1987年2月

数学研究与评论
第七卷 第一期

半单紧Lie群上Fourier级数临界阶的Riesz球形平均*

范 大 山
(安徽大学)

§1 引 言

本文讨论了半单紧Lie群上Fourier级数临界阶的Riesz球形平均. 文中所用记号均同〔1〕.

设G是n维紧半单连通Lie群, G_0是G的换位子子群, R^+表示全体正根, m是正根的个数. T是G的l维极大环群, 则$n=2m+l$. Q是T的基本积分区域. G上可积函数$f(x)$的Fourier级数的Riesz球形平均为[1]

$$S_R^\delta(f, x)=\sum_{|\lambda+\beta|\le R}\left(1-\frac{(\lambda+\beta, \lambda+\beta)}{R^2}\right)^\delta d_\lambda\chi_\lambda * f(x), \quad \delta\ge 0.$$

Clere在〔1〕中(定理3)证明了: 如$f\in C(G)$, 则$\lim\limits_{R\to\infty}\delta_R^\delta(f, x)=f(x)$, 但$\delta$大于$\frac{n-1}{2}$. 我们在本文中指出, 在Clere的定理中, 条件$\delta>\frac{n-1}{2}$不仅是充分的, 而且还是必要的. 因此讨论临界阶$\delta_0=\frac{n-1}{2}$的Riesz球平均的收敛问题, 自然是感兴趣的, 这就是本文的主要目的.

§2 临界阶$\frac{n-1}{2}$

设任意$x, y\in G$, 则存在$P\in G$, $t\in T$, 使得$P^{-1}xy^{-1}P=t$. 现给出G上一个度量为: $d(x, y)=\tilde{d}(t, e)$, (其中$\tilde{d}$为T上的欧氏距离, e为G的么元). 由于环群的性质, 易证上述度量是合理的. 于是有如下连续模的定义.

定义 设f是G上的连续函数, 则$\tilde{\omega}(f, \delta)=\sup\limits_{\tilde{d}(x,y)\le\delta}\{|f(x)-f(y)|\}$. 显然当$\delta\to 0^+$时, $\tilde{\omega}(f, \delta)\to 0^+$.

于是就有

定理1 对任意$f\in C(G)$, $\lim\limits_{R\to\infty}S_R^\delta(f, x)=f(x)$, 关于$x\in G$一致成立的充要条件是$\delta>\frac{n-1}{2}$. 对$f\in \mathrm{Lip}\,p$, $1\ge p>0$, 则$|S_R^{\delta_0}(f, x)-f(x)|=O(R^{-p}\log R)$, $\delta_0=\frac{n-1}{2}$.

为证明定理1, 首先证明几个引理:

引理1 $\|S_R^{\delta_0}\|_1=A_n\log R+O(1)$ $(R\to\infty)$, 其中$A_n=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\frac{|C|}{mQ}\int_\sigma\prod\limits_{a\in R^+}(a, \eta)^2d\sigma_\eta$是大于0的常数. ($mQ$表示$Q$的体积, η是Q中的单位向量, σ是Q中单位球面, $d\sigma_\eta$是σ的体积元, C是〔1〕定理2中已知常数)

证 容易看出, 〔1〕定理2对$\delta=\delta_0$也成立. 因此

$$S_R^{\delta_0}(\exp H)=CR^n\prod_{a\in R^+}\frac{(a, H)}{\sin\frac{(ia, H)}{2}}(R|H|)^{-n+1/2}J_{n-1/2}(R|H|)+O(1).$$

于是

* 1983年4月13日收到.

$$\|S^{\delta}_{R}\|_1=\frac{1}{mQ}\int_{Q}|S^{\delta}_{R}(\exp H)|\,|D(\exp H)|^2\mathrm{d}H+O(1)$$
$$=\frac{2^m|C|}{mQ}\int_{Q}R^n\left|\prod_{a\in R^+}(a,\ H)\sin\frac{(ia,\ H)}{2}(R|H|)^{-n+\frac{1}{2}}J_{n-\frac{1}{2}}(R|H|)\right|\mathrm{d}H+O(1)$$
$$=\frac{2^m|C|}{mQ}\left(\int_{Q-B(0,\ r)}+\int_{B(0,\ r)}\right)+O(1)=2^m|C|/mQ\,(J+I)+O(1),$$
其中r是任意固定的正常数，$B(0,\ r)=\{H\in Q,\ |H|\le r\}$。由Bessel函数性质易知：$J=O(1)$。

现令$\eta=H/|H|$，在Q中选取适当坐标即有：

$$I=\int_0^r R^{1/2}t^{l-n-1/2}|J_{n-1/2}(Rt)|\int_{\sigma}\left|\prod_{a\in R^+}(a,\ t\eta)\sin\frac{(ia,\ t\eta)}{2}\right|\mathrm{d}\sigma_\eta\mathrm{d}t=\int_0^{1/R}+\int_{1/R}^{r}=I_1+I_2.$$
其中，$I_1=O\left(\int_0^{1/R}R^{1/2}t^{-1/2}\mathrm{d}t\right)=O(1)$。（由于$n-2m=l$）。再注意

$$\int_{\sigma}\left|\prod_{a\in R^+}(a,\ t\eta)\sin\frac{(ia,\ t\eta)}{2}\right|\mathrm{d}\sigma_\eta=t^{2m}/2^m\int\prod_{a\in R^+}(a,\ \eta)^2\mathrm{d}\sigma_\eta+O(t^{2m+1}),\quad t\to 0\text{ 以及}$$
$$\int_{1/R}^{r}R^{1/2}t^{l-n+2m+1/2}|J_{n-1/2}(Rt)|\,\mathrm{d}t=O(1).$$
因此适当选取r后就有：

$$I_2=2^{-m}\int_{1/R}^{r}R^{1/2}t^{-1/2}|J_{n-1/2}(Rt)|\,\mathrm{d}t\int_{\sigma}\prod_{a\in R^+}(a,\ \eta)^2\mathrm{d}\sigma_\eta+O(1)$$
把关系式：

$$J_{n-1/2}(Rt)=(2/\pi)^{1/2}(Rt)^{-1/2}\sin\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right)+O(R^{-3/2}t^{-3/2})$$
代入I_2，计算后就有：

$$I_2=2^{-m}(2/\pi)^{1/2}\int_{\sigma}\prod_{a\in R^+}(a,\ \eta)^2\mathrm{d}\sigma_\eta\int_{1/R}^{r}t^{-1}\left|\sin\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right)\right|\mathrm{d}t+O(1)$$
$$=2^{-m}\int_{\sigma}\prod_{a\in R^+}(a,\ \eta)^2\mathrm{d}\sigma_\eta(2/\pi)^{3/2}\log R+O(1).$$
综合起来就是

$$\|S^{\delta}_{R}\|_1=(2/\pi)^{3/2}\frac{|C|}{mQ}\int_{\sigma}\prod_{a\in R^+}(a,\ \eta)^2\mathrm{d}\sigma_\eta\log R+O(1)\quad(R\to\infty).$$
而由正根性质知$\int_{\sigma}\prod_{a\in R^+}(a,\ \eta)^2\mathrm{d}\sigma_\eta>0$是显然的，引理1证完。■

引理2 当$\delta>\frac{n-1}{2}$，$f(x)\in \mathrm{Lip}\,p$，$0<p\le\delta-\frac{n-1}{2}$，则$\max\limits_{x\in G}|S^{\delta}_{R}(f,\ x)-f(x)|=O(R^{-p})$，$R\to\infty$。

证 令$\psi_x(H)=\frac{1}{mG_0}\int_{G_0}\{f(yx)-f(x)\}[\dot{g}_0]$，（$[\dot{g}_0]$是$G_0$的体积元，$mG_0$是$G_0$的体积），于是由［1］定理2易知：

$$|S^{\delta}_{R}(f,\ x)-f(x)|=O\left(\int_{Q}S^{\delta}_{R}(\exp H)\psi_x(H)|D(H)|^2\mathrm{d}H\right)+O\left(\frac{1}{R}\right)=$$
$$O\left(R^n\left\{\int_{B(0,\ 1/R)}+\int_{Q-B(0,\ 1/R)}\right\}\prod_{a\in R^+}\frac{(a,\ H)}{\sin\frac{(ia,\ H)}{2}}(R|H|)^{-n/2-\delta}J_{n/2+\delta}(R|H|)|D(H)|^2\psi_x(H)\right)$$

$O(R^{(n-1)/2-\delta})+J_1+J_2+O(R^{(n-1)/2-\delta})$

其中$J_1=O(R^{n-p}\int_{|H|\leq 1/R}\prod_{a\in R^+}(a,\ H)^2\mathrm{d}H)=O(R^{n-p}\int_{|H|\leq 1/R}\prod_{a\in R^+}(|a||H|)^2\mathrm{d}H)=O(R^{-p})$.

而$J_2=O(R^{(n-1)/2-\delta}\int_{Q-B(0,1/R)}|H|^{-n/2-1/2-\delta+2m}|\psi_x(H)|\mathrm{d}H)=O(R^{-p})$.

综合起来就是$|S_R^{\delta}(f,\ x)-f(x)|=O(R^{-p})$，但上式是对$x\in G$一致的，于是引理2证完．

引理3 当$0\leq\delta\leq\frac{n-1}{2}$时，$S_R^{\delta}(f,\ x)$是$C(G)$上的无界线性算子序列．

证 显然只需证明无界性．利用［3］引理1.1以及定理2.1，就有关系式：

$$\|S_R^{\delta_0}\|_1=\mathrm{const}\int_G\Big|\sum_{|\lambda+\beta|\leq R}\Big(1-\frac{|\lambda-\beta|^2}{R^2}\Big)^{(n-1)/2}d_\lambda\chi_\lambda(x)\Big|\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{const}\int_G\Big|\sum_{|\lambda+\beta|\leq R}d_\lambda\chi_\lambda(x)\int_{|\lambda+\beta|^2/R^2}^{\infty}\Big(S-\frac{|\lambda+\beta|^2}{R^2}\Big)^{\delta}\mathrm{d}e^{(\delta)}(s)\Big|\mathrm{d}x,$$ 其中

$e(t)=\{\max(1-t,\ 0)\}^{(n-1)/2}$.

交换求和及积分次序，就有

$$\|S_R^{\delta_0}\|_1\leq\mathrm{const}\int_0^{\infty}|S^{\delta}\mathrm{d}e^{(\delta)}(s)|\int_G\Big|\sum_{|\lambda+\beta|^2\leq R^2S}\Big(1-\frac{|\lambda+\beta|^2}{R^2S}\Big)^{\delta}d_\lambda\chi_\lambda(x)\Big|\mathrm{d}x$$

$$\leq\mathrm{const}\int_0^1|S^{\delta}\mathrm{d}e^{(\delta)}(s)|\,\|S_{R\sqrt{s}}^{\delta}\|_1\leq\mathrm{const}\,\|S_{R\sqrt{s}}^{\delta}\|_1.$$

因此，如果$S_R^{\delta}(f,x)$是有界算子列，就必须$S_R^{\delta_0}(f,\ x)$也是有界算子，这和引理1矛盾．■

现在来完成定理1的证明：定理前一部分的必要性由引理1，3及Banach定理就得到，而充分性已包含在引理2的证明过程中．

为证定理后一部分，在引理2中取$\delta=\frac{n+1}{2}$，于是$|S_R^{\delta}(f,\ x)-f(x)|=O(R^{-p})$．从而

$$|S_R^{\delta_0}(f,\ x)-f(x)|\leq|S_R^{\delta_0}(f,\ x)-S_R^{\delta_0}(S_R^{(n-1)/2},x)|+|S_R^{\delta_0}(S_R^{(n-1)/2},x)-S_R^{\delta}(f,\ x)|+O(R^{-p})$$

$$\leq\|S_R^{(n-1)/2}\|_1|S_R^{(n-1)/2}(f,x)-f(x)|+|S_R^{n}(f,x)-f(x)|+O(R^{-p})$$

$$=O(R^{-p}\log R).$$

于是定理1全部证完．

§2 临界阶时的收敛定理

本节主要讨论$S_R^{\delta_0}(f,\ x)$的定点收敛问题．为此，首先在$L(G)$中考虑某类函数：

定义：设$f(H,\ g_0)$定义在$Q\times G_0$上，现令

$$f_1(H,\ g_0)=\begin{cases}f(H,\ g_0),H\in Q\\ 0\qquad\quad,H\notin Q.\end{cases}\quad(\text{其中}g_0\in G_0).$$

如果$\int_0^{\infty}\int_{\sigma}\Big|\int_{G_0}f_1(t\eta,\ g_0)[\dot{g}_0]\Big|\mathrm{d}\sigma_\beta\mathrm{d}t<\infty$，则称$f\in L(G/\overline{D})$.

现在令$f_{x_0}(t)=\int_{\sigma}\prod_{a\in R}|D(\exp t\eta)|^2\psi_{x_0}(t\eta)\ \mathrm{d}\sigma_\eta$，就有

定理2 设$f\in L(G/\overline{D})$，并在x_0满足

$$F(r)=\int_{\ldots}|f(xx_0)-f(x_0)|\ \mathrm{d}x=o(t^n)\qquad t\to 0,$$

则关系式$\lim\limits_{R\to\infty}S_R^{\delta_0}(f,\ x_0)=f(x_0)$成立的充要条件是存在$r_0>0$，使

$$\int_{1/R}^{r_0} t^{-2m-1}\sin\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right) f_{x_0}(t)\,dt+$$

$$n![(n-2)!\,2R]^{-1}\int_{1/R}^{r_0} t^{-2(m+1)}\cos\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right) f_{x_0}(t)\,dt=o(1),\quad (R\to\infty).$$

证　由〔1〕定理2易知：

$$S_R^{\delta_0}(f,x_0)-f(x_0)=\mathrm{const}R^n\int_Q\prod_{a\in R^-}(a,H)\sin\frac{(ia,H)}{2}(R|H|)^{-n+1/2}J_{n-1/2}(R|H|)\psi_{x_0}(H)dH+$$

$$\mathrm{const}R^n\int_Q\psi_{x_0}(H)\Big\{\sum_{\substack{\zeta\in L_e\\ \zeta\neq 0}}\prod_{a\in R^-}(a,H+\zeta)\Big[(R|H+\zeta|)^{-n+1/2}J_{n-1/2}(R|H+\zeta|)\Big]\Big\}D(H)dH+$$

$O(1/R)=I+J+O(1/R)$.

而且还易见存在常数M，使

$$R^n\sum_{\substack{\zeta\in L_e\\ \zeta\neq 0}}\prod_{a\in R^-}(a,H+\zeta)(R|H+\zeta|)^{-n+1/2}J_{n-1/2}(R|H+\zeta|)\le M\sum_{\substack{\zeta\in L_e\\ \zeta\neq 0}}|\zeta|^{-n+m}<\infty$$

（由于G半单，$n-m>l$）。

于是对任意$\varepsilon>0$，存在L_e的不包含0的有限区域N_e，使得 $\sum\limits_{\substack{\zeta\in L_e\\ \zeta\notin N_e}}|\zeta|^{-n-m}<\varepsilon/M$，因此容易看出：

$$R^n\int_Q|\psi_0(H)|\Big|\sum_{\substack{\zeta\in L_e\\ \zeta\notin N_e}}\prod_{a\in R^-}(a,H+\zeta)(R|H+\zeta|)^{n-1/2}J_{n-1/2}(R|H+\zeta|)D(H)\Big|dH<M_1\varepsilon,$$

M_1是正常数．

另一方面，要证

$$\sum_{\zeta\in N_e}R^n\int_Q\psi_{x_0}(H)\prod_{a\in R^-}(a,H+\zeta)(R|H+\zeta|)^{-n+1/2}J_{n-1/2}(R|H+\zeta|)D(H)dH=\sum_{\zeta\in N_e}J_\zeta,$$

当$R\to\infty$时，每一$J_\zeta\to 0$．

事实上，由于Bessel函数的性质知道：

$$J_\zeta=\mathrm{const}\int_{Q+\zeta}\psi_{x_0}(H-\zeta)\prod_{a\in R^+}(a,H)|H|^{-n}D(H-\zeta)\cos\left(R|H|-\frac{n-1}{2}\pi\right)dH$$

$$+O\Big(R^{-1}\int_Q|\psi_{x_0}(H)|\Big|\prod_{a\in R^-}(a,H+\zeta)\Big||H+\zeta|^{-n-1}dH\Big)\qquad(*)$$

由于$\zeta\neq 0$，因此上边第二项为

$$O\Big(R^{-1}\int_Q|\psi_{x_0}(H)|dH\Big)=o(1),\quad R\to\infty.$$

再利用极坐标变换及Riemann引理，可知当$R\to\infty$时，（＊）中第一项也是$o(1)$．综合起来就是当$R\to\infty$时，$J=o(1)$．

再考虑I，取适当小的固定正数$r_0<\varepsilon$，并使$B(0,r_0)=[0,r_0)\times\sigma\times CQ$．于是

$$I=R^n\Big(\int_{B(0,r_0)}+\int_{Q-B(0,r_0)}\Big)\prod_{a\in R^-}(a,H)\sin\frac{(ia,H)}{2}(R|H|)^{-n+1/2}J_{n-1/2}(R|H|)\psi_{x_0}(H)dH$$

$=I_1+I_2$.

和证明J_ζ完全类似的方法可证明$I_2=o(1)$，当$R\to\infty$时．

再看I_1，由于当$|H|$很小时，$\prod\limits_{a\in R^-}(a,H)=(2i)^m\prod\limits_{a\in R^-}\sin\frac{(ia,H)}{2}+O(|H|^{m+1})$．但

$$R^{1/2}\int_{B(0,r_0)}\left|\prod_{a\in R^+}\sin\frac{(ia,H)}{2}\right|\,|H|^{-n+m+3/2}\,|J_{n-1/2}(R|H|)|\,|\psi_{x_0}(H)|\mathrm{d}H=$$

$O(\int_{B(0,r_0)}|H|^{-l+1}|\psi_{x_0}(H)|\mathrm{d}H)\leq\varepsilon$ （由定理条件及绝对连续性，取r_0适当小．因此

最后只需考虑：

$$R^n\int_{\substack{|H|\leq r_0\\ H\in Q}}(R|H|)^{-n+1/2}J_{n-1/2}(R|H|)\,\psi_{x_0}(H)\,|D(H)|^2\mathrm{d}H=$$

$$R^{1/2}\Big(\int_{\substack{|H|\leq 1/R\\ H\in Q}}+\int_{\substack{1/R<|H|\leq r_0\\ H\in Q}}\Big)\,H^{-n+1/2}J_{n-1/2}(R|H|)\,\psi_{x_0}(H)\,|D(H)|^2\mathrm{d}H=P_1+P_2$$

令$V_n(t)=J_n(t)t^{-n}$，于是

$P_1=R^n\int_0^{1/R}V_{n-1/2}(Rt)\,\mathrm{d}F(t)=o(1)+o(R^{n+2}\int_0^{1/R}t^{n+1}\mathrm{d}t)=o(1)$，$R\to\infty$时．

再由奇数阶Bessel函数的展开（见〔2〕P.387）

$$P_2=\sum_{r=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\sqrt{\frac{2}{\pi}}R^n\int_{\substack{1/R<|H|\leq r\\ H\in Q}}(R|H|)^{-n}\sin\Big(R|H|-\frac{n-1}{2}\pi\Big)\frac{(-1)^r(n+2r-1)!}{(2r)!\,(n-2r-1)!\,(2R|H|)^{2r}}\cdot$$

$$\psi_{x_0}(H)\,|D(H)|^2\mathrm{d}H+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{r=0}^{[\frac{n-2}{2}]}\int_{\substack{1/R<|H|\leq r_0\\ H\in Q}}|H|^{-n}\cos\Big(R|H|-\frac{n-1}{2}\pi\Big)\cdot$$

$\dfrac{(-1)^r(n+2r)!}{(2r+1)!\,(n-2r-2)!\,(2R|H|)^{2r+1}}\psi_{x_0}(H)\,|D(H)|^2\mathrm{d}H$．但注意当$r\geq2$时，

$$R^n\int_{\substack{1/R\leq|H|\leq r_0\\ H\in Q}}(R|H|)^{-n-r}\sin\Big(R|H|-\frac{n-1}{2}\pi\Big)\psi_{x_0}(H)\,|D(H)|^2\mathrm{d}H=$$

$$R^{-r}\int_{1/R}^{r_0}t^{-n-r+l-1}\sin\Big(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\Big)f_{x_0}(t)\mathrm{d}t=R^{-r}t^{-n-r}\sin\Big(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\Big)F(t)\Big|_{1/R}^{0}+$$

$$O(R^{-r}\int_{1/R}^{r_0}t^{-n-r-1}\sin\Big(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\Big)F(t)\mathrm{d}t)+O(R^{-r+1}\int_{1/R}^{r_0}t^{-n-r}\cos\Big(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\Big)F(t)\mathrm{d}t)=$$

$o(1)$，$R\to\infty$．

同理可证当$r\geq2$，$R\to\infty$时，

$$R^n\int_{\substack{1/R\leq|H|\leq r_0\\ H\in Q}}(R|H|)^{-n-r}\cos\Big(R|H|-\frac{n-1}{2}\pi\Big)\psi_{x_0}(H)\,|D(H)|^2\mathrm{d}H=o(1).$$

因此

$$P_2=\mathrm{const}\,\Big(\int_{1/R}^{r_0}t^{-2m-1}\sin\Big(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\Big)f_{x_0}(t)\mathrm{d}t+$$

$$n!\,[(n-2)!\,2R]^{-1}\int_{1/R}^{r_0}t^{-2m-2}\cos\Big(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\Big)f_{x_0}(t)\mathrm{d}t+o(1),\ (R\to\infty).\ \blacksquare$$

如果令$\bar{f}_{x_0}(t)=\int_{\sigma}\prod_{a\in R^+}(a,\eta)^2\psi_{x_0}(t\eta)\mathrm{d}\sigma_\eta$．

则和定理 2 完全类似可证明

定理 3 如$f\in L(G/\bar{D})$且满足$\int_0^t r^{l-1}\bar{f}_{x_0}(r)\mathrm{d}r=o(t^l)$，则$\lim\limits_{R\to\infty}S_R^{(n-1)/2}(f,x_0)=f(x_0)$的充要条件是存在$r_0>0$，使

$$\int_{K/R}^{r_0}\overline{f}_{x_0}(t)t^{-1}\sin\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right)dt+$$

$$n!\,2^{-1}[(n-2)!]^{-1}R^{-1}\int_{K/R}^{r_0}\overline{f}_{x_0}(t)t^{-2}\cos\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right)dt=o(1),\quad (R\to\infty,\ K\to\infty\text{时．})．$$

推论 设$f\in L(G/\overline{D})$，且当$t\to 0^+$时$\overline{F}(t)=\int_0^t r^{l-1}|\overline{f}_{x_0}(r)|dr=o(t^l)$，则$\lim\limits_{R\to\infty}S_R^{\delta}(f,x_0)=f(x_0)$成立的充要条件是存在$r_0>0$，使

$$\lim_{R\to\infty}\int_{1/R}^{r_0}\overline{f}_{x_0}(t)t^{-1}\sin\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right)dt=0．$$

证明是显然的，故略去．

定理4 设$f\in L(G/D)$，并在x_0满足

(i) $\int_0^t r^{l-1}f_{x_0}(r)dr=o(t^n)$，(ii) $\int_0^t|d(u^{-2m+1}f_{x_0}(u))|=O(t)$，$t\to 0^+$． 则

$$\lim_{R\to\infty}S_R^{\delta_0}(f,x_0)=f(x_0)．$$

证 由定理2证明容易看出，只需证明存在$r_0>0$，以及对任意取定的$K>0$，有

$$I_1=\int_{K/R}^{r}t^{-2m-1}f_{x_0}(t)\sin\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right)dt\to 0\quad(R\to\infty,\ K\to\infty),$$

$$I_2=\int_{K/R}^{r_0}R^{-1}t^{-2m-2}f_{x_0}(t)\cos\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right)dt\to 0\quad(R\to\infty,\ K\to\infty)．$$

对I_1作分部积分，有

$$I_1=-\frac{1}{R}\cos\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right)f_{x_0}(t)t^{-2m-1}\Big|_{K/R}^{r_0}+1/R\int_{K/R}^{r_0}\cos\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right)d\left(\frac{f_{x_0}(t)}{t^{-2m-1}}\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{R}\right)+O\left(\frac{1}{K}\right)+O\left(\frac{1}{R}\int_{K/R}^{r_0}|d(f_{x_0}(t)t^{-2m-1})|\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{R}\right)+O\left(\frac{1}{K}\right)+O\left(\frac{1}{R}\int_{K/R}^{r_0}\left(d\int_0^t|d(f_{x_0}(t)t^{-2m-1})|\right)\right|t^{-2}+O\left(\frac{1}{R}\int_{K/R}^{r_0}t^{-3}\frac{f_{x_0}(t)}{t^{2m-1}}|dt\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{R}\right)+O\left(\frac{1}{K}\right)．$$

同理可证当$R\to\infty$、$K\to\infty$时，$I_2=o(1)$．因此定理4证完．

定理5 设$f\in L(G/\ddot{D})$，且在x_0满足

(i) $\int_0^t r^{l-1}\overline{f}_{x_0}(r)dr=o(t^l)$，(ii) $\int_{\eta_0}^{r_0}|\overline{f}_{x_0}(t+\eta_0)-\overline{f}_{x_0}(t)|t^{-1}dt=o(1)$ $(\eta_0\to 0\text{时})$．$r_0>0$是固定常数．则$\lim\limits_{R\to\infty}S_R^{\delta}(f,x_0)=f(x_0)$．

证 利用分部积分容易看出，在条件 (i) 下，必有$\int_0^t\overline{f}_{x_0}(\tau)d\tau=o(t)(t\to o^+\text{时})$．因此由古典的Lebesgue判别法及定理3，显然只需证明

$$R^{-1}\int_{K/R}^{r_0}f_{x_0}(t)t^{2}\cos\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right)dt=o(1)\ (R\to\infty,\ K\to\infty)．$$

首先令$\Phi(t)=\int_0^t\overline{f}_{x_0}(\tau)\cos\left(R\tau-\frac{n-1}{2}\pi\right)d\tau$，并且假设有关系式：

(iii) $\Phi(t)=o(t)(t\to o^+)$．则$R^{-1}\int_{K/R}^{r_0}\overline{f}_{x_0}(t)t^{-2}\cos\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right)dt=$

$$R^{-1}\Phi(t)t^{-2}\Big|_{K/R}^{r_0}+2R^{-1}\int_{K/R}^{r_0}\Phi(t)t^{-3}dt=o(1)(R\to\infty)．$$

因此我们最后只需证明 (iii) 必成立．不妨设n为奇数，于是

$$\int_0^t\overline{f}_{x_0}(u)\cos\left(Ru-\frac{n-1}{2}\pi\right)du=\frac{1}{4}\left\{\int_{\pi/R}^{t}+\int_{\pi/R}^{t}+\int_{\pi/R}^{t}+\int_{\pi/R}^{t}\right\}\overline{f}_{x_0}(u)\cos Ru\,du+o(1)=$$

$$\frac{1}{4}\left\{\int_{\pi/R}^{t}+2\int_{2\pi/R}^{t}+\int_{3\pi/R}^{t}\right\}f_{x_0}(u)\cos Ru\,du+o(1)=$$

$$\frac{1}{4}\int_{\pi/R}^{t}\{\overline{f}_{x_0}(u)-2\overline{f}_{x_0}(u+\frac{\pi}{R})+\overline{f}_{x_0}(u+\frac{\pi}{R})\}\cos Ru\mathrm{d}u+o(1)=$$

$$\frac{1}{4}\int_{\pi/R}^{t}\{\overline{f}_{x_0}(u)-\overline{f}_{x_0}(u+\frac{\pi}{R})\}\cos Ru\mathrm{d}u-\frac{1}{4}\int_{\pi/R}^{t}\{\overline{f}_{x_0}(u+\frac{\pi}{R})-\overline{f}_{x_0}(u+\frac{2\pi}{R})\}\cos Ru\mathrm{d}u+o(1)=$$

J_1+J_2,

$$|J_1|=\frac{t}{4}\left|\int_{\pi/R}^{t}(\frac{u}{t})\ \frac{\{\overline{f}_{x_0}(u+\frac{\pi}{R})-\overline{f}_{x_0}(u)\}}{u}\cos Ru\mathrm{d}u\right.$$

$$=O(t)\int_{\pi/R}^{t}|\overline{f}_{x_0}(u+\frac{\pi}{R})-\overline{f}_{x_0}(u)|u^{-1}\mathrm{d}u=o(t),(R\to\infty\text{时}).$$

同理可证$J_2=o(t)(\frac{\pi}{R}\leq t\to 0\text{时})$．这就完全证明了定理 5．

推论 如f是Dini-Lip类，则$\lim\limits_{R\to\infty}S_R^{\delta}(f,\ x)=f(x)$ 关于$x\in$ G一致成立．

定理 6 如$f\in$ L $(G/\overline{D})$，在x_0满足

(i) $S_0^t r^{l-1}f_{x_0}(r)\mathrm{d}r=o(t^n)$ $(t\to 0^+)$．

(ii) $\int_t^{r_0}|f_{x_0}(t+r)-f_{x_0}(r)|^{-2m-1}\mathrm{d}r=o(1)(t\to 0^+,\ r_0>0)$．则

$$\lim_{R\to\infty}S_R^{\delta}(f,\ x_0)=f(x_0).$$

证 由条件 (i)，利用分部积分有

$$\int_0^t f_{x_0}(u)\mathrm{d}u=o(t^{2m+1})\ \ (\frac{\pi}{R}<t\to 0^+).$$

于是由〔4〕定理 1 类似地可证明:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{1/R}^{r_0}t^{-2m-1}\sin(Rt-\frac{n-1}{2}\pi)f_{x_0}(t)\mathrm{d}t=0,$$

$$\psi(t)=\int_0^t f_{x_0}(\tau)\cos(R\tau-\frac{n-1}{2}\pi)\mathrm{d}\tau=o(t^{2m+1})\ \ (t\to 0^+).$$

因此利用分部积分后有

$$R^{-1}\int_{1/R}^{r_0}t^{-2(m+1)}\cos(Rt-\frac{n-1}{2}\pi)f_{x_0}(t)\mathrm{d}t=o(1)+o(R^{-1}\int_{1/R}^{r_0}t^{-2}\mathrm{d}t)=o(1)\ \ (R\to\infty).$$

于是由定理 2 就知道定理 6 证完．

参 考 文 献

〔1〕J.L.Clerc, Sommes de Riesz et multiplicateurs sur un groupe de Lie compact, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 24: 1(1974), 149—172.

〔2〕王竹溪、郭敦仁、特殊函数论，科学出版社，1965.

〔3〕W.Trebls, Some Fourier multiplier criteria and the spherical Bochner-Riesz kernel, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., tome XX, No.10, 1173-1185 (1975).

〔4〕陆善镇，多重福里哀级数黎斯球形平均的收敛性，数学学报，23: 3(1980)，383—397.

Spherical Riesz Means of Fourier Series at the Critical index on Semi-simple Compact Lie Groups

Fan Dashan

Abstract

In this paper, we study the spherical summability of Fourier series at the critical index on semi-simple compact Lie groups. The main results in the paper are the following theorems:

Theorem 1 Let $f\in C(G)$, the relation

$$\lim_{R\to\infty} S_R^\delta(f,\ x)=f(x)$$

holds for all $x\in G$ uniformly if and only if $\delta>\frac{n-1}{2}$.

If $f\in \mathrm{Lip}\ p$, $1\geq p>0$, then

$$|S_R^{\delta_0}(f,\ x)-f(x)|=O(R^{-p}\log R),\ \delta_0=\frac{n-1}{2}.$$

Theorem 3 If $f\in L(G/\bar{D})$, with

$$\int_0^t r^{l-1}\ \bar{f}_{x_0}(r)\mathrm{d}r=o(t^l),\quad t\to 0^+,$$

then $\lim_{R\to\infty} S_R^{(n-1)/2}(f,\ x_0)=f(x_0)$ if there exists $r_0>0$ such that

$$\int_{K/R}^{r_0}\bar{f}_{x_0}(t)t^{-1}\sin\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right)\mathrm{d}t+n!\,2^{-1}[(n-2)!]^{-1}R^{-1}\int_{K/R}^{r_0}\bar{f}_{x_0}(t)t^{-2}\cos\left(Rt-\frac{n-1}{2}\pi\right)\mathrm{d}t=$$

$o(1)$ $(R\to\infty,\ K\to\infty)$.

Theorem 5 If $f\in L(G/\bar{D})$ with following conditions at x_0:

(i) $\int_0^t r^{l-1}\ \bar{f}_{x_0}(r)\mathrm{d}r=o(t^l)$ $(t\to 0^+)$, (ii) $\int_{\eta_0}^{r_0}|\bar{f}_{x_0}(t+\eta_0)-\bar{f}_{x_0}(t)|t^{-1}\mathrm{d}t=o(1)$ $(\eta_0\to 0^+)$;

then $\lim_{R\to\infty} S_R^{\delta_0}(f,\ x_0)=f(x_0)$.