满足$\forall A_0 \in PA(\vee A_0、\vee(A-A_0) \notin B \to G_{A_0}=\phi)$的可数无穷非原子布尔代数的相对结构以及对可数无穷非原子布尔代数结构的探讨*

梁 朴

（北京工业大学）

摘 要

本文讨论了满足$\forall A_0 \in PA(\vee A_0、\vee(A-A_0) \notin B \to G_{A_0}=\phi)$的可数无穷非原子布尔代数与原子、无原子布尔代数在结构上的关系，给出了任意两个这种类型的布尔代数同构的充要条件，并且对可数无穷非原子布尔代数的结构进行了探讨.

这篇文章是第一篇文章（简称"上文"）：满足$\vee A \in B$的非原子布尔代数的相对结构的续篇. 上文中有些引理，例如：1、2、3、4、5(1)、7、8、9、10、11、12、14、16、18、19等（分别记为引理1.1、1.2、1.3、…等），对于一般的非原子布尔代数都成立（由于它们在证明中没有使用$\vee A \in B$这个条件），因此它们特别地对于现在所讨论的布尔代数也成立. 除此以外我们还要准备一些引理. 本文符号的用法和上文一致. 唯一不同的是现在B表示满足条件$\forall A_0 \in PA(\vee A_0、\vee(A-A_0) \notin B \to G_{A_0}=\phi)$的可数无穷非原子布尔代数. 条件$\forall A_0 \in PA(\vee A_0、\vee(A-A_0) \notin B \to G_{A_0}=\phi)$表示对于所有$A_0 \subseteq A$. 如果$A_0$与$A-A_0$的上确界都不存在则$G_{A_0}$是空集.

一、补充引理部分:

引理2.1 设T_1、T_2分别表示上文和本文所讨论的布尔文代数的条件. I'表示C_0的素理想. 其中C_0表示基数为$\aleph_0$的无原子布尔代数，X表示一基数为$\aleph_0$的集合. $\mathbf{X}=\{\{x\}: x \in X\}$. $A=\{(a, O_C) \in FX \cdot C_0: a \in \mathbf{X}\}$. 其中$O_C$表示$C_0$中最小元. FX表示X的有限、余有限代数. $I=\{(\phi, x) \in FX \cdot C_0: x \in I'\}$，则$A \cup I$在$FX \cdot C_0$中生成的子代数$B_{FX \cdot C_0}(A \cup I)$满足$T_2$但不满足$T_1$.

引理2.2 (1) B(E)是一原子布尔代数； (2) 设$\vee A \in B$. 则$A_{B(E)}=A \cup \{\vee A^*\}$； (3) 设$\vee A \notin B$. 则$A_{B(E)}=A$.

引理2.3 设$\vee A \notin B$，则$E \overset{(L)}{\cong} E' \leftrightarrow B(E) \cong B'(E')$

引理2.4 设$\vee A \notin B$，则$B(G_\phi)$是一无原子布尔代数.

因此当$\vee A \notin B$时G_ϕ是C_0的非主素理想. 可以证明在同构意义下这样的G_ϕ也只有一个.

引理2.5 设I、I'是C_0的任意两个素理想（自然是非主的）. 则$I \overset{(L)}{\cong} I'$.

（证明提示：设X是C_0的生成元自由集，令$Y=(X \cup X^*) \cap I$、$Y'=(X \cup X^*) \cap I'$. 因为$|Y|=|Y'|=\aleph_0$，所以设f_Y是Y到Y'上的任意一个双射. 定义$f_{Y \cup Y^*}$是$Y \cup Y^*$到

*1983年7月28日收到. 推荐者：杨安洲.

$Y' \cup (Y')^*$上的映射满足对于任意$x \in Y \cup Y^*$

$$f_{Y \cup Y^*} = \begin{cases} f_Y(x), & x \in Y; \\ (f_Y(x^*))^*, & x \in Y^*. \end{cases}$$

可以证明$f_{Y \cup Y^*}$是双射．再定义映射f: $C_0 \to C_0$满足对于任意的$x \in C_0$，设$x = \vee_{j=1}^{n} \wedge_{k=1}^{m} x_{jk}$，其中$x_{jk} \in Y \cup Y^*$（上文：引理0.9（1）），$f(x) = \vee_{j=1}^{n} \wedge_{k=1}^{m_j} f_{Y \cup Y^*}(x_{jk})$，则可以证明$f$是双射并且满足$f[I] = I'$.）

引理2.6 $B = \{h_{A_0}(x): A_0 \subseteq A \,\&\, \vee A_0 \in B \,\&\, x \in G_\phi\} \cup \{h^*_{A-A_0}(x): A_0 \subseteq A \,\&\, \wedge A_0^* \in B \,\&\, x^* \in G_\phi\}$.

引理2.7 （1）如果$h^*_{A_0}(x) \geq h^*_{A_1}(y)$，则$x \geq y$；（2）如果$h^*_{A_0}(x) \geq h_{A_1}(y)$，则$x \geq y$.

引理2.8 设$A_1 \subseteq A_0 \subseteq A$，$x$、$y \in G_\phi$，$x^* \geq y$，$\wedge(A - A_0)^*$、$\vee A_1 \in B$，则$h^*_{A_0}(x) \geq h_{A_1}(y)$.

二、定理Ⅰ与定理Ⅱ的证明

定理Ⅰ 任意两个满足$\forall A_0 \in PA(\vee A_0$、$\vee(A - A_0) \notin B \to G_{A_0} = \phi)$的可数无穷非原子布尔代数B、B′同构的充要条件是它们的子集E、E′格同构．即

$$B \cong B' \Leftrightarrow E \overset{(L)}{\cong} E'.$$

证明 ⇒：设$B \cong B'$，f是其同构函数，只要证明$f[E] = E'$即可，证明与上文相同．

⇐：设$E \overset{(L)}{\cong} E'$，$g$是其同构函数．根据引理2.6

$B = \{h_{A_0}(x): A_0 \subseteq A \,\&\, \vee A_0 \in B \,\&\, x \in G_\phi\} \cup \{h^*_{A-A_0}(x): A_0 \subseteq A \,\&\, \wedge A_0^* \in B \,\&\, x^* \in G_\phi\}$，

$B' = \{h'_{A_0'}(x'): A_0' \subseteq A' \,\&\, \vee A_0' \in B' \,\&\, x' \in G'_\phi\} \cup \{(h'_{A'-A_0'})^*(x'): A_0' \subseteq A' \,\&\, \wedge(A_0')^* \in B' \,\&\, (x')^* \in G'_\phi\}$

由于$E \overset{(L)}{\cong} E'$，所以$\vee A \in B \Leftrightarrow \vee A' \in B'$，当$\vee A \in B$时，$G_\phi$与$C_0$格同构（引理1.13、1.10），得$G_\phi \cong G'_\phi$（上文引理0.8），当$\vee A \notin B$时$G_\phi$是$C_0$的素理想（引理2.4、1.10），亦得$G_\phi \overset{(L)}{\cong} G'_\phi$（引理2.5）．令$f_\phi$表示$G_\phi$到$G'_\phi$上的同构，定义映射（是映射下面要证明）$f$: $B \to B'$满足对于任意$z \in B$

$$f(z) = \begin{cases} h'_{g[A_0]}(f_\phi(x)), & z = h_{A_0}(x); \\ (h'_{g[A_0]})^*((f_\phi(x^*))^*), & z = h^*_{A_0}(x). \end{cases}$$

（根据引理1.9，不难验证以上定义是合理的，例如当$z = h_{A_0}(x)$时，$h'_{g[A_0]}(f_\phi(x))$是存在的）则

1 f是映射：设$z_0 = z_1 \in B$，分以下三种情形讨论：a）$z_0 = h_{A_0}(x)$、$z_1 = h_{A_1}(y)$，其中A_0、$A_1 \subseteq A$，x、$y \in G_\phi$，$\vee A_0$、$\vee A_1 \in B$．因为$z_0 = z_1$，根据引理1.14，诸G_{A_0}（$A_0 \subseteq A$）两两互不相交，得$A_0 = A_1$，因此$\vee A_0 = \vee A_1$．$\vee(g[A_0]) = g(\vee A_0) = g(\vee A_1) = \vee(g[A_1])$（引理1.9），再根据引理1.16，诸$h_{A_0}$（$A_0 \subseteq A$）是格同构，特别地$h_{A_0} = h_{A_1}$是格同构，得$x = y$（引理0.4（2），上文），因此$f_\phi(x) = f_\phi(y)$，$h'_{g[A_0]}(f_\phi(x)) = (\vee(g[A_0])) \vee f_\phi(x) = (\vee(g[A_1])) \vee f_\phi(y) = h'_{g[A_1]}(f_\phi(y))$，即$f(z_0) = f(z_1)$．b）$z_0 = h^*_{A_0}(x)$、$z_1 = h^*_{A_1}(y)$，这是a）的对偶情况，在这种情况下也能得到$f(z_0) = f(z_1)$的结论，证明略．c）$z_0 = h^*_{A_0}(x)$、$z_1 = h_{A_1}(y)$，假设中包含$x \in G^*_\phi$、$y \in G_\phi$以及$\wedge(A - A_0)^*$、$\vee A_1 \in B$，由$\wedge(A - A_0)^* \in B$得$\vee(A - A_0) \in B$（上文：引理0.2（1）），再由条件$z_0 = z_1$得$A_0 = A_1$（引理

1.16、1.9)，因此 $(\wedge(A-A_0)^*)\wedge x=(\vee A_1)\vee y=(\vee A_0)\vee y$，用 $\vee(A-A_0)$ 与后一等式作并得 $x=(\vee A)\vee y=h_A(y)$(引理1.4(1))，再根据 f 的定义得 $(f_\phi(x^*))^*=f(x)=f(h_A(y))=h'_{g[A]}(f_\phi(y))=h'_{A'}(f_\phi(y))$，所以 $f(z_0)=(h'_{g[A_0]})^*((f_\phi(x^*))^*)=(h'_{g[A_0]})^*(h'_{A'}(f_\phi(y)))=(\wedge(A'-g[A_0])^*)\wedge((\vee A')\vee f_\phi(y))=(\vee(g[A_0]))\vee f_\phi(y)=h'_{g[A_0]}(f_\phi(y))=f(z_1)$.

② f 是双射：由于 f_ϕ 与 g 是格同构，它们的逆映射也都是格同构，在上面①的证明中把B、B′的位置对调，f_ϕ、g 分别替换成 f_ϕ^{-1}、g^{-1}，则可得到B′到B上的映射 f^{-1}，满足对于任意 $x\in B$，$f^{-1}(f(x))=x$. 这说明 f 是双射（上文：引理0.7）.

③ f 保序：设 $z_0\geq z_1\in B$，分以下四种情况讨论：a) $z_0=h_{A_0}(x)$、$z_1=h_{A_1}(y)$，假设中包含 $\vee A_0$、$\vee A_1\in B$，证明与上文定理充分性部分③相仿，可得 $f(z_0)\geq f(z_1)$. b) $z_0=h^*_{A_0}(x)$、$z_1=h^*_{A_1}(y)$，这是上面a) 的对偶情形，在这种情形下也能得到 $f(z_0)\geq f(z_1)$ 证明略. c) $z_0=h^*_{A_0}(x)$、$z_1=h_{A_1}(y)$，假设中包含 $x\in G^*_\phi$、$y\in G_\phi$. $\wedge(A-A_0)^*$、$\vee A_1\in B$，根据引理1.9

$$\wedge(A'-g[A_0])^*、\vee g[A_1]\in B', \tag{1}$$

条件 $z_0\geq z_1$ 即

$$h^*_{A_0}(x)\geq h_{A_1}(y), \tag{2}$$

由 (2) 根据引理2.7(2) 得 $x\geq y$，因此 $x^*\wedge y=0$（上文：引理0.1）. 由于 f_ϕ 是格同构，保持并、交运算又得（注意 x^*、$y\in G_\phi$）

$$f_\phi(x^*)\wedge f_\phi(y)=0$$

因此

$$(f_\phi(x^*))^*\geq f_\phi(y) \quad (\text{上文引理}0.1) \tag{3}$$

再由 (2) 根据引理1.19得

$$A_0\supseteq A_1,$$

由于 g 是格同构，所以又得

$$g[A_0]\supseteq g[A_1], \tag{4}$$

再根据引理2.8，由 (1)、(3)、(4) 得

$$(h'_{g[A_0]})^*((f_\phi(x^*))^*)\geq h'_{g[A_1]}(f_\phi(y))，\text{即 } f(z_0)\geq f(z_1).$$

d) $z_0=h_{A_0}(x)$、$z_1=h^*_{A_1}(y^*)$，假设中包含 x、$y\in G_\phi$ $\vee A_0$、$\wedge(A-A_1)^*\in B$，因此它们的余，特别地 $\wedge(A-A_1)^*$ 的余 $\vee(A-A_1)$ 也属于B. 由条件 $z_0\geq z_1$ 即 $(\vee A_0)\vee x\geq\wedge(A-A_1)^*\wedge y^*$. 两边用 $\vee(A-A_1)$ 作并得 $(\vee((A-A_1)\cup A_0))\vee x\geq y^*$（引理1.4），因为 $y^*\in G^*_\phi$. 所以由最后这个不等式得 $(A-A_1)\cup A_0=A$，并且 $A_0\supseteq A_1$，$g[A_0]\supseteq g[A_1]$. 再用 $\wedge A^*$ 与不等式 $(\vee((A-A_1)\cup A_0))\vee x\geq y^*$ 作交得 $x\geq(\wedge A^*)\wedge y^*=h^*_\phi(y^*)$. 由于 f_ϕ 是 G_ϕ 到 G'_ϕ 的格同构，保序并且 x、$h^*_\phi(y^*)\in G_\phi$，由最后这个不等式得 $f_\phi(x)\geq f_\phi(h^*_\phi(y^*))=f(h^*_\phi(y^*))=(h'_{g[\phi]})^*((f_\phi(y))^*)=(h'_\phi)^*((f_\phi(y))^*)$，因此

$$\begin{aligned} f(z_0)&=h'_{g[A_0]}f_\phi(x)\geq h'_{g[A_0]}((h'_\phi)^*((f_\phi(y))^*))\\ &=(\vee g[A_0])\vee(\wedge(A')^*\wedge(f_\phi(y))^*)=\wedge(A'-g[A_0])^*\wedge(f_\phi(y))^*\\ &\geq\wedge(A'-g[A_1])^*\wedge(f_\phi(y))^*=(h'_{g[A_1]})^*((f_\phi(y))^*)=f(z_1). \end{aligned}$$

根据上文引理0.3(1)，由以上②、③结果得 f 是B到B′上的同构，因此 $B\cong B'$.

三、几个推论

1．非原子布尔代数 B的理论是$\aleph_0$范畴的充要条件是 B具有有限个原子．

2．设$\lambda_B=|\hat{B}_0|$，$\lambda_D=\sum_{0\leqslant m\leqslant\omega}\aleph_0|\hat{D}_m|$．其中$\hat{B}_0$、$D_m$的意义与上文同（推论 4）．则$\lambda_B=\lambda_D$．

3．（1）设$\vee A\in B$，则$B\cong E(B)\cdot C_0$；

（2）设$\vee A\notin B$，则$B\cong B_{B(E)\cdot C_0}(E\cup I)$，其中符号 E与 I是对$B(E)\cdot C_0$而言的．

4．设 B是任意的非原子布尔代数，满足条件$\forall A_0\in PA(\vee A_0、\vee(A-A_0)\notin B\rightarrow G_{A_0}=\phi)$并且当$\vee A\notin B$时$B(G_\phi)$是自由布尔代数．则

$$B\cong B'\Leftrightarrow E\overset{(L)}{\cong}E'\ \&\ |G_\phi|=|G'_\phi|.$$

四、对可数无穷非原子布尔代数结构的探讨

对于一般的可数无穷非原子布尔代数，定理 1的条件不必满足，现在我们来考虑使定理 1的条件：$\forall A_0\in PA(\vee A_0、\vee(A-A_0)\notin B\rightarrow G_{A_0}=\phi)$不满足的那些子集$G_{A_0}$的情况．我们的结论是：

定理 2 任意两个满足条件$\vee A_0、\vee(A-A_0)\notin B(\vee A'_0、\vee(A'-A'_0)\notin B)$其中$A_0\subseteq A(A'_0\subseteq A)$的非空子集$G_{A_0}$、$G'_{A'_0}$格同构．

证明 容易证明$B(G_{A_0})=G_\phi\cup G_{A_0}\cup G^*_{A_0}\cup G^*_\phi$是一可数无穷非原子布尔代数．只要再证明存在一生成元自由集 Y满足$Y\subseteq G_{A_0}$则结论明显．下面我们用有限归纳法来证明这一事实．由$|B(G_{A_0})|=\aleph_0$得$|G_{A_0}|=\aleph_0$．因此可设$G_{A_0}=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots\}$其中$n$是自然数．当$k=1$时取$Y=\{x_1\}$，则$|B(Y)|=4=2^{2^1}$是一自由布尔代数，并且$x_1\in B(Y)$．假设对于$k=n$，存在有限$Y_n$，使$B(Y_n)$是一自由布尔代数，并且$x_1, \cdots, x_n\in B(Y_n)$．当$k=n+1$时，令 A是$B(Y_n)$的全部原子集，$A=\{a_i: i\in I\}$，其中I（有限）是原子的指标集．根据$x_{n+1}$与原子的序关系，I分类成$I=I_0\cup I_1\cup I_2$满足$\forall i\in I_0(a_i\wedge x_n=a_i)\ \&\ \forall i\in I_1(0<a_i\wedge x_n<a_i)\ \&\ \forall i\in I_2(a_i\wedge x_n=0)$．对于任意$i\in I_0$（不妨设$x_n\in G_{A_0}$）．由于$\vee A_0\notin B$知存在$a_{i1}\in G_{A_0}$满足$0<a_{i1}<a_i$．对于任意$i\in I_2$，由于$\vee(A-A_0)\notin B$（这时由$a_i\wedge x_n=0$知$a_i\in G^*_{A_0}$）不难验证存在$a_{i1}\in G_\phi$使$0<a_{i1}<a_i$．令$y=\vee(\{a_{i1}: i\in I_0\}\cup\{a_i\wedge x_n: i\in I_1\}\cup\{a_{i1}: i\in I_2\})$则$B(Y\cup\{y\})$的原子个数比$B(Y)$正好增加一倍．因此$|B(Y\cup\{y\})|=|B(Y)|^2$，$B(Y\cup\{y\})$是自由布尔代数并且$x_n=\vee(\{a_i: i\in I_0\}\cup\{a_i\wedge x_n: i\in I_1\})$其中$a_i(i\in I_0)$，$a_i\wedge x_n(i\in I_1)$都是$B(Y\cup\{y\})$中元．（证毕）

但是可惜的是这些G_{A_0}的同构在整体上不具备定理 1中所讨论的那些G_{A_0}的优良性质．即不存在这样一簇同构映射，这一簇同构映射把每一个G_{A_0}都映射到一个固定的G_{A_0}上（在定理 1中这个固定的G_{A_0}是G_ϕ）并且在映射的过程中保序（对照定理 1中的G_{A_0}即对于任意$A_0\subseteq A_1\subseteq A$，$x、y\in G_\phi$有$h_{A_0}(x)\leq h_{A_1}(y)\Leftrightarrow A_0\subseteq A_1\ \&\ x\leq y$，其中$h_{A_0}(A_0\subseteq A)$是那簇同构映射）．

最后衷心地感谢杨安洲副教授对本文所作的指导．