关于不分明凸集的几点注记*

王戈平

（徐州师范学院）

§1 引 言

不分明凸集是不分明集理论中一个重要概念，而且有着广泛的实际应用的背景. L. A. Zadeh在他的著名论文〔9〕中，首次给出了不分明凸集的两种等价定义，说明不分明集的凸性与普通集的凸性有着密切的联系. 后来许多作者对不分明凸集进行了研究，如文献〔1〕、〔2〕、〔4〕、〔5〕等等. 其中R. Lowen在〔1〕中对不分明凸集进行了系统的研究，得到了许多值得注意的结果. 本文利用不分明集与普通集之间的联系，特别是不分明集的分解定理[6]来研究不分明凸集的性质. §2给出某些代数与拓扑的预备知识. §3先对不分明子空间的表示定理[1]的证明作了简化，然后给出生成不分明子空间的表示. §4首先给出关于不分明凸集的两个性质的简化证明，然后讨论不分明凸锥与不分明子空间的关系，指出〔1〕中定理6.8与6.9的条件可以减弱，并给出一个不同于〔2〕的新的简化的证明. 此外我们还建立了关于不分明子空间与不分明凸集的某些（不分明）拓扑性质.

§2 几个引理

本文如无特别说明，E表示实数域或复数域K上的线性空间，I表示闭单位区间. E上的一个不分明集是E到I的一个函数，并用小写希腊字母表示. 设μ是E上的不分明集，$r\in I$，$\sigma_r(\mu)=\{x\in E:\ \mu(x)>r\}$，$\omega_r(\mu)=\{x\in E:\ \mu(x)\geqslant r\}$ 分别表示μ的强r-截集与弱r-截集. 对E的任一普通子集A，1_A表示A的特征函数. 我们有以下分解定理[6][7]：

引理2.1 $\mu=\sup\limits_{r\in I} r1_{\sigma_r(\mu)}=\sup\limits_{r\in I} r1_{\omega_r(\mu)}$.

E上不分明集的加法与数乘分别定义为[4]

$$(\mu+\nu)(x)=\sup_{z+y=x}\min\{\mu(z),\ \nu(y)\};$$

当$\lambda\neq 0$时，$\lambda\mu(x)=\mu\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$，当$\lambda=0$时，$\lambda\mu(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \sup\limits_{y\in E}\mu(y), & x=0.\end{cases}$

引理2.2 设μ，ν是E上不分明集，$\lambda\in K$，$r\in I$，则有

（1）$\sigma_r(\mu+\nu)=\sigma_r(\mu)+\sigma_r(\nu)$；（2）$\sigma_r(\lambda\mu)=\lambda\sigma_r(\mu)$；

其中等式右端分别是普通集的和与数乘，其意义是自明的.

（3）$\mu+\nu=\sup\limits_{r\in I} r1_{\sigma_r(\mu)+\sigma_r(\nu)}$；（4）$\lambda\mu=\sup\limits_{r\in I} r1_{\lambda\sigma_r(\mu)}$.

* 1983年5月26日收到.

证明从略.

设（E，δ）是一个不分明拓扑空间，μ是E上的不分明集，我们用$\overline{\mu}$与$\mathring{\mu}$分别表示μ的闭包与内部. 又设（E，$\mathcal{T}$）是一个普通的拓扑空间,（E，$\mathcal{T}$）到 I 的所有下半连续函数构成E上的一个不分明拓扑，记为$\omega(\mathcal{T})$.（E，$\omega(\mathcal{T})$）称为由（E，$\mathcal{T}$）诱出的不分明拓扑空间[3]. 在诱出不分明拓扑空间中的闭包与内部运算有以下公式[8].

引理2.3 设（E,$\omega(\mathcal{T})$）是诱出不分明拓扑空间，μ是E上不分明集，则

（1）$\overline{\mu}=\sup\limits_{r\in I} r1_{\overline{\sigma_r(\mu)}}=\sup\limits_{r\in I} r1_{\overline{\omega_r(\mu)}}$；（2）$\mathring{\mu}=\sup\limits_{r\in I} r1_{(\sigma_r(\mu))^\circ}=\sup\limits_{r\in I} r1_{(\omega_r(\mu))^\circ}$；

（3）$\omega_r(\overline{\mu})=\bigcap\limits_{s<r}\overline{\omega_s(\mu)}$；（4）$\sigma_r(\mathring{\mu})=\bigcup\limits_{s>r}(\sigma_s(\mu))^\circ$.

§ 3 不分明子空间

定义3.1[4] E 上的不分明集μ称为一个不分明子空间，如果对任意x，$y\in$ E，$a,b\in$ **K**，有

$$\mu(ax+by)\geqslant\min\{\mu(x),\ \mu(y)\}\ .$$

命题3.2 以下命题是等价的：（1）μ是不分明子空间；（2）对任意$r\in$ I，$\sigma_r(\mu)$ 是子空间；（3）对任意$r\in$ I，$\omega_r(\mu)$ 是子空间.

证明从略.

〔1〕中给出了E＝$\mathbf{R}^n$时不分明子空间的表示定理，但其证明是相当繁的. 我们给出这个定理的一个简单而直接的证明.

定理3.3 设 E＝$\mathbf{R}^n$，E 上的不分明集μ是不分明子空间的充要条件是：存在E 的一列子空间$E_0\subset\cdots\subset E_k=E(k\leqslant n)$，对每一$i\in\{0,1,\cdots,k-1\}$，有$\dim E_i<\dim E_{i+1}$，而且存在I中的一列实数$a_0>a_1>\cdots>a_k$，使得

$$\mu=a_0 1_{E_0}\vee a_1 1_{E_1}\vee\cdots\vee a_k 1_{E_k}\ .$$

证 充分性由命题3.2直接推出，下面证必要性. 由引理2.1，$\mu=\sup\limits_{r\in I} r1_{\omega_r(\mu)}$. 由命题3.2每一个$\omega_r(\mu)$ 是E的子空间. 由于当$s<t$时，$\omega_s(\mu)\supset\omega_t(\mu)$，而且E是$n$维空间，因此$\{\omega_r(\mu):r\in I\}$ 中至多有$n+1$个两两不相同的子空间，设它们是E_0，E_1，…，E_k（$k\leqslant n$）且$E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_k=$ E. 令

$$a_i=\sup\{r:\omega_r(\mu)=E_i\},\qquad (i=0,1,\cdots,k)$$

不难验证$\omega_{a_i}(\mu)=\bigcap\limits_{r<a_i}\omega_r(\mu)$，从而有$\omega_{a_i}(\mu)=E_i$. 所以$a_0>a_1>\cdots>a_k$，而且

$$\mu=\sup_{0\leqslant i\leqslant k} a_i 1_{\omega_{a_i}(\mu)}=a_0 1_{E_0}\vee a_1 1_{E_1}\vee\cdots\vee a_k 1_{E_k}\ . \qquad \blacksquare$$

注 由我们的证明可以看出，不分明子空间的表示定理实质上是不分明集分解定理的特殊情形.

由定理3.3与引理2.2可得两个不分明子空间和的表示.

定理3.4 设μ，ν是$\mathbf{R}^n$的不分明子空间，$\mu=a_0 1_{E_0}\vee a_1 1_{E_1}\vee\cdots\vee a_k 1_{E_k}$，$\nu=\beta_0 1_{F_0}\vee\beta_1 1_{F_1}\vee\cdots\vee\beta_l 1_{F_l}$. 将$a_0$，…，$a_k$，$\beta_0$，…，$\beta_l$按大小次序排列为$\gamma_0>\gamma_1>\cdots>\gamma_m$（$m\leqslant k+l$）. 对任一$\gamma_s$，必存在唯一的$a_i$与$\beta_j$，使$a_{i+1}<\gamma_s\leqslant a_i$，$\beta_{j+1}<\gamma_s\leqslant\beta_j$（$i=-1,0,1,\cdots,k$；$j=$

$-1,0,1,\cdots,l$. 并设$\alpha_{-1}=\beta_{-1}=2$，$\alpha_{k+1}=\beta_{l+1}=-1$）. 令$G_s=E_i+F_j$（设$E_{-1}=F_{-1}=\phi$），则不分明子空间$\mu+\nu$可表示为

$$\mu+\nu=\gamma_0 1_{G_0}\vee\gamma_1 1_{G_1}\vee\cdots\vee\gamma_m 1_{G_m}\ .$$

证明从略.

定义3.5 设μ是E上的不分明集，令

$$[\mu]=\inf\{\nu:\nu\geqslant\mu,\ \nu是不分明子空间\}\ .$$

由〔4〕命题3.4,〔μ〕是不分明子空间，称为由μ生成的不分明子空间.

定理3.6 设μ是E上的不分明集，则

$$[\mu]=\sup_{r\in I} r1_{[\sigma_r(\mu)]},$$

其中〔$\sigma_r(\mu)$〕表示E的子集$\sigma_r(\mu)$生成的子空间.

证明从略.

定理3.7 设μ是E上不分明集，对任一$x\in E$与$p\in N$，令

$L(x,p)=\{\{x,\cdots,x_p\}\subset E: x_1,\cdots,x_p$线性无关，且存在$a_i\in I$，使$x=\sum_{i=1}^{p}a_ix_i\}$，则

$$[\mu](x)=\sup_{p\in N}\ \sup_{A\in L(x,p)}\ \inf\{\mu(y):y\in A\}.$$

证 令$\lambda(x)=\sup_{p\in N}\ \sup_{A\in L(x,p)}\ \inf\{\mu(y):y\in A\}$.

先证对任意$r\in I$，$\sigma_r(\lambda)=[\sigma_r(\mu)]$. 设$x\in\sigma_r(\lambda)$，即$\sup_{p\in N}\ \sup_{A\in L(x,p)}\ \inf\{\mu(y):y\in A\}>r$. 则存在$p\in N$，$A=\{x_1,\cdots,x_p\}\in L(x,p)$，使$\inf\{\mu(y):y\in A\}>r$. 也就是说，存在$a_i\in I$，使$x=\sum_{i=1}^{p}a_ix_i$，且$\mu(x_1)>r,\cdots,\mu(x_p)>r$. 所以$x_i\in\sigma_r(\mu),(i=1,\cdots,p)$，$x\in[\sigma_r(\mu)]$.反之，设$x\in[\sigma_r(\mu)]$，则存在$x_1,\cdots,x_p\in\sigma_r(\mu)$以及$a_1,\cdots,a_p\in I$，使$x=\sum_{i=1}^{p}a_ix_i$，所以$A=\{x_1,\cdots,x_p\}\in L(x,p)$且$\inf\{\mu(y):y\in A\}>r$. 因此$\sup_{p\in N}\ \sup_{A\in L(x,p)}\ \inf\{\mu(y):y\in A\}>r$.

再由引理2.1与定理3.6，

$$\lambda=\sup_{r\in I} r1_{\sigma_r(\lambda)}=\sup_{r\in I} r1_{[\sigma_r(\mu)]}=[\mu].$$ ∎

推论3.8 设μ是E上不分明集，则对任一$r\in I$，有$\sigma_r([\mu])=[\sigma_r(\mu)]$.

证 只要注意在定理3.7的证明中有$\sigma_r(\lambda)=[\sigma_r(\mu)]$与$\lambda=[\mu]$. ∎

由定理3.6，我们可以得到有限维空间中生成不分明子空间的表示. 设μ是$\mathbf{R}^n$上任一不分明集，则〔μ〕$=\sup_{r\in I} r1_{[\sigma_r(\mu)]}$. 令

$$\begin{aligned}
&a_0=\inf\{r:[\sigma_r(\mu)]=\phi\}, && E_0=[\sigma_{a_0}(\mu)],\\
&a_1=\inf\{r:[\sigma_r(\mu)]=E_0\}, && E_1=[\sigma_{a_1}(\mu)],\\
&a_2=\inf\{r:[\sigma_r(\mu)]=E_1\}, && E_2=[\sigma_{a_2}(\mu)],\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots
\end{aligned}$$

由于$E_0\subsetneqq E_1\subsetneqq E_2\subsetneqq\cdots$，因此上述构造过程至有限步停止. 可能出现两种情形：1. $E_k=E$；2. $E_{k-1}\subsetneqq E$，但$a_k=0$，这时令$E_k=E$. 这样我们便得到〔μ〕的满足定理3.3条件的表示：

$$[\mu]=a_0 1_{E_0}\vee a_1 1_{E_1}\vee\cdots\vee a_k 1_{E_k}.$$

最后我们建立不分明子空间的一个拓扑性质．

定理3.9 设（E，$\mathscr{T}$）是一个拓扑线性空间，（E，$\omega(\mathscr{T})$）是〔10〕意义下的不分明拓扑线性空间，又设μ是E上的一个不分明子空间，则$\bar{\mu}$也是E的不分明子空间．

证 由引理2.3，$\omega_r(\mu)=\bigcap_{s<r}\overline{\omega_s(\mu)}$．由于$\mu$是不分明子空间，由命题3.2，$\omega_s(\mu)$ 是E的子空间．由〔11〕定理3.5-D，$\overline{\omega_s(\mu)}$ 也是E的子空间（$s<r$），从而它们的交$\omega_s(\bar{\mu})$ 是E的子空间．再由命题3.2，$\bar{\mu}$是不分明子空间．

§4　不分明凸集与凸锥

定义4.1[9] E上的不分明集μ称为一个不分明凸集，如果对任意x，$y\in$ E，$a\in$ I，有

$$\mu(ax+(1-a)y)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(y)\}.$$

命题4.2[1] 以下命题是等价的：（1）μ是不分明凸集；（2）对任意$r\in$ I，$\sigma_r(\mu)$ 是凸集；（3）对任意$r\in$ I，$\omega_r(\mu)$ 是凸集．

定理4.3 设μ，ν是不分明凸集，则$\mu+\nu$也是不分明凸集．

注 见〔4〕命题4.5与〔5〕定理4.2，但那里的证明均较繁，下面给出一个简单的证明．

证 由引理2.2，对每一$r\in$ I，$\sigma_r(\mu+\nu)=\sigma_r(\mu)+\sigma_r(\nu)$，由命题4.2，$\sigma_r(\mu)$ 与$\sigma_r(\nu)$ 都是凸集，所以它们的和，即$\sigma_r(\mu+\nu)$，也是凸集．再由命题4.2，$\mu+\nu$是不分明凸集．

定理4.4 设μ是E上不分明集，convμ表示包含μ的最小不分明凸集[1]，则

（1）$\mathrm{conv}\,\mu=\sup_{r\in I} r1_{\mathrm{conv}\,\sigma_r(\mu)}$；（2）对每一$x\in$ E和$p\in$ N，令

$$C(x,\ p)=\{\{x_1,\ \cdots,\ x_p\}\subset E:\text{存在}a_i\in I,\ \sum_{i=1}^{p}a_i=1,\ x=\sum_{i=1}^{p}a_i x_i\},$$

则$\mathrm{conv}\,\mu(x)=\sup_{p\in N}\ \sup_{A\in C(x,\ p)}\ \inf\{\mu(y):y\in A\}$．

证明类似于定理3.6与3.7的证明，故从略．顺便指出，（2）就是〔1〕中命题6.3，但我们的证明是新的．

推论4.5 设μ是E上不分明集，对任一$r\in$ I，有$\sigma_r(\mathrm{conv}\,\mu)=\mathrm{conv}\,\sigma_r(\mu)$．

定义4.6[1] E上不分明集μ称为一个不分明凸锥，如果μ是凸的，且对任意$x\in$ E与$a>0$，有$\mu(ax)\geqslant\mu(x)$．

由〔1〕命题6.4，μ为不分明凸锥当且仅当对每一$r\in$ I，$\sigma_r(\mu)$ 为E中通常凸锥．

〔1〕中讨论了不分明凸锥与不分明子空间的关系（见〔1〕定理6.8与6.9），但其证明是较繁的．刘应明在〔2〕中给出这两条定理的简化的证明．我们指出，这两条定理中条件$\mu(0)=\sup\{\mu(x):x\in E\}$ 是多余的，并且给出不同于〔2〕的又一简化证明．

定理4.7 设μ是不分明凸锥，则存在包含μ的最小不分明子空间ν，且ν可以表为

$$\nu(x)=\sup\{\mu(z)\wedge\mu(y):z-y=x\}.$$

证 显然ν是由μ生成的不分明子空间，由定理3.6，$\nu=\sup_{r\in I} r1_{[\sigma_r(\mu)]}$，其中〔$\sigma_r(\mu)$〕表示通常凸锥$\sigma_r(\mu)$ 生成的子空间，所以

$$[\sigma_r(\mu)]=\sigma_r(\mu)-\sigma_r(\mu)=\{z-y:z\in\sigma_r(\mu),\ y\in\sigma_r(\mu)\}.$$

今证对任一 s，$\nu(x)>s \Leftrightarrow \sup\{\mu(z)\wedge\mu(y): z-y=x\}>s$．事实上，若$\nu(x)>s$,则存在$r>s$，使$x\in\sigma_r(\mu)-\sigma_r(\mu)$，因此存在$z\in\sigma_r(\mu)$，$y\in\sigma_r(\mu)$，使$x=z-y$．从而$\mu(z)\wedge\mu(y)>r$．所以$\sup\{\mu(z)\wedge\mu(y): z-y=x\}>r>s$．易见以上论证又是可逆的．

由此便得$\nu(x)=\sup\{\mu(z)\wedge\mu(y): z-y=x\}$． ∎

定理4.8 设μ是不分明凸锥，则存在包含于μ的最大不分明子空间ν，ν可以表为

$$\nu(x)=\mu(x)\wedge\mu(-x)\wedge\mu(0)\ .$$

注 当$\mu(0)=\sup\limits_{x\in E}\mu(x)$ 成立时，$\nu(x)=\mu(x)\wedge\mu(-x)$，因此〔1〕定理6.9是本定理的特殊情形．

证 如果$\mu(0)=0$，则结论显然成立．

设$\mu(0)=a>0$．当$r<a$时，$\sigma_r(\mu)$ 是包含原点的普通凸锥，则$\sigma_r(\mu)\cap(-\sigma_r(\mu))$ 是包含于$\sigma_r(\mu)$ 的最大子空间．令$\nu=\sup\limits_{r<a} r1_{\sigma_r(\mu)\cap(-\sigma_r(\mu))}$．类似于定理3.6，容易证明$\nu$是包含于$\mu$的最大不分明子空间．今证对任一$s$，$0\leqslant s<a$，

$$\nu(x)>s\Leftrightarrow\mu(x)\wedge\mu(-x)\wedge\mu(0)>s.$$

事实上，若$\nu(x)>s$，则存在$r>s$，使$x\in\sigma_r(\mu)\cap(-\sigma_r(\mu))$，则$\mu(x)>r$，$\mu(-x)>r$，从而$\mu(x)\wedge\mu(-x)>r$．由于$r<a=\mu(0)$，故$\mu(x)\wedge\mu(-x)\wedge\mu(0)>r>s$．易见以上讨论是可逆的．

由此便得 $\nu(x)=\mu(x)\wedge\mu(-x)\wedge\mu(0)$． ∎

〔1〕中定理6.13给出了不分明凸集的一个拓扑性质，但它的证明需用〔1〕命题6.12和一个引理，证明较繁，而且涉及欧氏空间的具体特性．现在我们将这个定理推广到诱出不分明拓扑线性空间中，而且证明又大大地简化了．

定理4.9 设（E，$\mathscr{T}$）是拓扑线性空间,（E，$\omega(\mathscr{T})$）是它的诱出空间，μ是E上不分明凸集，则$\bar{\mu}$与$\mathring{\mu}$都是不分明凸集．

证 由引理2.3，对任一$r\in$ I，有$\omega_r(\bar{\mu})=\bigcap\limits_{r<r}\overline{\omega_s(\mu)}$，$\sigma_r(\mathring{\mu})=\bigcup\limits_{s>r}(\sigma_s(\mu))^\circ$.

其中$\omega_s(\mu)$ 与$\sigma_s(\mu)$ 都是E上通常凸集，从而$\overline{\omega_s(\mu)}$ 与 $(\sigma_s(\mu))^\circ$也是凸集．由于任意凸集的交是凸集，所以$\omega_r(\bar{\mu})$ 是凸集，从而$\bar{\mu}$是不分明凸集．由于当$s<s'$时，有 $(\sigma_s(\mu))^\circ\supset(\sigma_{s'}(\mu))^\circ$，因此容易证明$\bigcup\limits_{s>r}(\sigma_s(\mu))^\circ$也是凸集，即$\sigma_r(\mathring{\mu})$ 是凸集，从而$\mathring{\mu}$是不分明凸集． ∎

参 考 文 献

〔1〕R. Lowen, Convex fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 3(1980), 291—310.

〔2〕刘应明，不分明凸集的若干性质，数学物理学报，1981年第二期，218—226.

〔3〕M. D. Weiss, Fixed points, Separation and induced topologies for fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl., 50(1975), 142-150.

〔4〕A. K. Katsaras and D. B. Liu, Fuzzy vector spaces and fuzzy topological vector spaces, J. Math. Anal. Appl., 58(1977), 135—146.

〔5〕吴从炘，Fuzzy拓扑线性空间（Ⅰ），模糊数学，1981年第一期，1—14.

〔6〕王戈平，不分明集的一个分解定理及其在不分明拓扑中的应用，科学通报，1981年第五期，259—262.

〔7〕H. T. Nguyen, A note on extension principle for fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl., 64(1978),

369—380.
〔8〕Wang Geping and Hu Lanfang (王戈平与胡兰芳), On induced fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl., 108(1985), 495—506.
〔9〕L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Contral, 8(1965), 338—353.
〔10〕A. K. Katsaras, Fuzzy topological vector spaces I, Fuzzy Sets and Systems, 6(1981), 85—95.
〔11〕A. E. Taylor, Introduction to Functional Analysis, New York, 1963.
〔12〕裴礼文. 凸Fuzzy集(Ⅰ). 武汉大学学报(自然科学版). 1984年第三期, 13—22.

全国第三届组合数学学术会议定于1987年4月在苏州召开

在全国组合数学与图论专业委员会的支持下，全国第三届组合数学学术会议的筹备会已于一九八六年十月十五日至十六日在苏州大学召开，参加筹备会的有大连工学院、华中工学院、中国科学院合肥分院，华南师范大学和苏州大学的代表共九人，经协商讨论，对筹备工作的有关问题取得如下一致意见：

一、全国第三届组合数学学术会议由大连工学院、华中工学院、中国科学院合肥分院，华南师范大学和苏州大学联合主办。

二、会议时间：一九八七年四月六日至十一日。会议地点：苏州大学。

三、会议规模：暂定代表100人。

四：会议内容：综合报告，宣读论文及研究生教学工作交流。

五、筹备会建议了特邀代表、大会报告及代表的初步名单，并委托苏州大学数学系负责邀请及通知等具体工作。

六、为便于今后开展组合数学的学术交流，筹备会上初步讨论了成立“组合数学研究会”一事，并建议由第三届组合数学学术会议进一步讨论和作出决定。

筹备会希望国内外从事组合数学的同志们与朋友们，积极支持在苏州召开的第三届组合数学学术会议，抓紧写作组合数学论文，并将论文寄至苏州大学数学系组合数学学术会议秘书组收。第三届组合数学学术会议只收组合论论文，要求每篇论文打印100份，供大会交流

关于会议的具体事宜请与苏州大学数学系何大康同志联系

第三届组合数学学术会议秘书组