数学研究与评论
第七期　第一卷

关于外斜互质性的两个定理*

齐寅峰　涂荟生
（南开大学）

众所周知，多项式矩阵的外斜互质概念是近年来发展起来重要概念之一，它在多变量线性系统的调节器问题中起着重要的作用.

本文将讨论外斜互质与外斜公因二概念之间的关系以及内斜互质对的通解形式.

§1　外斜互质与外斜公因

令$R[s]^{n\times n}$表示$n\times n$多项式矩阵的全体.

定义1　设$R(s)$，$N(s)\in R[s]^{n\times n}$，如果存在$X(s)$，$Y(s)\in R[s]^{n\times n}$，使

$$R(s)X(s)+Y(s)N(s)=I \tag{1}$$

则称$R(s)$和$N(s)$为外斜互质．这时称$X(s)$和$Y(s)$是一内斜互质对．

定义2　称$D(s)\in R[s]^{n\times n}$，是$R(s)$和$N(s)$的一个外斜公因，（$N(s)$和$R(s)$的一个内斜公因），如果

$$R(s)=D(s)R_0(s),\quad N(s)=N_0(s)D(s) \tag{2}$$

其中$R_0(s)$，$N_0(s)\in R[s]^{n\times n}$.

因为对任何$R(s)$，$N(s)\in R[s]^{n\times n}$都存在单位模阵$D(s)$满足（2）式．因而这样的外斜公因无多大意义．以后我们排除$D(s)$是单位模阵的情况．即在上述定义中，限制$\det D(s)\neq C$.

多项式矩阵的左（右）互质和左（右）公因是熟知的概念．设$P(s)$，$Q(s)\in R[s]^{n\times n}$，称$P(s)$和$Q(s)$左（右）互质，如果存在$X(s)$，$Y(s)\in R[s]^{n\times n}$，使得

$$P(s)X(s)+Q(s)Y(s)=I \tag{3}$$

$$(X(s)P(s)+Y(s)Q(s)=I) \tag{3'}$$

如果存在$D(s)\in R[s]^{n\times n}$，使

$$P(s)=D(s)P_1(s),\quad Q(s)=D(s)Q_1(s) \tag{4}$$

$$(P(s)=P_1(s)D(s),\quad Q(s)=Q_1(s)D(s)) \tag{4'}$$

则称$D(s)$为$P(s)$和$Q(s)$的一个左（右）公因，同样也假定$\det D(s)\neq C$.

我们知道：$P(s)$和$Q(s)\in R[s]^{n\times n}$为左（右）互质的一个充分必要条件是它们没有左（右）公因．即左（右）互质和不存在左（右）公因二概念是等价的．自然发生这样的问题：外斜互质与外斜公因两个概念之间的关系如何？有无类似的结果？

* 1983年9月2日收到.

例 1　考虑 $R(s)=N(s)=\begin{bmatrix}1 & -s\\ s & -1\end{bmatrix}$．显然$R(s)$自身是$R(s)$和$N(s)$的一个外斜公因，但是$R(s)$和$N(s)$是外斜互质的，因为：令$X(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$Y(s)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，显然 $R(s)X(s)+Y(s)N(s)=1$．

例 1 说明外斜互质与无外斜公因并不等价．如何判断已知二多项式阵是外斜互质的问题，文献[1,3]有许多讨论，这里只考虑外斜互质与外斜公因二概念的连系．值得注意的是，外斜公因无“最大”可言，因为如果$D(s)=D_1(s)D_2(s)$ 是$R(s)$和$N(s)$的一个外斜公因，除非 $D_1(s)$ 和$D_2(s)$ 乘法可交换，否则 $D_1(s)$ 和$D_2(s)$都未必是$R(s)$和$N(s)$的外斜公因．

定理 1　$R(s)$和$N(s)\in R[s]^{n\times n}$有外斜公因的一个充分必要条件是 $R(s)$和$N(s)$的最小多项式有公因式．

证明　首先证明，$R(s)$和$N(s)$有外斜公因的一个充分必要条件是

$$\overline{R}(s)=U(s)R(s)V(s) \quad 和 \quad \overline{N}(s)=W(s)N(s)T(s) \tag{5}$$

有外斜公因，其中$U(s)$,$V(s)$，$W(s)$，$T(s)$ 都是单位模阵．通过计算可知，若$D(s)$是$R(s)$和$N(s)$的一个外斜公因，则$\overline{D}(s)=U(s)D(s)T(s)$是$\overline{R}(s)$和$\overline{N}(s)$的一个外斜公因．反之，利用（5）式，知若$\overline{R}(s)$和$\overline{N}(s)$有外斜公因$\overline{D}(s)$，则$R(s)$和$N(s)$有外斜公因 $D(s)=U^{-1}(s)\overline{D}(s)T^{-1}(s)$．

因而我们可以假定$R(s)$和$N(s)$都是Smith 形：

$$R(s)=\begin{bmatrix}r_1(s) & & & \\ & r_2(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & r_n(s)\end{bmatrix}, \quad N(s)=\begin{bmatrix}n_1(s) & & & \\ & n_2(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & n_n(s)\end{bmatrix}, \tag{6}$$

其中 $r_i(s)\mid r_{i+1}(s)$，$n_i(s)\mid n_{i+1}(s)$，$i=1,\cdots,n-1$．只须对Smith 形证明上述结论．

充分性：由假设，知 $r_n(s)$，$n_n(s)$有公因子$d(s)$，那末显然$R(s)$和$N(s)$有外斜公因因$D(s)$：

$$D(s)=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & d(s)\end{bmatrix}_{n\times n}. \tag{7}$$

必要性：若$R(s)$和$N(s)$有外斜公因$D(s)$，由定义可知，$\det R(s)$和$\det N(s)$有公因式．从而$R(s)$的最小多项式$r_n(s)$和$N(s)$的最小多项式$n_n(s)$有公因式．

我们有以下推论：

系 1　$R(s)$和$N(s)$有外斜公因的一个充分必要条件是 $\det R(s)$和$\det N(s)$有公因子．

这因为$r_n(s)$和$n_n(s)$有公因子，其充分必要条件是 $\det R(s)=r_1(s)\cdots r_n(s)$和

$\det N(s)=n_1(s)\cdots n_n(s)$ 有公因子．

系 2 若$R(s), N(s)\in \mathrm{R}[s]^{n\times n}$不左（右）互质，则必有外斜公因．即若$R(s)$和$N(s)$有左公因或右公因，则必有外斜公因．

这因为若$R(s)$和$N(s)$不左（右）互质，则其行列式必有公因子．

但是，即使 $R(s)$ 和$N(s)$ 既左又右互质，也可能有外斜公因．

例 2 考虑$R(s)=\begin{pmatrix}1 & s\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$N(s)=\begin{pmatrix}s & 1\\ 0 & s-1\end{pmatrix}$，$\det R(s)=s$，$\det N(s)=s(s-1)$．由上定理知有外斜公因．由于

$$\operatorname{rank}[R(0)\ \vdots\ N(0)]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=2,\quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix}R(0)\\ \cdots\cdots\\ N(0)\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=2.$$

可知$R(s)$和$N(s)$左、右互质，但可验证，$R(s)$和 $N(s)$ 不外斜互质．我们求出 $R(s)$ 和 $N(s)$ 的外斜公因，化$R(s)$ 和 $N(s)$ 为Smith 形：

$$R(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\equiv \overline{U}(s)\overline{R}(s)\overline{V}(s),$$

$$N(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ s-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s(1-s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\equiv \overline{W}(s)\overline{N}(s)\overline{T}(s).$$

而$\overline{R}(s)$和$\overline{N}(s)$有外斜公因$\overline{D}(s)$：$\overline{D}(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}$，则$R(s)$和$N(s)$有外斜公因

$$D(s)=\overline{U}(s)\overline{D}(s)\overline{T}(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2s & 1\\ s & 1\end{bmatrix}.$$ 事实上，

$$R(s)=\begin{bmatrix}1 & s\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2s & 1\\ s & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 1\\ 1 & -s\end{bmatrix}\equiv D(s)R_0(s),$$

$$N(s)=\begin{bmatrix}s & 1\\ 0 & s-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1-s & 2(s-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2s & 1\\ s & 1\end{bmatrix}\equiv N_0(s)D(s).$$

系 3 若方阵$R(s)$和$N(s)$不外斜互质，则必有外斜公因．换言之，若$R(s)$，$N(s)$无外斜公因，则必为外斜互质．

这因为由文献〔3〕可知，若$\det R(s)$和 $\det N(s)$ 互质，则$R(s)$和$N(s)$必外斜互质．

至此，外斜互质与外斜公因二概念之间的关系已经完全明了，同时也搞清楚了外斜公因与左（右）公因之间的连系．如例2所示，定理1指示了求外斜公因的方法．关于内斜公因有类似的结果．不言自明，上述讨论中假定了$R(s)$和$N(s)$都是非异的．以上结果，原则上可以推广到长方阵的情形上去．

§ 2 内斜互质对的通式

我们考虑多项式矩阵方程．假定$X_0(s)$和$Y_0(s)$满足

$$R(s)X_0(s)+Y_0(s)N(s)=I \tag{8}$$

称 $X_0(s)$ 和$Y_0(s)$ 为一内斜互质对。我们下面要讨论所有内科互质对的形式。

定理2 设 $R(s), N(s)\in R[s]^{n\times n}$，非异。若$X_0(s), Y_0(s)\in R[s]^{n\times n}$满足（8）式，则（1）式的通解$X(s), Y(s)\in R[s]^{n\times n}$为

$$X(s)=X_0(s)-\frac{1}{a(s)}Z(s)N(s),\quad Y(s)=Y_0(s)+\frac{1}{a(s)}R(s)Z(s), \tag{9}$$

其中$a(s)$是 det $R(s)$ 和 det $N(s)$ 的最大公因式，$Z(s)\in R[s]^{n\times n}$是使$\frac{1}{a(s)}Z(s)N(s)$ 和 $\frac{1}{a(s)}R(s)Z(s)$ 都是多项式矩阵的任何多项式阵。

证明 若$X(s), Y(s)\in R[s]^{n\times n}$满足（9）式，则显然是（1）式的解。

现设$X(s), Y(s)\in R[s]^{n\times n}$是（1）的任一解，由（8）式，可得

$$R(s)(X_0(s)-X(s))=(Y(s)-Y_0(s))N(s).$$

注意到$R(s)$，$N(s)$的非异性，上式等价于

$$R^{-1}(s)(Y(s)-Y_0(s))=(X_0(s)-X(s))N^{-1}(s),$$

即

$$\frac{R^{+}(s)}{\det R(s)}(Y(s)-Y_0(s))=(X_0(s)-X(s))\frac{N^{+}(s)}{\det N(s)}$$

令$a(s)$表示 det $R(s)$ 和 det $N(s)$ 的最大公因式：det $R(s)=a(s)r_0(s)$，det $N(s)=a(s)n_0(s)$，而$r_0(s)$ 和$n_0(s)$ 互质，由上式得出

$$\frac{R^{+}(s)}{r_0(s)}(Y(s)-Y_0(s))=(X_0(s)-X(s))\frac{N^{+}(s)}{n_0(s)}. \tag{10}$$

注意（10）式双方都是有理分式阵，但分母$r_0(s)$和$n_0(s)$ 互质，得到双方必均为多项式阵，令其为$Z(s)$，故

$$\frac{Z(s)}{a(s)}=R^{-1}(s)(Y(s)-Y_0(s)) \tag{11}$$

$$\frac{Z(s)}{a(s)}=(X_0(s)-X(s))N^{-1}(s) \tag{12}$$

（11）式左乘以$R(s)$，（12）式右乘以$N(s)$，便得出：

$$Y(s)=Y_0(s)+\frac{R(s)Z(s)}{a(s)},\quad X(s)=X_0(s)-\frac{Z(s)N(s)}{a(s)} \tag{13}$$

即（9）式，证完。

本定理是W．A．Wolovich[1]的推广。

参 考 文 献

〔1〕W. A. Wolovich. Skew Prime Polynomial Matrices. IEEE. Trans. AC－23. No.5. 1978.

〔2〕韩京清，多变量控制系统理论，中国科学院系统科学研究所，1980，6．

〔3〕涂菶生，齐寅峰，多项式矩阵的外斜互质性与多变量系统的输出调节问题．数学年刊．1A（1）．1983．