在 $D_a^{2n}-\sum_{x_i\in D_a^{2n}}B_i$ 上S是一正常截影），而 $\nabla S=0$．

根据众所周知的 $\Delta(\nabla,\ \nabla_a,C_n)$、$C_n(R_a)$ 和 $C_n(R)$ 之间的关系：$d\Delta(\nabla,\ \nabla_a,\ C_n)=C_n(R)-C_n(R_a)$，有 $\mathrm{Res}_{D_a^{2n}}(\nabla,\ C_n)-\Sigma\mathrm{Res}_{B_i}(\nabla,\ C_n)=\int_{\partial D_a^{2n}}\Delta(\nabla,\ \nabla_a,\ C_n)-\Sigma\int_{\partial B_i}\Delta(\nabla,\ \nabla_a,\ C_n)=\int_{\partial(D_a^{2n}-\Sigma B_i)}\Delta(\nabla,\ \nabla_a,\ C_n)=\int_{D_a^{2n}-\Sigma B_i}d\Delta(\nabla,\ \nabla_a,\ C_n)=0$．

命题． $\mathrm{Res}_B(\nabla,\ C_n)=\deg\widetilde{S}$，这里 $\widetilde{S}=S|_{\partial B}$：$\partial B\to S^{2n-1}$．

为证这个命题，我们需要一个计算可微映射 $\widetilde{S}$：$\partial B\to S^{2n-1}$ 的度数的公式．〔2〕中实的情情形下的计算公式，这里需加变形：

辅理Ⅰ． 设 $S=(\mu_1,\ \cdots\mu_n)$：$B^{2n-1}\to S^{2n-1}\in C^n$，$B^{2n-1}$ 是维数为 $2n-1$ 之流形．则有：

$$\deg S=(n-1)!\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{B^{2n-1}}\Sigma\overline{\mu_i}d\mu_i d\overline{\mu_1}d\mu_1\cdots\widehat{d\overline{\mu_i}d\mu_i}\cdots d\overline{\mu_n}d\mu_n$$

其中 $\wedge$ 表示它下面的因子消失．

证． 先把S写成实形：

$$S=\left(\frac{\mu_1+\overline{\mu_1}}{2},\ \frac{\mu_1-\overline{\mu_1}}{2i},\cdots,\frac{\mu_n-\overline{\mu_n}}{2i}\right)=(s_1,\ \cdots s_{2n}),$$

应用〔2〕中公式便有

$$\deg S=\frac{(n-1)!}{2\pi^n}\int_{B^{2n-1}}\sum_1^{2n}(-1)^i s_i ds_1\cdots\widehat{ds_i}\cdots ds_{2n}$$
$$=\frac{(n-1)!}{2n^n}\int_{B^{2n-1}}\Sigma ds_1 ds_2\cdots(s_{2k-1}ds_{2k}-ds_{2k-1}s_{2k})\cdots ds_{2n-1}ds_{2n}.$$

由于 $ds_{2k-1}ds_{2k}=\frac{1}{2i}d\overline{\mu_k}d\mu_k$，从而 $s_{2k-1}ds_{2k}-ds_{2k-1}s_{2k}=\frac{1}{2i}(\overline{\mu_k}d\mu_k-\mu_k d\overline{\mu_k})$．注意到 $\Sigma(d\mu_i\overline{\mu_i}+\mu_i d\overline{\mu_i})=0$，从而有 $\overline{\mu_i}d\mu_i d\overline{\mu_1}d\mu_1\cdots\widehat{d\overline{\mu_i}d\mu_i}\cdots d\overline{\mu_n}d\mu_n=-d\overline{\mu_i}\mu_i d\overline{\mu_1}d\mu_1\cdots\widehat{d\overline{\mu_i}d\mu_i}\cdots d\overline{\mu_n}d\mu_n$．代入便得所求之公式．

命题的证明．由$\nabla e_i=\Sigma\omega_i^j e_j$及$\nabla^0 e_i=0$，知$\widetilde{\nabla}e_i=[t\nabla+(1-t)\nabla^0]e_i=\sum\limits_i\widetilde{\omega}_i^j e_j$．注意，这里的$e_j$已是经过Pullback而视为$E|_{\dot{B}}\times[0,1]\to\dot{B}\times[0,1]$丛的基．为简化符号不再区别．

这样，在基e_i下，$\widetilde{\nabla}$的曲率的局部表示为：

$$\widetilde{\Omega}=d\widetilde{\omega}-\widetilde{\omega}\times\widetilde{\omega}=(dt\omega_i^j+td\omega_i^j-t^2\Sigma\omega_i^k\omega_k^j),$$

于是

$$\Delta(\widetilde{\nabla},\ \nabla_a,\ C_n)=\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n\int_0^1\det[dt\omega_i^j+td\omega_i^j-t^2\sum_k\omega_i^k\omega_k^j]\ .$$

易见：

$$d\omega_i^j=-2d\overline{\mu_i}d\mu_j+d(\overline{\mu_i}\mu_j)(ds\cdot\bar{s})-\overline{\mu_i}(ds\cdot d\bar{s})\mu_j$$

$$\Sigma\omega_i^k\omega_k^j=-d\overline{\mu_i}d\mu_j-\overline{\mu_i}(ds\cdot d\bar{s})\mu_j+\overline{\mu_i}(ds\cdot\bar{s})(s\cdot d\bar{s})\ \mu_j\ .$$

代入行列式后发现：该行列式可以分解成一些行列式之和，其中有的如

$$\mathrm{Det}(\omega_i^{j_1},\ d(\overline{\mu_i}\mu_{j_2})(ds\cdot\bar{s}),d(\overline{\mu_i}\mu_{j_3})(ds\cdot\bar{s}),\cdots]$$

$$\mathrm{Det}[\omega_i^{j_1},\ \overline{\mu_i}(ds\cdot d\bar{s})\mu_{j_2}\ ,\overline{\mu_i}(ds\cdot d\bar{s})\mu_{j_3},\ \cdots]$$

和

$$\mathrm{Det}[\omega_i^{j_1},\ \overline{\mu_i}(ds\cdot\bar{s})(s\cdot d\bar{s})\mu_{j_2},\ \overline{\mu_i}(ds\cdot\bar{s})(d\bar{s}\cdot s)\mu_{j_3},\ \cdots]$$

其值为零，另外有些如$\mathrm{Det}[\omega_i^j,\ \overline{\mu_i}(ds\cdot d\bar{s})\mu_{j_2},\ \cdots]$（$\cdots$中不再出现$\overline{\mu_i}(ds\cdot d\bar{s})\mu_j$形．）是成对出现的，所以相消为零．因此剩下的是：

$$\mathrm{Det}[\omega_i^{j_1},\ (t^2-2t)d\overline{\mu_i}d\mu_{j_2},\ \cdots(t^2-2t)d\overline{\mu_i}d\mu_{j_n}]$$

及

$$\mathrm{Det}[\omega_i^{j_1},td(\overline{\mu_i}\mu_{j_2})(ds\cdot\bar{s}),(t^2-2t)d\overline{\mu_i}d\mu_{j_3},\ \cdots(t^2-2t)d\overline{\mu_i}d\mu_{j_n}].$$

其中（$j_1\cdots j_n$）是（$1,\cdots,n$）的一个排列．前一类行列式之和为

$$I=-(2n-1)\int_0^1 t^{n-1}(t-2)^{n-2}dt(n-1)!\sum_i\overline{\mu_i}d\mu_i d\overline{\mu_1}d\mu_1\cdots d\overline{\mu_i}d\mu_i\cdots d\overline{\mu_n}d\mu_n\ .$$

后一类之和为．

$$\mathrm{II}=-(2n-2)\int_0^1 t^{n-1}(t-2)^{n-2}dt(n-1)!\ \Sigma\overline{\mu_i}d\mu_i d\overline{\mu_1}d\mu_1\cdots d\overline{\mu_i}d\mu_i\cdots d\overline{\mu_n}d\mu_n\ .$$

从而：

$$\Delta(\nabla,\nabla_a,C_n)=-[(2n-1)\int_0^1 t^{n-1}(t-2)^{n-1}dt+(2n-2)\int_0^1 t^{n-1}(t-2)^{n-2}dt](n-1)!\ \Sigma\overline{\mu_i}d\mu_i\cdots\widehat{d\overline{\mu_i}d\mu_i}\cdots d\overline{\mu_n}d\mu_n\ .$$

根据下面要证的等式，我们有$\mathrm{Res}_B(\nabla,\ C_n)=\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n\int_{\partial B}(-1)^n(n-1)!\ \Sigma=\deg S$，命题得证．

辅理2．　$(2n-1)\int_0^1 t^{n-1}(t-2)^{n-1}dt+(2n-2)\int_0^1 t^{n-1}(t-2)^{n-2}dt=(-1)^{n-1}$

证．由$\int_0^1 t^{n-1}(t-2)^{n-1}dt=t^n(t-2)^{n-1}\Big|_0^1-(n-1)\int_0^1 t^{n-1}(t-2)^{n-1}dt-(n-1)\int_0^1 t^n(t-2)^{n-2}dt$．根据$t=(t-2)+2$，有

$$\int_0^1 t^{n-1}(t-2)^{n-1}dt=(-1)^{n-1}+2(n-1)\int_0^1 t^n(t-2)^{n-2}dt-2(n-1)\int_0^1 t^{n-1}(t-2)^{n-1}dt,$$

即得欲证．

总结以上，我们实际证明了以下结果：

定理．对于复流形V上的任一n维复光滑向量从E的任一带孤立奇异点（x_i）的截影S，倘若V存在一个可微三角剖分D，使（x_i）$\in(D)^{2n}-(D)^{2n-1}$，则总存在一带孤立奇点的联络∇，使相应于陈多项式C_n的在奇点x_i的圆邻域B_i（B_i中没有其它奇点）的残数$\mathrm{Res}_{B_i}(\nabla,\ C_n)$等于截影S在$x_i$处的指数．

我们这里一个截影的指数即是〔2〕中相应圆丛中截影的指数．从而根据指数和度数的

关系，便得上定理.

当流形是紧的时候．其中关于具有指定性值的三角剖分的条件是自然满足的，从而连同Lehmann的残数定理便有：

定理．（Hopf）设 E 是紧复 n 维流形 V 上的一复 n 维光滑向量丛．设 S 是它的任一带孤立零点之截影．则有

$$\int_V C_n(E) = S\text{的指数和}.$$

三、Schwartz定理〔4〕

下面作为已经证明的定理的一个应用，我们给Schwartz定理一个新证明．

设 V 和W是具有相同维数的复解析流形．f 是从 V 和W中的调和映射，且设为离散的．Schwartz指出在此条件下．V存在一分层结构（V_i）使：i）$f|_{V_i}$ 是一渗入；ii）f 在 x 的邻域中的局部拓扑度数当 x 属于一确定的层时为常数．

对于这个分层结构．有一个和它相容的三角剖分．设 D是对偶的胞腔剖分．设相应的Schwartz 类为$C_p(V_i)$．此时有：

定理（Schwartz）．$C_p(f^*TW) = \sum_i m(V_i)\mu C_p(V_i)$，

这里．$m(V_i)$ 表示 f 在V_i的点上的局部拓扑度数,$C_p(f^*TW)$ 表示从f^*TW的第 p 陈类，而μ是〔1〕所描述的$H^{2p}_{V_i}(V) \to H^{2p}(V)$ 自然映入．

证明．首先由$H^{2p}(V) \underset{i^*}{\cong} H^{2p}(D^{2p})$ 知$C_p(f^*TW|_{D^{2p}}) = i^*C_p(f^*TW)$，因此为决定$C_p(f^*TW)$ 只需考虑$f^*TW|_{D^{2p}}$．可是我们知道在D^{2p}上，存在射向场$Z_r = (X_1,\cdots X_r)$ $r = n - p + 1$.所有X_i是切于V_j的．而由于$df|_{TV_j}$是一对一的，所以如果记 g 为由下图确定之映射：

$$\begin{tikzcd} TV \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & f^*TW \arrow[dl] \\ & V & \end{tikzcd}$$

则有：X_i经 g 映射后将成为f^*TW中的截影Y_i．它们具有如同X_i的性质．现在在f^*TW中取一爱弥顿度量使$Y_i \perp Y_j$（$i \neq j$）．这个度量的奇异性不影响下面的讨论．于是$f^*TW = \varepsilon^{r-1} \oplus \eta^p$，这里$\varepsilon^{r-1}$是由$Y_1 \cdots Y_{r-1}$产生之$D^{2p}$上的平凡丛,而$\eta^p$是定义在$D^{2p}$上有孤立零点的截影：$Y_r$．于是$C_p(f^*TW|_{D^{2p}}) = C_p(\eta^p)$．但是根据我们已经证明的定理，在$\eta^p$上存在一带孤立奇点之联络$\nabla$，使：

$$\mathrm{Res}_{D^{2p}_a}(\nabla, C_p) = \sum_{a_i \in D^{2p}_a} I(Y_r, a_i) = \sum_{a_i \in D^{2p}_a} m(a_i) I(Z_r, a_i) = \sum_j \sum_{a_i \in D^{2p}_a \cap V_j} m(a_i) I(Z_r, a_i) =$$

$$= \sum m(V_j) \sum_{a_i \in D^{2p}_a \cap V_j} I(Z_r, a_i) = \sum m(V_j) \langle \mu \widetilde{C}_p(V_j), D^{2p}_a \rangle = \langle \sum m(V_j) \mu \widetilde{C}_p(V_j), D^{2p}_a \rangle$$

即作为D—$2p$上链$\mathrm{Res}(\nabla, C_p) = \sum_j m(V_j)\mu \widetilde{C}_p(V_j)$．从而根据〔3〕中的残数定理和Schwartz 类的定义，便有$C_p(f^*TW) = \sum_i m(V_i)\mu \hat{C}_p(V_i)$．

参 考 文 献

〔1〕J. P. Brasselet, M. H. Schwartz, Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe, Séminaire E. N. S.（1978—1979）.

〔2〕W. Greub, S. Halperin, R. Van Stone, Connections Curvature and Cohomology.
〔3〕D. Lehmann, Résidus des Connexion à Singularités et Classes Charactéristiques, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 31.1.(1981), 83—89.
〔4〕R. D. Mac Pherson, Chern classes for singular algebraic varieties, Ann. of Math. (1974), 100, 423—432.
〔5〕Ngô Van Quê, classes de Chern et theorême de Gausse—Bonnet.
〔6〕M. H. Schwartz, classes characteristiques définies par une stratification d'une variete analytique complexe, C. R., t. 260(1965), 3262—3264, 3535—3537.